

Vejledende eksempler på opgaver i kosmologi

Denne samling med vejledende opgaver i kosmologi er udarbejdet af Opgavekommissionen i fysik med henblik på det standardforsøg med nyt fagbilag for fysik på højt niveau, som afvikles i perioden 2003-2007. Fagbilaget er tilgængeligt på Undervisningsministeriets netsted på adressen

<http://us.uvm.dk/gymnasie/almen/projekter/fysik.htm?menuid=150530>

Opgaverne til forsøgseksamen stilles under forudsætning af eksaminanderne råder over en grafisk lommeregner som TI-83 og lignende samt *Databog fysik kemi*, 6. udgave eller senere.

Der er til brug ved forsøgeksaminerne udarbejdet et Kompendium i fysik, 5. udgave, som beskriver de formler, der forudsættes kendt og den terminologi, opgavekommissionen benytter. Yderligere formler og anden teori kan inddrages i opgaverne, men vil så altid fremgå af opgaveteksten. Værdier for naturkonstanter m.m. forventes eksaminander at slå op i *Databog fysik kemi*, idet dog en nødvendig værdi for Hubblekonstanten altid vil fremgå af opgaveteksten. Kompendiet er tilgængeligt som netpublikation på UVMS netsted.

Samlingen er et supplement til de tidligere offentliggjorte eksempler på opgaver, der lægger op til anvendelse af it-hjælpemidler som den grafiske lommeregner.

Carsten Claussen
Fagkonsulent i fysik
oktober 2003

1. Afstand til galakse

I spektret fra en galakse i stjernebilledet Store Bjørn har man observeret en spektrallinje med bølglængden 414,12 nm. Denne spektrallinje stammer fra calcium og har laboratoriebølglængden 393,37 nm.

- a) Beregn galaksens nuværende hastighed væk fra os.

I denne opgave sættes Hubblekonstanten til $H_0 = 19,3 \frac{\text{km/s}}{10^6 \text{ lysår}}$.

- b) Bestem den nuværende afstand til galaksen.

2. Det tidlige Univers

I en Big Bang-model for Universet er skalafaktoren $R(t)$ i de første år givet ved

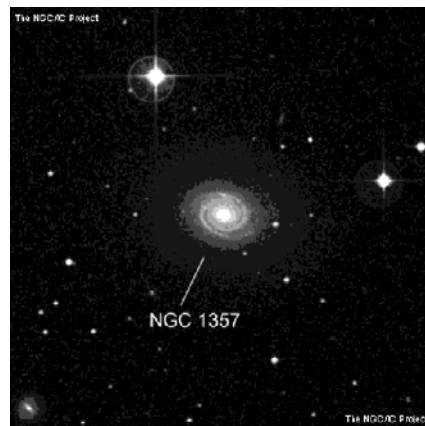
$$R(t) = \sqrt{\frac{t}{3,10 \cdot 10^{19} \text{ s}}},$$

hvor t er Universets alder.

På et tidspunkt i Universets første dage var dets temperatur faldet til 15 millioner kelvin. Det er omtrent samme temperatur, som der nu er i det indre af Solen.

- c) Eftersis, at skalafaktoren var $1,82 \cdot 10^{-7}$, da Universets temperatur var 15 millioner kelvin. Bestem, hvilken alder Universet ifølge modellen havde ved denne temperatur.

3. Universets alder



Den nære galakse NGC 1357 vides at have diametren 72 tusinde lysår, og dens vinkeludstrækning på himlen er $8,1 \cdot 10^{-4}$ radian.

a) Beregn afstanden til galaksen NGC 1357.

I spektret fra galaksen NGC 1357 måles bølgelængden for en spektrallinje til 396,01 nm. Denne spektrallinje stammer fra calcium og har laboratoriebølgelængden 393,37 nm.

b) Beregn rødforskydningen z for galaksen NGC 1357.
Beregn endvidere hastigheden af galaksen NGC 1357.

Galaksen NGC 1357 tilhører en klasse af nære galakser, som alle har en omtrentlig diameter på 72 tusinde lysår. Tabellen viser sammenhørende værdier for afstanden og rødforskydningen z for et udvalg af disse galakser.

