

SUPERLEDNING af Michael Brix Pedersen

Indledning

I denne note forudsættes kendskab til de elementære egenskaber ved Schrödingerligningen (se fx Reference [2] eller [3], lidt elementære egenskaber ved komplekse tal og Eulers ligning (se fx Reference [6])). Endvidere skal man have læst "Superledende elektroner A/S" af Per Hedegård [5].

Den superledende tilstand er et makroskopisk kvantefænomen. Herved forstås, at de kvantemekaniske effekter som ellers normalt er skjulte og skrøbelige nu har makroskopiske konsekvenser, der kan mærkes og ses. En superleder kan beskrives ved hjælp af en *makroskopisk* bølgefunktion. Hvor man i fx brintatomet beskriver en enkelt elektrons bevægelse ved hjælp af en bølgefunktion må man ved beskrivelsen af den superledende tilstand benytte en bølgefunktion der beskriver den *samlede* virkning af hele det superledende kondensat (en ordnet bevægelse af alle eller næsten alle valenselektronerne i det superledende materiale). Den makroskopiske bølgefunktion er meget mere robust end en enkelt elektrons bølgefunktion, fordi den er udtryk for en samlet, kollektiv virkning af et meget stort antal elektroner. Lige som man kan tage en krystal og vende og dreje den med sine hænder uden at krystallen bryder sammen, findes der også "håndtag" hvormed man kan trække i den makroskopiske bølgefunktion (se under Josephson-effekten) uden at bølgefunktionen (og dermed den superledende tilstand) bryder sammen (kollaberer).

LONDON-LIGNINGERNE

I kvantemekanikken opdager man, at man ikke kan bruge det sædvanlige udtryk for impulsen, når fx en elektron bevæger sig i et magnetisk felt. Man skal i stedet benytte den såkaldte "kanoniske impuls", som er den sædvanlige "kinetiske impuls" plus et ekstra bidrag som grundlæggende skyldes tilstedeværelsen af et magnetisk felt:

Den kanoniske impuls er givet ved

$$(L-1) \quad \vec{p} = m\vec{v} - q\vec{A}$$

hvor \vec{A} er det såkaldte *vektorpotential* og q er ladningen af partiklen. Det er et felt på samme måde som det magnetiske felt, og der gælder, at man får det velkendte B-felt ved at "tage rotationen af vektorpotentialet":

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B},$$

og man kan derfor sige at der uden om A-feltet snor sig et magnetisk felt.

Hvis vektorpotentialet ændrer sig i tiden, dannes et elektriske felt:

$$-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

Dette er faktisk Faradays lov (induktionsloven). Man kan se det ved at tage rotationen på begge sider af ligningen:

$$-\frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{A}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E} \Leftrightarrow -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

I afsnittet "Det skjulte felt", s. 110-112 i Ref. [5] er det faktisk vektorpotentialet, der er det skjulte felt. Hemmeligheden er, at vektorpotentialet påvirker bølgefunktionens fase, når man sender en elektron en tur rundt om et sted hvor der er et A-felt, og det kan ses ved at elektronbølgen laver

interferens med sig selv. I en superleder er det endda relativt nemt at se fænomenet (se afsnittet "fluxkvantisering" i denne note).

Man kan læse en mere udførlig forklaring af fænomenet i Feynman Lectures bd. II, s. 15-7 til 15-14 øverst [2].

Den tyske fysiker Fritz London opdagede i 1935 sammen med sin bror Heinz, at (L-1) plus en enkelt ekstra antagelse om superlederens bølgefunktion kan forklare Meissnereffekten.

Uden påtrykt magnetfelt forventes (meget naturligt) en grundtilstand af superlederen med den totale impuls nul:

$$\langle \vec{p} \rangle = \vec{0}$$

Hvis nu bølgefunktionen på en eller anden måde har en "stivhed" i sig (som Meissnereffekten jo indikerer), og bevarer sin form så $\langle \vec{p} \rangle = 0$ også når der påtrykkes et felt, må vi derfor have at

$$(L-2) \quad \langle \vec{v}_s \rangle = -e\vec{A}.$$

og den superledende strøm må være givet ved

$$(L-3) \quad \vec{J}_s = n_s e \langle \vec{v}_s \rangle = \frac{-n_s e^2}{m} \vec{A}$$

Med London-ligningen (L-3) i hånden kan vi nu forklare både superledning og Meissnereffekt:

Perfekt konduktivitet (superledning)

