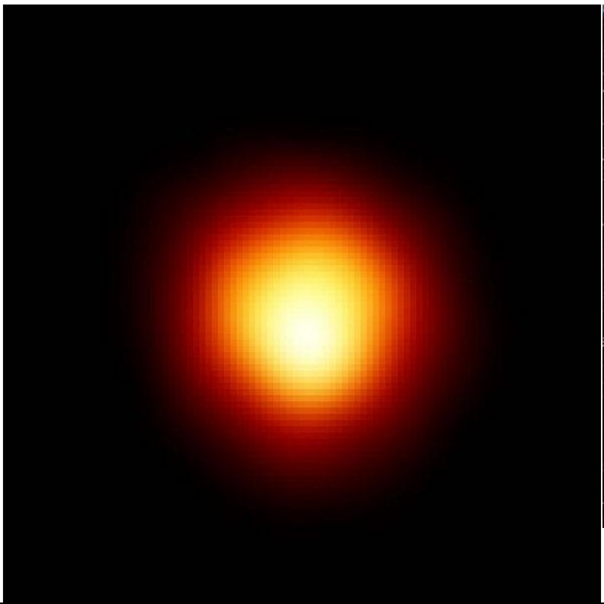
De dynamiske stjerner

Supplerende noter

Kuglesymmetriske gasmasser



Figur 1 *Betelgeuse* (Alfa Orionis) er en rød kæmpestjerne i stjernebilledet Orion. Den er så stor, at den anbragt i vores solsystem ville nå næsten ud til Saturns bane. Den har en masse på 18-19 $M_{\odot}$ og en radius på omkring 1180 $R_{\odot}$. Stjernen er med meget god tilnærmelse kuglesymmetrisk opbygget. Navnet, der er af arabisk oprindelse og betyder ”Kæmpens skulder”, udtales ”Bet-æl-GØØS”. *Foto*: Hubble Space Telescope.

Figur 2 Gastågen *Messier 8* i stjernebilledet Skytten. Fordelingen af gas og støv udviser en vis koncentration ind mod et centrum. Selv om skyen tydeligt nok ikke er kugleformet, vil man som en første tilnærmelse mod en beskrivelse af den antage en kuglesymmetrisk fordeling.

Vores hjemsted i Universet, *Mælkevejsgalaksen*, rummer et utal af stjerner og skyer bestående af gas (hydrogen, helium…) og støv. Figur 1 og 2 viser eksempler. Strukturen af sådanne gasmasser er præget af modspillet mellem en tiltrækkende gravitationskraft, som bevirker en sammentrækning, og et udadrettet gastryk, hvis ændring ud gennem gasmassen bidrager med en udadrettet trykkraft. Beskrivelsen af forholdene lettes meget, hvis man kan antage en kuglesymmetrisk opbygning. Det betyder, at alle fysiske størrelser som densitet ρ, tryk p og temperatur T kun afhænger af afstanden r fra gasmassens centrum. Som figur 1 og 2 antyder, er denne antagelse mere eller mindre god.

Tyngdekraften

Gravitationskraften mellem to punktformede legemer med masserne m_1 og m_2 og afstanden r er som bekendt givet ved Newtons gravitationslov

$$F_{\text{grav}} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \tag{1}$$

hvor G er den universelle gravitationskonstant. Men hvordan forholder det sig, hvis legemerne ikke er punktformede? Her kommer kuglesymmetrien til hjælp. Man kan nemlig vise (og det kunne allerede Newton selv!), at når man befinder sig inde i en gasmasse i afstanden r fra centrum, så er tyngdekraften på et lille legeme kun bestemt af den del af gasmassen, som befinder sig inden for afstanden r. Den del, som ligger uden for giver ikke noget nettobidrag. I centrum er tyngdekraften nul.

Lad os betragte et lille kasseformet gaselement, som befinder sig i afstanden r fra centrum, se figur 3. Så er tyngdekraften på denne givet ved

$$F_{\text{grav}} = G \cdot \frac{m(r) \cdot m_{\text{kasse}}}{r^2} \tag{2}$$

hvor $m(r)$ betegner massen af den del af gasen, som ligger inden for afstanden r.

Trykkraften

Som bekendt defineres trykket p ved formlen at $p = \frac{F}{A}$, hvor F er kraften vinkelret på arealet A. Derfor er trykkraften simpelt hen givet ved $F_{\text{tryk}} = p \cdot A$.