Galakse nr.	1	2	3	4	5	6
Afstand / mio. lysår	23,1	26,7	31,4	34,3	39,7	47,0
Rødforskydningen z	0,00202	0,00185	0,00332	0,00242	0,00299	0,00383

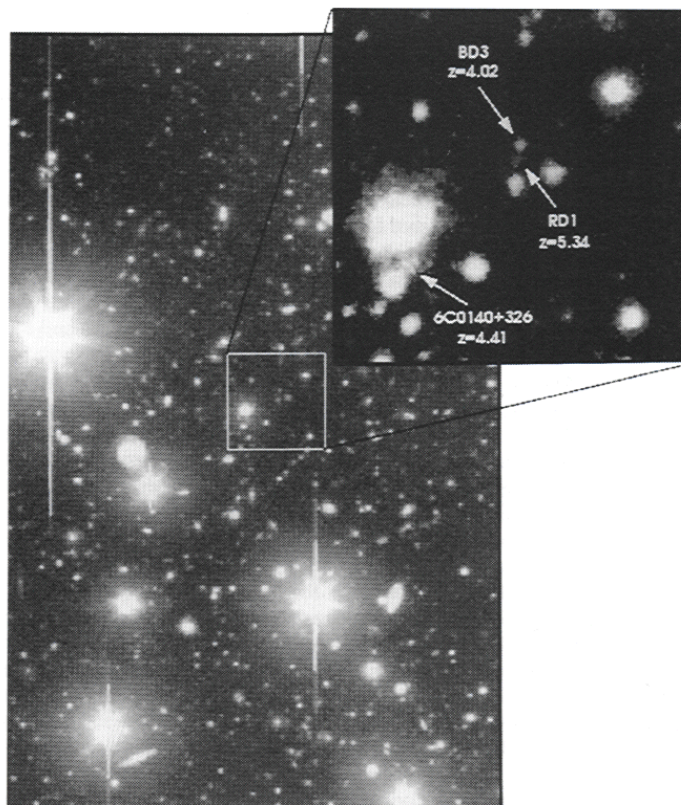
Galakse nr.	7	8	9	10	11
Afstand / mio. lysår	52,9	72,2	88,4	96,0	99,8
Rødforskydningen z	0,00387	0,00493	0,00678	0,00803	0,00793

c) Bestem ved hjælp af tabellen en værdi for Hubblekonstanten H_0 .

I en simpel model for Universets udvidelse bevæger alle galakser sig til alle tider med *konstant* hastighed.

d) Forklar, hvordan man inden for denne model kan bestemme Universets alder t_0 .
Bestem herudfra en værdi for t_0 .

4. Galaksen RD1



På det viste udsnit af himlen ses tre galakser med store rødforskydninger. Galaksen RD1 havde en kort overgang rekorden som det fjerneste kendte objekt i Universet.

I spektret fra galaksen RD1 har man observeret en spektrallinje med bølgelængden 4160,8 nm. Denne spektrallinje stammer fra hydrogen og har laboratoriebølgelængden 656,28 nm.

- a) Gør rede for, at galaksen har rødforskydningen $z = 5,34$.

I en model for Universets udvidelse er skalafaktoren

$$R(t) = 0,452 \cdot \left(e^{\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{a}} \right)^2,$$

hvor $a = 10,77$ mia. år, og t er Universets alder.

- b) Beregn Universets nuværende alder ifølge modellen.

Den nuværende afstand til RD1 er 26,6 milliarder lysår.

- c) Bestem ved hjælp af modellen galaksens hastighed, da Universet var 10 mia. år gammelt.
- d) Gør rede for, at rødforskydningen $z = 5,34$ ifølge modellen netop svarer til, at den nuværende afstand til galaksen RD1 er 26,6 milliarder lysår.