Hvis man nu differentierer (L-3) på begge sider fås (idet $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$) at

$$(L-5) \quad \frac{d\vec{J}_s}{dt} = \frac{-n_s e^2}{m} \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E}$$

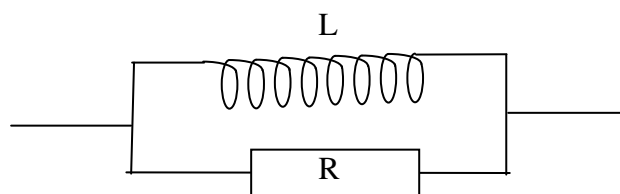
hvilket betyder at strømmen med tiden vokser proportionalt med et påtrykt elektrisk felt. Dette er jo i virkeligheden Newtons anden lov for de superledende elektroner, som gnidningsfrit bliver accelereret. Ud over de superledende elektroner er en vis del, n_N , af den samlede mængde elektroner i superlederen "normale", dvs. de kan kollideres med gitterionerne og med hinanden, og de opfører sig derfor helt som elektronerne i en normal modstand:

$$(L-6) \quad \vec{J}_N = \frac{n_N e^2 \tau}{m} \vec{E}$$

hvilket er den velkendte Ohms lov i en lidt anden forklædning.

Tilsvarende er induktionsloven (Faradays lov) $-L \frac{dI}{dt} = V$ jo bare ligning (L-5) i forklædning.

Man kan derfor opfatte superlederen som vist på ækvivalentkredsløbet herunder, dvs. som en spole i parallel med en modstand.



Den superledende del af elektronerne har ingen modstand men en vis induktans L , mens den normale del af elektronerne har en modstand R i parallel med induktansen. Når det elektriske felt påtrykkes superlederen vil strømmen først få den normale del af elektronerne til at bevæge sig, men i løbet af kort tid har E-feltet accelereret de superledende elektroner op. Den karakteristiske tid for denne proces vil være

$$(L-7) \quad \frac{L}{R} = \frac{n_N \tau}{n_S} = \tau_J \approx \frac{1 \cdot 10^{-13} \text{ s}}{(T_c - T)/T_c}$$

hvor der efter sidste lighedstegn er indsat hvorledes $\frac{n_N}{n_S}$ afhænger af temperaturen og tillige indsat en typisk værdi for τ . En sådan typisk værdi for τ findes ved at bemærke, at

$$\vec{J}_N = \sigma \vec{E}, \text{ hvor konduktiviteten } \sigma = \frac{n_N e^2 \tau}{m}, \text{ dvs. at man kan skrive relaxationstiden}$$

(gennemsnitstiden mellem to kollisioner for en given elektron) τ som

$$\tau = \frac{m}{n_N e^2 \rho}, \text{ hvor } \rho \text{ er resistiviteten af stoffet. Typiske værdier for relaxationstiden ved 77 K ligger omkring } 1 \cdot 10^{-13} \text{ s}.$$

Perfekt diamagnetisme (Meissner-effekten)

London ligningen siger jo, at

$$\vec{J}_S = -\frac{n_S e^2}{m} \vec{A}$$

Hvis man tager rotationen på begge sider af denne ligning fås

$$(L-8) \quad \vec{\nabla} \times \vec{J}_S = -\frac{n_S e^2}{m} \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{n_S e^2}{m} \vec{B}$$

På den anden side har vi en af Maxwell ligningerne (Ampere's lov; uden om en strøm snor der sig et magnetfelt):

$$(L-9) \quad \vec{J}_S = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

og tager man rotationen på begge sider af ligningen fås

$$(L-10) \quad \vec{\nabla} \times \vec{J}_S = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \vec{B}$$

Sættes endvidere (L-10) lig med (L-8) fås:

$$(L-11) \quad \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = 0$$

hvor

$$(L-12) \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\mu_0 n_S e^2}{m}$$

Det er ikke svært at løse ovenstående differentiaalligning (L-11) i fx een dimension. Resultatet bliver at magnetfeltet aftager eksponentielt fra sin fulde værdi uden for superlederen, og den karakteristiske afstand over hvilken B-feltet aftager inde i superlederen er derfor givet ved λ , og

benævnes indtrængningsdybden. Typiske værdier for indtrængningsdybden er 100-1000 Å (afhængigt af temperaturen).

Meissnereffekten kan altså forstås ved, at når superlederen påtrykkes et magnetfelt, induceres der en afskærmningsstrøm i det yderste, tynde lag af superlederen og afskærmningsstrømmen er præcis så stor, at det magnetfelt som den danner, ophæver det påtrykte magnetfelt.