Den hydrostatiske ligning

Vi betragter nu mere detaljeret de kræfter som virker på den lille kasse fra figur 3. Vi lader den have lodrette sider og benytter betegnelserne på figur 4: Kassen har arealet A og højden Δr. Gastrykket ved kassens bund (afstand r) betegnes p og trykket på kassens top (afstand $r + \Delta r$) betegnes $p + \Delta p$. Bemærk, at da trykket aftager udad, så er Δp negativ! Densiteten af gassen på kassens sted kalder vi ρ. Vi har nu

Kassens volumen:	$V_{\text{kasse}} = A \cdot \Delta r$
Kassens masse:	$m_{\text{kasse}} = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot \Delta r$

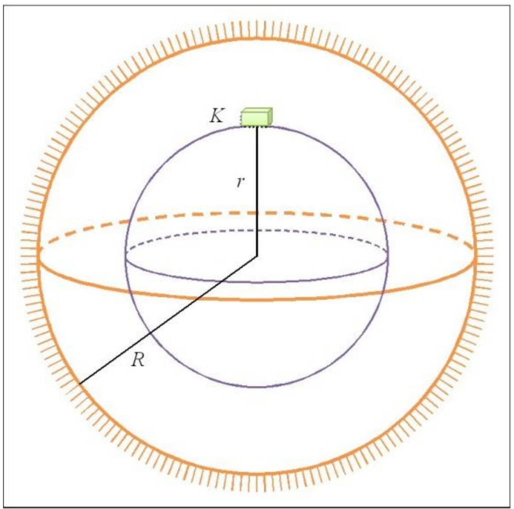
Kassen er påvirket af *tre kræfter* i lodret retning:

Gravitationskraften:	$F_{\text{grav}} = G \cdot \frac{m(r) \cdot \rho \cdot A \cdot \Delta r}{r^2}$
Trykkraft på undersiden:	$F_{\text{nedefra}} = p \cdot A$
Trykkraft på oversiden:	$F_{\text{oppefra}} = (p + \Delta p) \cdot A$

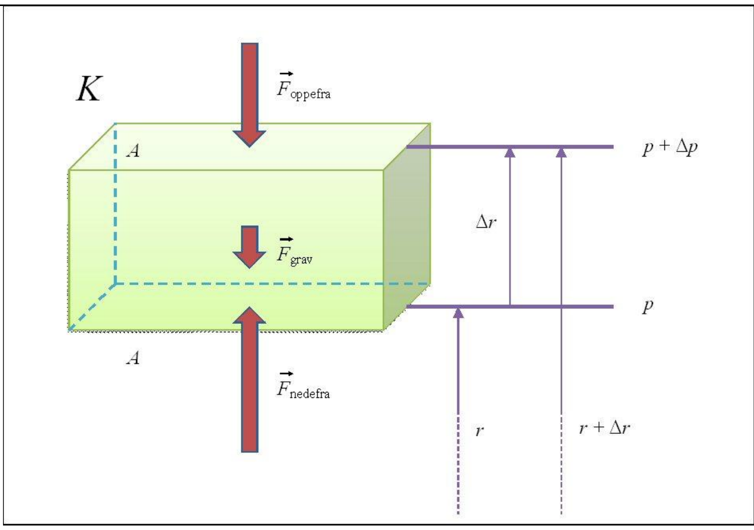
Idet vi regner udadrettede kræfter positive (og indadrettede negative), må den resulterende kraft være

$$\begin{aligned} F_{\text{res}} &= F_{\text{nedefra}} - F_{\text{oppefra}} - F_{\text{grav}} = p \cdot A - (p + \Delta p) \cdot A - G \cdot \frac{m(r) \cdot \rho \cdot A \cdot \Delta r}{r^2} \\ &= -\Delta p \cdot A - G \cdot \frac{m(r) \cdot \rho \cdot A \cdot \Delta r}{r^2} \end{aligned}$$

Overvej, hvorfor vi ikke medtager de fire trykkræfter i vandret retning i beregningen. ☜



Figur 3 Snit gennem en kuglesymmetrisk gasmasse med radius R. Vi betragter et kasseformet gaselement K i afstanden r. Tyngdekraften på dette er alene givet ved den del af gasmassen, som befinder sig *inden for* afstanden r. Massen af denne del betegnes $m(r)$. I centrum er $m(0) = 0$ og for $r = R$ er $M(R) = M$, massen af hele gasmassen.



Figur 4 Kassen K fra figur 3 i forstørrelse. Undersiden befinder sig i afstanden r fra centret og gastrykket er her p. Oversiden har afstanden $r + \Delta r$ og trykket er $p + \Delta p$. Kassens vandrette areal betegnes A. De tre kræfter, som virker på K i lodret retning, er gravitationskraften, F_{grav}, trykkraften mod undersiden, F_{nedefra}, og trykkraften mod oversiden, F_{oppefra}. Bemærk retningen af disse kræfter.

Stjerner: Ligevægt

I de fleste stjerner har der indstillet sig en ligevægt mellem de kræfter, som virker: Kassen befinder sig i ro. Så er $F_{\text{res}} = 0$ og ligningen kan omskrives således:

$$-\Delta p \cdot A - G \cdot \frac{m(r)\cdot\rho\cdot A\cdot\Delta r}{r^2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \Delta p = -G\cdot\frac{m(r)\cdot\rho\cdot\Delta r}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{\Delta p}{\Delta r} = -G\cdot\frac{m(r)\cdot\rho}{r^2}$$

Vi genkender $\frac{\Delta p}{\Delta r}$ som en *differens*kvotient. Ved grænseovergangen $\Delta r \to 0$ går den mod en *differential*kvotient, så vi får sluttelig

$$\boxed{p' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -G\cdot\frac{m(r)\cdot\rho}{r^2}} \qquad (3)$$

Denne ligning kaldes *differentialligningen for hydrostatisk ligevægt*. (Hydrostatik: Læren om væsker og gasser i ligevægt). Differentialkvotienten af p er skrevet både med Newtons notation (′) og med Leibnitz' (d/dr).