Et eksempel på en besvarelse af opgaven "Universets alder"

Spørgsmål a)

Idet det oplyses, at NGC 1357 er en *nær* galakse, kan relationen $d_0 = r_0 \cdot \theta$ anvendes til at bestemme galaksens nuværende afstand r_0 :

$$r_0 = \frac{d_0}{\theta} = \frac{72 \cdot 10^3 \text{ lysår}}{8,1 \cdot 10^{-4}} = 8,89 \cdot 10^7 \text{ lysår}$$

Spørgsmål b)

Rødforskydningen for NGC1357 findes ved at indsætte i formlen $z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{lab}}}{\lambda_{\text{lab}}}$:

$$z = \frac{(396,01 - 393,37) \text{ nm}}{393,37 \text{ nm}} = 0,00671$$

Eftersom denne værdi af z er meget mindre end 0,1, var det rimeligt at anvende relationen $d_0 = r_0 \cdot \theta$ i spørgsmål a). Af samme grund kan relationen

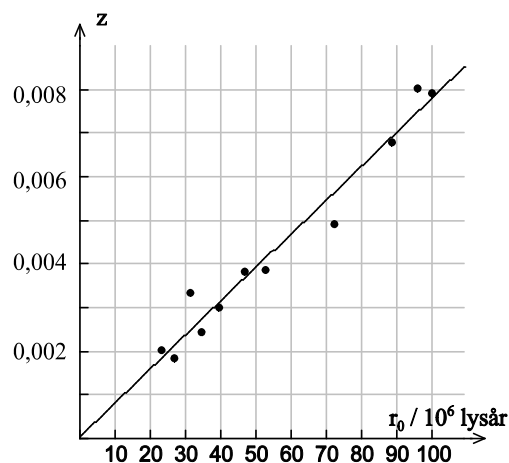
$v_0 = c \cdot z$ bruges til at beregne galaksens nuværende hastighed v_0 :

$$v_0 = 3,00 \cdot 10^8 \cdot 0,00671 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,01 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Spørgsmål c)

På figuren ses en (r_0, z) -graf af tabellens værdier. Det ses, at punkterne tilnærmelsesvis ligger på en *ret* linje gennem (0,0). Den bedste rette linje gennem målepunkterne er indtegnet. Ud fra dette er det rimeligt at konkludere, at r_0 og z er proportionale. Forklaringsgraden ved lineær regression på (r_0, z) bliver $r^2 = 0,9642$ (altså tæt på 1).

Rødforskydningen z som funktion af afstanden r_0



Lineær regression på (r_0, z) giver: $a = 7,77419 \cdot 10^{-5}$ og $b = 3,91648 \cdot 10^{-5}$

Enhed for b : Ingen.

Enhed på a : $\frac{1}{10^6 \text{ lysår}}$.

Af ovenstående følger:

$$z = 7,774 \cdot 10^{-5} / (10^6 \text{ lysår}) \cdot r_0 = 7,774 \cdot 10^{-11} / \text{lysår} \cdot r_0$$

Sammenholdes dette med Hubbleloven

$$v_0 = H_0 \cdot r_0 = c \cdot z \Leftrightarrow z = \frac{H_0}{c} \cdot r_0$$

ses, at

$$\frac{H_0}{c} = 7,774 \cdot 10^{-11} / \text{lysår} \Leftrightarrow H_0 = \frac{7,774 \cdot 10^{-11} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{9,47 \cdot 10^{15} \text{ m}} = 2,46 \cdot 10^{-18} / \text{s}$$

Dagens bedste bud på Hubblekonstanten er $2,30 \cdot 10^{-18} / \text{s}$. Ovenstående beregnede værdis afvigelse er dermed $(2,46 - 2,30) / 2,30 = 7,0 \%$.

Spørgsmål d)

Hvis hastigheden v_0 af den enkelte galakse i Universet altid har været konstant, så vil r_0/v_0 for den enkelte galakse angive den tid, som galaksen har været om at gennemløbe strækningen r_0 . Ifølge Hubbleloven $v_0 = H_0 \cdot r_0$ er dette forhold ens for alle galakser og lig med $1/H_0$.

$$\frac{1}{H_0} = \frac{1}{2,46 \cdot 10^{-18} / \text{s}} = 4,07 \cdot 10^{17} \text{ s} = \frac{4,07 \cdot 10^{17}}{3600 \cdot 24 \cdot 365,25} \text{ år} = 1,29 \cdot 10^{10} \text{ s}$$

Ifølge antagelsen om konstante galaksehastigheder var alle galakser altså for 12,9 mia. år siden samlet i ét punkt.

Eller sagt på en anden måde: Der er gået **12,9 mia. år** siden Big Bang.