Endelig skal man bemærke, at man godt kan have perfekt konduktivitet (en "super-god leder", dvs. et materiale uden modstand) uden derfor at have Meissner-effekten. Se på nedenstående figur. En super-god leder vil når den bliver skubbet ind i et magnetfelt se et magnetfelt der ændrer sig, og derfor ifølge induktionsloven generere en strøm, der danner et magnetfelt, der modvirker det påtrykte felt. Hvis den super-gode leder derimod køles ned mens der er påtrykt et magnetfelt, vil der ikke være nogen ændring i magnetfeltet, og magnetfeltet vil derfor stadig gennemtrænge den super-gode leder. For en rigtig superleder skubbes magnetfeltet derimod ud af superlederen, i samme øjeblik som temperaturen når under den kritiske temperatur.

GINZBURG-LANDAU TEORIEN

Indledning

Ginzburg-Landau teorien blev udviklet af de russiske fysikere Vitaly Ginzburg og Lev Landau i begyndelsen af 1950'erne. Den er et mesterstykke i fysisk intuition. Baseret på de tidligere erfaringer fra London-ligningerne og det faktum at den superledende tilstand må være beskrevet ved en makroskopisk bølgefunktion, kunne Ginzburg og Landau ved en række snedige og meget generelle argumenter udlede en ligning, meget svarende til Schrödingerligningen for en elektron, som den makroskopiske bølgefunktion må adlyde.

Faseovergang og Ginzburg-Landau teori

Ved en faseovergang går et stof fra en mere symmetrisk fase (høj temperatur) til en mindre symmetrisk fase. Et eksempel kunne være flydende vand (tænk på vand i en kugle – det er rotationssymmetrisk). Når vandet fryser til is bliver det faktisk mindre symmetrisk (det mister sin rotationssymmetri). Der opstår pludselig (ved nul grader celsius) en retning, som vi kan beskrive ved en retningsvektor, en ordensparameter. Ved en (ferro)magnetisk faseovergang ordner atomernes spin, der ellers har peget i alle mulige retninger, og peger nu alle i samme retning. Her vil ordensparameteren være en vektor, der angiver magnetfeltets retning.

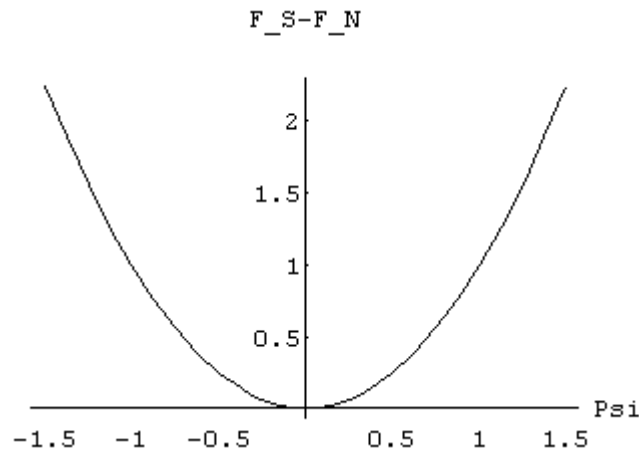
Når et stof bliver superledende, må det skyldes, at den superledende fase har en lavere energi end den normale, metalliske fase. Når den superledende tilstand indtræder ved en bestemt temperatur, får ordensparameteren, der karakteriserer den superledende tilstand, en værdi, der er forskellig fra nul. I superledning er ordensparameteren *den makroskopiske bølgefunktion*, som har en amplitude Ψ_0 og en fase φ :

$$(GL-1) \quad \Psi = \Psi_0 e^{i\varphi}$$

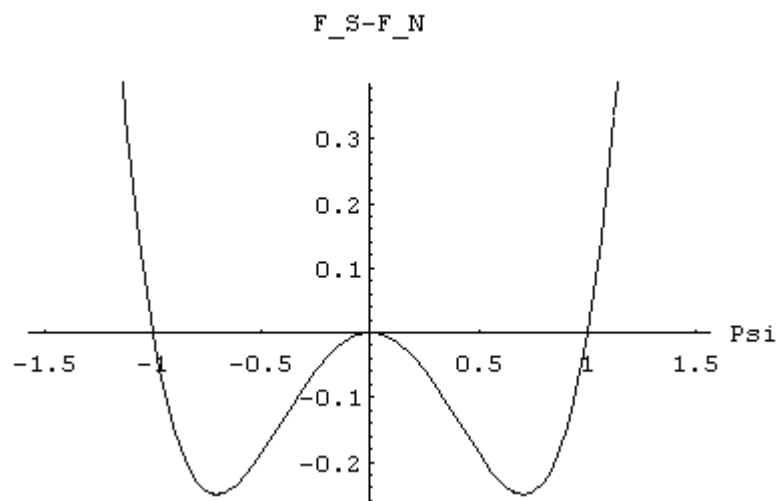
Tæt ved overgangstemperaturen må absolutværdien af ordensparameteren, $|\Psi|$, være lille. Hvis der ikke er nogen elektriske eller magnetiske felter i superlederen, må forskellen i energi mellem normaltstanden og den superledende tilstand da kunne skrives som en potensrække