Ligningen spiller (sammen med tre andre differentialligninger) en afgørende rolle for studiet af stjernernes indre og beregningen af modeller for den indre opbygning. Her vil vi nøjes med at anvende den til en vurdering af, hvor stort trykket er i Solens centrum.

Opgave: Skøn over trykket p_c i Solens centrum

Vi anbringer os midt i Solen ($r = ½\cdot R_\odot$) og anvender ligning (3) på forholdene her. Det bliver nødvendigt at gøre et par grove tilnærmelser:

- *Differential*kvotienten dp/dr tilnærmes med *differens*kvotienten $\Delta p/\Delta r \approx (0 - p_c)/(R_\odot - 0)$.
- Vi antager, at Solen er *homogen*, dvs. $\rho = \rho_\odot = \dfrac{M_\odot}{\frac{4}{3}\pi R_\odot^3}$.
- I afstanden $r = ½\cdot R_\odot$ er den indenfor liggende kugles rumfang $\frac{1}{8}$ af hele Solens rumfang, så $m(r) \approx \frac{1}{8}\cdot M_\odot$

Vis ved indsættelse, at man når frem til formlen

$$p_c = \frac{3GM_\odot^2}{8\pi R_\odot^4}$$

og beregn en talværdi for trykket. Gode solmodeller giver værdien $p_c = 2.3\cdot 10^{16}$ Pa.

Gasskyer: Jeans-instabilitet

Stjerner dannes i store interstellare gasskyer. Vi stiller nu spørgsmålet, hvornår en sådan sky bliver ustabil og trækker sig sammen? Den resulterende kraft på kassen i figur 4 må så være indadrettet, $F_{res} < 0$. Af ligningen (3) følger så, at

$$-\Delta p\cdot A - G\cdot\frac{m(r)\cdot\rho\cdot A\cdot\Delta r}{r^2} < 0 \quad\Leftrightarrow\quad -\Delta p < G\cdot\frac{m(r)\cdot\rho\cdot\Delta r}{r^2}$$

$$-\frac{\Delta p}{\Delta r} < G\cdot\frac{m(r)\cdot\rho}{r^2} \qquad (4)$$

Uligheden kan benyttes til at finde en nedre grænse for, hvor lille en sky kan være uden at den trækker sig sammen. Dertil tænker vi os, at vi befinder os midt i skyen ($r = ½\cdot R$) og foretager tilnærmelser som i ovenstående opgave:

$$-\frac{\Delta p}{\Delta r} \approx -\frac{0 - p_{\text{centrum}}}{R - 0} = \frac{p_{\text{centrum}}}{R}$$

Kuglen med radius $½\cdot R$ har et rumfang, som er 1/8 af hele kuglens runfang, så vi tilnærmer

$$m(r) = m(\tfrac{1}{2}\cdot R) \approx \tfrac{1}{8}\cdot M$$

Desuden er kuglens samlede masse jo givet ved

$$M = \tfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3\cdot\rho$$

og endelig anvender vi idealgasligningen til at eliminere centraltrykket p_{centrum}:

$$p_{\text{centrum}} = \frac{\rho \cdot k_{\text{B}} \cdot T_{\text{centrum}}}{\langle m \rangle}$$

Vi indsætter de forrige fire ligninger i uligheden (4) og får

$$-\frac{\Delta p}{\Delta r} < G \cdot \frac{m(r) \cdot \rho}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p_{\text{centrum}}}{R} < G \cdot \tfrac{1}{8} \cdot \left(\tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho\right) \cdot \rho \cdot \frac{1}{\tfrac{1}{4} \cdot R^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_{\text{centrum}} < G \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \rho^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho \cdot k_{\text{B}} \cdot T_{\text{centrum}}}{\langle m \rangle} < G \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \rho^2$$

$$\Leftrightarrow \quad R^2 > \frac{3 \cdot k_{\text{B}} \cdot T_{\text{centrum}}}{2 \cdot \pi \cdot G \cdot \langle m \rangle \cdot \rho}$$

Vi har foretaget ret grove tilnærmelser, og derfor er der ikke meget forgjort ved endvidere at erstatte talfaktoren $\frac{3}{2 \cdot \pi}$ med 1 (Dermed opnår vi også overensstemmelse med resultatet af en mere korrekt udledning!). Vi får altså

$$\boxed{R > \sqrt{\frac{k_{\text{B}} \cdot T_{\text{centrum}}}{G \cdot \langle m \rangle \cdot \rho}} \equiv R_{\text{Jeans}}}$$

Skyen er altså ustabil overfor sammentrækning, hvis den radius R er større end den såkaldte *Jeans-radius* defineret i rammen ovenfor.