$$(GL-2) \quad F_S - F_N = \alpha |\psi|^2 + \beta |\psi|^4$$

Man kan ikke benytte potenser af Ψ da energien skal være et reelt tal (man kan ikke slippe uden om dette ved at nøjes med at tage realdelen af Ψ , da energien i superlederen ikke kan afhænge af selve fasen). Man kan heller ikke benytte ulige potenser af $|\Psi|$, da sådanne vil resultere i et ufysisk ”knæk” i energiforskellen. Altså er der kun tilbage at benytte lige potenser af $|\Psi|$, og de to første led er angivet i formlen herover, og det vil være tilstrækkeligt hvis $|\Psi|$ er lille. Koefficienterne skal så bestemmes, men man skal huske på, at de afhænger af temperaturen.¹



Ginzburg-Landau energiforskellen for $T > T_c$ ($\alpha > 0$). For enkelheds skyld er det antaget at Ψ er reel.



Ginzburg-Landau energiforskellen for $T < T_c$ ($\alpha < 0$). Det ses, at energien nu er lavest for en værdi af Ψ som er forskellig fra nul; Den makroskopiske bølgefunktion (ordensparameteren) er derfor forskellig fra nul i den superledende fase, men nul i den normale fase (se foregående figur).

Desuden har vi fra kvantemekanikken det generelle udtryk for strømtætheden (her målt i A/m^2) [3]:

$$\vec{J}_s = \frac{e^* \hbar}{m^* i} (\psi^* \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla} \psi^*) - \frac{(e^*)^2}{m^*} |\psi|^2 \vec{A}$$

og indsættes udtrykket (GL-1) for den makroskopiske bølgefunktion, fås at strømtætheden bliver

(GL-6)
$$\vec{J}_s = \frac{e^* \hbar}{m^*} (\vec{\nabla} \phi) - \frac{(e^*)^2}{m^*} |\psi|^2 \vec{A}$$

e^* og m^* er parametre, der angiver ladning og masse af de superledende elektroner. Egentlig skulle man tro at det bare var e og m , som det er tilfældet for en fri elektron, men som Bardeen, Cooper og

Schrieffer viste, danner elektronerne par, så vi skal faktisk sætte $e^* = 2e$ og $m^* = 2m$, men det er ikke så afgørende for de følgende argumenter.

Lad os nu betragte det tilfælde hvor ψ er konstant og \vec{A} er lille. Vi kan fortolke $|\psi|^2$ som tætheden af superledende elektronpar, så $|\psi|^2 = \frac{n_s}{2}$ (vi er igen lidt bagkloge, og ved at elektronerne danner par). Antag endvidere, at der ikke er nogen ændring af fasen af den makroskopiske bølgefunktion gennem superlederen (superlederen er homogen). Så er det første led på højre side i (GL-6) nul (vi skal i afsnittet om Josephson-effekten se, at man også kan få en superstrøm, hvis første led i (GL-6) ikke er nul, mens andet led i (GL-6) er nul). Derfor følger af formel (GL-6), at

$$(GL-7) \quad \vec{J}_s = \frac{-(e^*)^2}{m^*} |\psi|^2 \vec{A} = -\frac{n_s (e^*)^2}{m} \vec{A}$$

... men det er jo Londons ligning (L-3)!

Fra eksperimenter ved man iøvrigt, at

$$n_s = n_0 \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \right) \approx n_0 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)$$

hvor \approx gælder for T under, men tæt på T_c og hvor n_0 er tætheden af superledende elektroner når $T \rightarrow 0$ (alle ledningselektroner vil så deltage). Ved hjælp af Ginzburg-Landau teorien kan vi forklare næsten alle de karakteristiske fænomener, der, udover perfekt konduktivitet og Meissner-effekt, optræder i superledning, fx kritisk strøm, Josephson-effekten, fluxkvantisering og kritisk magnetfelt (type I og type II superledere) og i det hele taget forstå superledning som en faseovergang.

Perfekt konduktivitet (superledning)

Da (GL-7) jo netop gav Londons ligning (L-3), kan vi forklare den perfekte konduktivitet ved at følge det allerede givne argument i London-afsnittet.

Perfekt diamagnetisme (Meissner-effekten)

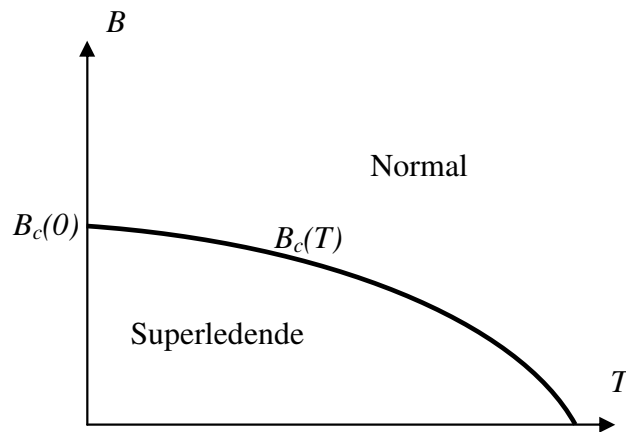
Ligning (GL-7) gav jo netop London ligningen (L-3), så vi kan bare følge det under London-afsnittet allerede givne argument for at forklare Meissner-effekten!

Kritisk magnetfelt

Når man lægger et magnetfelt hen over superlederen vil den for ikke for kraftige magnetfelter skubbe magnetfeltet væk. For et vis kritisk værdi af magnetfeltet, B_c , vil det ikke energimæssigt kunne betale sig for superlederen at holde magnetfeltet ude, og den bliver i stedet normal. Fra eksperimenter ved man, at det kritiske magnetfelt afhænger på følgende måde af temperaturen (når $T < T_c$):

$$B_c = B_c(0) \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right)$$

hvor $B_c(0)$ er det kritiske magnetfelt for $T \rightarrow 0$ (se figur herunder).



Superledere kan deles i to hovedtyper, afhængigt af hvorledes de reagerer på kraftige magnetfelter. Type I superledere bliver simpelthen normale når en bestemt værdi, B_{c1} , af det kritiske felt nås. Type II superledere forbliver superledende også for felter over B_{c1} . Der sker en delvis indtrængning af magnetfeltet i små fluxlinjer (hver med et fluxkvantum igennem sig), der sidder ordnet i et trekantsmønster. Omkring fluxlinjerne er der afskærmningsstrømme. For en større kritisk felt, B_{c2} , bliver også type II superledere normale. De nye høj-temperatur superledere er type II.

Kritisk strøm

Når man øger strømmen gennem superlederen, øges også det af strømmen dannede magnetfelt. For en bestemt værdi af strømmen bliver det dannede magnetfelt større end det kritiske felt, og superlederen holder op med at være superledende, og går over i den normale tilstand. Fra Ginzburg-Landau teorien kan man udlede en formel for den kritiske strømtæthed i en

superleder. Svaret er, at $J_c = J_c(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}}$, hvor $J_c(0)$ er den kritiske strøm når $T \rightarrow 0$. Hvis T

er lige under T_c kan man benytte tilnærmelsen $J_c \approx J_c(0) \left(1 - \frac{3}{2} \frac{T}{T_c}\right)$.

JOSEPHSON-EFFEKTEN

Josephson effekten ud fra Ginzburg-Landau teori

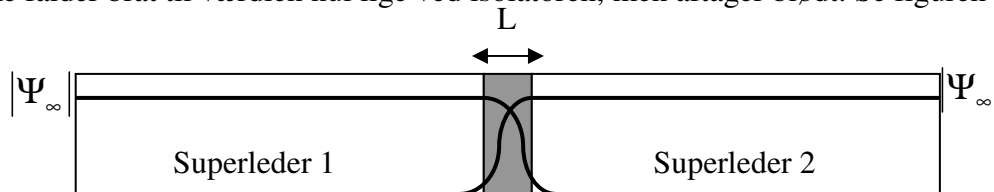
Vi ser på to superledere, der er adskilt fra hinanden ved et tyndt lag af en isolator (typisk 10-20 Å tykt). Klassisk set skulle det ikke være muligt at få en strøm gennem en sådan forbindelse, men pga. den kvantemekaniske tunneleffekt [3] kan det alligevel lade sig gøre. Endnu mere bemærkelsesværdigt er det, at man også kan få en superledende strøm gennem barrieren. En sådan forbindelse mellem to superledere har også en række andre bemærkelsesværdige egenskaber, som blev opdaget i starten af 1960'erne af bl.a. englænderen Brian Josephson og amerikaneren Philip Anderson.

De to superledere må hver have en makroskopisk bølgefunktion:

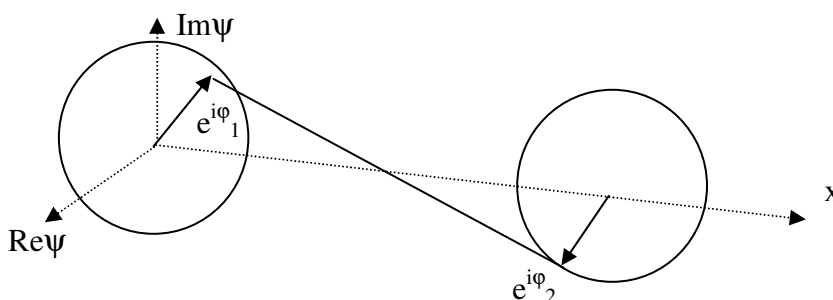
$$(J-1) \quad \Psi_1 = |\Psi_\infty| e^{i\varphi_1} \text{ for den venstre superleder og}$$

(J-2) $\Psi_2 = |\Psi_\infty| e^{i\varphi_2}$ for den højre superleder.

På grund af den kvantemekaniske tunneleffekt er der en endelig sandsynlighed for at elektronpar kan tunnelere igennem den isolerende barriere. Man kan forstå det ved at ordensparameteren har ikke falder brat til værdien nul lige ved isolatoren, men aftager blødt. Se figuren herunder:



Hvis der skal være en blød overgang fra den ene superleder til den anden, skal de to bølgefunktioner hægtes pænt sammen, fx. som:



(J-3) $\Psi(x) = (1 - \frac{x}{L})\Psi_1 + \frac{x}{L}\Psi_2$

Strømmen kan nu beregnes via det generelle udtryk for den kvantemekaniske sandsynlighedsstrøm (se (GL-6)):

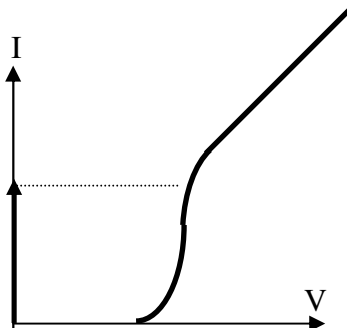
(J-4) $J_s = \frac{e\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) = \frac{e\hbar}{m} |\Psi_\infty|^2 \frac{1}{L} \sin \Delta\varphi$

det vil sige

(J-5) $J_s = J_0 \sin \Delta\varphi$, hvor $J_0 = \frac{e\hbar}{m} |\Psi_\infty|^2 \frac{1}{L}$

hvilket er den første Josephson-ligning.

Den siger, at man kan få en superstrøm gennem en kontakt bestående af to superledere som er adskilt af et ikke for tykt isolatorlag. Bemærk, at superstrømmen løber mellem de to superledere, uden at der er påtrykt nogen spænding V over kontakten. Dette kaldes også dc-Josephson effekten.



I-V karakteristisk, der viser dc Josephson effekten (en strøm løber for $V=0$). For større spændinger V opfører Josephsonkontakten sig som en sædvanlig modstand.

Hvad sker der nu, hvis vi påtrykker en spændingsforskel V hen over kontakten? Ja, så vil elektronerne i et Cooperpar have højere energi på ene side af kontakten end på den anden. Energiforskellen vil være $E = qV = 2eV$.

Fra kvantemekanikken vides [2],[3], at bølgefunktionens tidsafhængighed helt generelt kan skrives som

$$(J-6) \quad \Psi(t) = \Psi_0 e^{-iEt}$$

hvor E er energien, som vi i dette tilfælde så var

$$(J-7) \quad E = 2eV$$

Vi får derfor, at

$$(J-8) \quad \Psi = \Psi_0 e^{i\Delta\phi} = \Psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}Et}$$

og da eksponenterne i eksponentialfunktionen skal være ens fås, at

$$(J-9) \quad \Delta\phi = \frac{2eV}{\hbar}t,$$

således at man ved differentiation får

$$(J-10) \quad \frac{d\Delta\phi}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}$$

hvilket er *den anden Josephson ligning*.

Den fysiske fortolkning af denne ligning er, at faserne i hver superleder drejer rundt, men ikke med samme frekvens. Der opstår derfor en tidsafhængig faseforskel, så den resulterende strøm gennem kontakten er skiftevis rettet mod venstre og mod højre, altså en vekselstrøm. En påtrykt dc-spænding resulterer derfor i en ac-vekselstrøm. Dette kaldes også ac-Josephson effekten. Det kan nemt ses at der fremkommer en vekselstrøm, når man indsætter ligning (J-9) i ligning (J-5), hvorved fås

$$(J-11) \quad J = J_0 \sin\left(\frac{2eV}{\hbar}t\right) = J_0 \sin(\omega_J t)$$

Frekvensen $\omega_J = \frac{2eV}{\hbar}$ benævnes Josephsonfrekvensen. For en spænding på $1 \mu V$ er denne frekvens 483,6 MHz.

Da der er tale om superledende elektroner er der ikke nogen modstand og dermed intet energitab ved selve transporten af Cooperparret fra den ene kontakt til den anden, så energigevinsten $2eV$ ved hele tiden ved hjælp af vekselspændingen at flytte et Cooperpar frem og tilbage igennem kontakten må selvfølgelig dukke op et eller andet sted, og vi forventer (lidt på samme måde som en elektron der springer fra et energiniveau til et andet) at det må være i form af en foton. Fra kontakten vil der derfor blive udsendt mikrobølgefotoner. I praksis er disse svære at detektere, da effekten hvormed fotonerne udsendes er ret lille. Det lykkedes dog at se effekten et par år efter Josephsons teoretiske forudsigelse.

Man kan også undersøge hvad der sker, hvis man lægger en vekselspænding over kontakten oven i den konstante dc-spænding dvs. $V = V_1 \cos \omega_1 t + V_0$. Indsættes nu dette udtryk i (J-5) fås

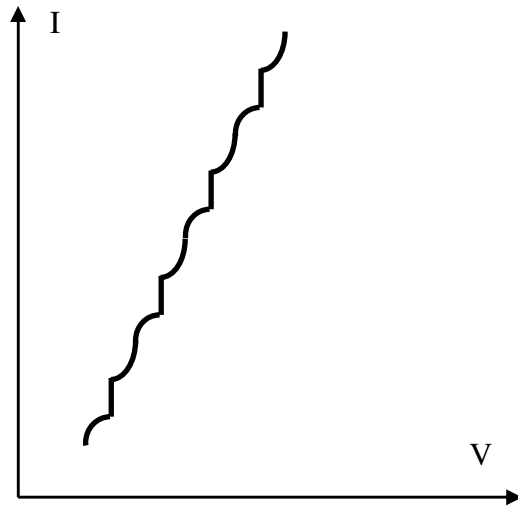
$$(J-12) \quad \Delta\phi(t) = \omega_J t + \frac{2eV_1}{\hbar\omega_1} \sin(\omega_1 t) + \phi_0$$

Hvis ovenstående udtryk for faserne indsættes i formlen den første Josephson ligning, J-fås

$$(J-13) \quad J = J_0 \sin\left(\omega_J t + \frac{2eV_1}{\hbar\omega_1} \sin(\omega_1 t) + \phi_0\right) = \sum_n J_0 J_n (2eV_1 / \hbar\omega_1) \sin(\omega_J t \pm n\omega_1 t + \phi_0)$$

hvor $J_n(x)$ er den ordinære Besselfunktion af n 'te orden (*ikke* at forveksle med den maksimale superstrøm J_0 !) og hvor vi ved det sidste lighedstegn har benyttet en formel, der gælder for ordinære Besselfunktioner [7]. Resultatet betyder at Josephson-kontakten blander multipla af den påtrykte frekvens med den for kontakten karakteristiske Josephson-frekvens ω_J . Specielt kan man betragte tilfældet $\omega_J = n\omega_1$: se på det sidste led i (J-13). Det vil da ikke afhænge af tiden, og der vil være en dc-superstrøm! Superstrømmen vil have størrelsen $J_0 J_n(2eV_1 / \hbar\omega_1) \sin(\phi_0)$ og der vil være en konstant superstrøm hver gang betingelsen $\omega_J = n\omega_1$ er opfyldt. Dette sker for spændinger, der opfylder betingelsen

(J-14) $V = \frac{n\hbar\omega_1}{2e}$. For en bestemte værdier af spændingen V fås altså en konstant strøm, selv om der er påtrykt en vekselspænding!



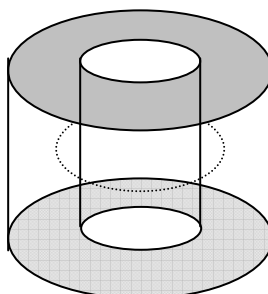
Den inverse ac Josephson effekt: For bestemte værdier af V ($V = \frac{n\hbar\omega_1}{2e}$) opnås en konstant superstrøm.

Med Josephsoneffekten har vi nu endelig fået et "håndtag" hvormed vi kan hive og trække i ordensparameterens fase. Se fx på ligning (J-9). Her er spændingen V direkte koblet til faseforskellen mellem de to superledere, og ved at regulere V , kan vi påvirke ordensparameterens fase.

FLUXKVANTISERING

Ligning (GL-6) gemmer i sig et fænomen, der er næsten lige så bemærkelsesværdigt som Meissnereffekten.

Betragt en ringformet superleder som vist på figuren herunder. Integrerer rundt langs en vej der ligger dybt inde i selve superlederen (hvor B -feltet er nul) og som omslutter hullet i ringen (den stiplede linje på figuren). Da afskærmningsstrømmen løber i det yderste, tynde lag af superlederen, må der gælde at



$$(F-1) \quad 0 = \oint \vec{J}_s \cdot d\vec{r} = \oint \left(\frac{2e^2}{m} \vec{A} + \frac{e\hbar}{m} \vec{\nabla} \varphi \right) \cdot d\vec{r}$$

Vi har derfor pga. Stokes sætning (se reference [2] eller [4]), at

$$(F-2) \quad \int \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi$$

Her er Φ den magnetiske flux, der omslutes af ringen.

Da bølgefunktionen kun kan have en bestemt værdi i et givet punkt, må bølgefunktionens fase ændres med 2π hver gang man går en tur rundt:

$$(F-3) \quad \oint \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{r} = \Delta \varphi = 2\pi n,$$

hvor n er et helt tal. Hvis ligning (F-2) og (F-3) kombineres, fås slutresultatet

$$(F-4) \quad |\Phi| = \frac{nh}{2e} = n\Phi_0$$

Størrelsen Φ_0 benævnes fluxkvantet. Det ses, at den magnetiske flux, der gennemtrænger superlederen, kun kan antage bestemte heltallige værdier (multipla af fluxkvantet) !

Fluxkvantisering er blevet observeret i både konventionelle superledere og højtemperatur superledere, og det er et af de bedste beviser på, at man skal benytte en kompleks ordensparameter, når man skal beskrive en superleder.

[1] Michael Tinkham: "Introduction to Superconductivity", McGraw-Hill Int. (1975)

[2] Richard Feynman: "The Feynman Lectures in Physics I-III",

[3] Morten Scharff: "Introduktion til kvantemekanik", Akademisk forlag (1971)

[4] Reitz, Milford and Christie "Foundations of Electromagnetic Theory), 3.ed, Addison-Wesley (1979)

[5] Per Hedegård: "Forenede elektroner A/S", Nysyn Serien (1991)

[6] L. Solymar and D. Walsh: "Lectures on the Electrical Properties of Materials", 2.ed, Oxford University Press (1979)

[7] A. Barone, G. Paterno: "Physics and Applications of the Josephson Effect", Wiley and Sons (1984), s. 292

¹ Hvis superlederen er i et magnetfelt bliver udtrykket for energiforskellen lidt mere kompliceret:

$$F_S - F_N = \alpha |\psi|^2 + \beta |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e^* \vec{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Den frie energi kan minimeres mht. $|\psi|$, hvilket resulterer i Ginzburg-Landau ligningen (vi kan dog ikke bare differentiere løs. Der er her tale om et såkaldt variationsregningsproblem. Vi vil ikke diskutere det nærmere her, men et overskueligt, gennemregnet eksempel kan findes i reference [6]):

$$(GL-4) \quad \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e^* \vec{A} \right)^2 \Psi = 0$$

Hvis man flytter lidt rundt på leddene i ligningen ser den sådan ud:

$$(GL-5) \quad \frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e^* \vec{A} \right)^2 \Psi = (\alpha + \beta|\Psi|^2) \Psi$$

som det ses minder ligningen en hel del om Schrödinger-ligningen (hvis man ser bort fra β -leddet og identificerer α med E er den faktisk magen til Schrödinger-ligningen). Man kan nu løse denne ligning i en hel række forskellige situationer og derved finde ud af hvordan superlederen opfører sig. Bl.a. kan man i detaljer undersøge hvorledes magnetfeltet delvis trænger ind i superlederen i type II superledere.