STUDIERETNINGSPROJEKTER I MATEMATIK OG HISTORIE

OPLÆG AF:

Arn Bjørnsfeldt (historie, idræt)

Bjørn Felsager (matematik, fysik)

Brian M.V. Olesen (matematik, idræt)

5. september 2007

Udarbejdet på opfordring fra fagkonsulenterne for matematik og historie

Forord:

Nærværende oplæg om studieretningsprojekter i matematik og historie er resultatet af de overvejelser vi har gjort os i en arbejdsgruppe bestående af to matematiklærere og en historielærer fra Haslev Gymnasium og HF nedsat på foranledning af fagkonsulenterne. Det er vores håb at hæftet kan tjene som inspiration for vores kolleger over det ganske land, der nødvendigvis må have brug for at gøre sig tilsvarende overvejelser i forbindelse med lanceringen af studieretningsprojektet som en af nyskabelserne i gymnasiereformen. Selv om arbejdsgruppen er nedsat på foranledning af fagkonsulenterne og vi har haft anledning til løbende at drøfte oplægget med dem er det selvfølgelig klart at de holdninger/synspunkter vi giver udtryk for i oplægget ikke kan opfattes som udtryk for fagkonsulenternes holdninger og synspunkter og at de derfor ikke har nogen form for officiel status.

Indholdsfortegnelse

1. Indledning

En opdeling i (matematikhistoriske) perioder giver mulighed for en samlet introduktion. De enkelte matematiske emner giver mulighed for en individuel problemstilling.

Når en elev skal skrive studieretningsprojekt i matematik kombineret med historie må matematik nødvendigvis være et studieretningsfag på A-niveau[1] (som eleven eventuelt kan have som valgfag i en studieretning, hvor matematik kun er ført igennem til B-niveau). Studieretningsprojektet tager derfor udgangspunkt i matematik på A-niveau.

Hvilke konsekvenser har det nu? Hvis vi kigger på emnerne i A-niveauet: Rumgeometri, vektorregning, videregående integralregning og differentialligninger, kan man selvfølgelig sagtens skrive projekter om nogle af disse emner i et historisk lys. Såvel rumgeometri, som rumfangsbestemmelser har dybe historiske rødder, der går mindst to tusinde år tilbage. Men det vil være noget fattigt, hvis et af disse emner nødvendigvis *skal* være inkluderet i projektet. I reformens ånd er det da også snarere de generelle kompetencer eleven har erhvervet sig end de emner eleven nu tilfældigvis beskæftiger sig med i 3g, hvor projektet skrives, der er afgørende for om projektet kan siges at være dækkende for matematik på A-niveau. Studieretningsprojektet skal derfor udvise et kendskab til matematisk metode og udvise et overblik over emnet som man med rette kan forvente af en elev på A-niveau. Man skal altså hæfte sig ved, at de faglige mål for A-niveauet såvel handler om bestemte matematiske emner som overordnede kompetencer.

Der er flere muligheder for en historisk indfaldsvinkel:

Det kan dreje sig om en bestemt matematiker eller om et bestemt emne/tema som belyses i et historisk perspektiv med passende inddragelse af historiske kilder og historiske metoder. Eleverne skal i historie vise, at de har indsigt i konkrete begreber og begivenheder i fortiden, som har betydning og relevans for emnet. Samt kunne forklare de historiske baggrunde for de samfund, som emnet omhandler. Det er her vigtigt at fastslå, at det kan enten være stats- eller institutionshistorien, og/eller kulturhistorisk, mentalitetshistorisk, personhistorisk eller idéhistorisk baggrunde.

Eleverne skal dog ikke kun arbejde på det redegørende plan, men endvidere kunne analysere og diskutere/vurdere sammenhænge. Det kan fx gøres ved at belyse samspillet mellem samfundet og den matematiske udvikling i tid og rum.

Man kunne da naivt forestille sig at man ligefrem kunne begrunde historisk, hvorfor netop denne matematiker gjorde netop disse opdagelser i denne historiske periode med udgangspunkt i samfundsudviklingen osv. Men en sådan direkte årsagssammenhæng mellem de historiske omgivelser og matematikkens udvikling i den pågældende periode er ikke altid klart til stede. I en tilsvarende sammenhæng, hvor diskussionen vedrører cen-

[1] Med mindre der er tre fag involveret, for så kan matematik godt indgå på B-niveau i samarbejde med et andet studieretningsfag på A-niveau, fx fysik på A-niveau. Nogle af de emner vi i det følgende berører, vil udmærket kunne bruges i et sådant trefagligt projekt. Men så er matematik altså ikke længere udgangspunktet for projektet.

trale naturvidenskabelige eksperimenter skriver videnskabshistorikeren Rom Harré således[2]:

> ... Historical and philosophical studies of science should not only relate experiments to theories, but also to the social and cultural background within which they were conceived. Social influences, such as the economic demands of an epoch, not only direct the interest of the scientific community to one class of problems rather than another, but they have some influence too on the images of the world that lie at the foundations of theories. Some social historians of science have argued that such 'external' factors may even influence the very criteria by which experiments are judged successful and unsuccessful and theories true or false.
>
> While common sense must support the idea that there are a host of influences between a society and its science, it has proved very difficult to trace these influences in concrete form. The task is formidable. One has not only to find a way of expressing the central themes of a period, but to develop plausible social psychological hypotheses about the relation between these themes, their unfolding to the active minds of a period, and the process of creation itself. So far no one has succeeded in bringing off a really plausible study of concrete scientific work in its specific social setting to show the influences at work. Each experiment described in this book would need its own treatise to relate it to the social conditions of the times in which it seemed good to its performer to carry it out. ...

Det vil derfor være afgørende om eleven tilsvarende ikke kun har fokus på mennesket som historieskabt, men også fokus på mennesket som historieskabende. Altså hvilken indflydelse en bestemt teori eller videnskabsmand kan have haft på den efterfølgende historiske udvikling.

Desuden skal der som et minimum vises sans for de kildekritiske metoder, som faget historie har, hvilket sjældent kan gøres uden at der konkret arbejdes med historisk materiale.

Disse kilder kan enten være primære, dvs. originale skrifter af den pågældende matematiker i en passende oversættelse, og i heldigste fald dansk, men ofte vil det kun være muligt at finde passende oversættelser til primært engelsk. Men de kan også være sekundære, fx hentet fra oversigtsværker om matematikkens historie eller kommenterede tekster om den pågældende matematikers arbejder osv.

Et problem med arbejde med kildemateriale (originaltekster) → kildekritiske metoder er, at meget af materialet er på engelsk. Meget af det materiale der findes på dansk er kun fortolkninger (bearbejdninger) af kildemateriale.

[2] Rom Harré: Great Scientific Experiments, Dover Publications inc, 2002, p 7-8.

Oversigt over de historiske perioder

Når man skal finde egnede emner til studieretningsprojekter med matematik og historie kan man have glæde af generelle værker i området mellem egentlig matematik/matematikhistorie og egentlige historiebøger[3]. Særlig anbefalelsesværdig er den nye store idehistorie i 3 bind på knap 2400 sider.

Tankens magt Redaktion: *Hans Siggaard Jensen, Ole Knudsen og Frederik Stjernfelt* Lindhart og Ringhof, 2006

Her gennemgås de forskellige historiske perioder, her eksemplificeret med 1600-tallet:

Modernitetens fødsel: 1600-1700

Indledning

TEKNOLOGI: Geometrisk rationalitet

Krigsskibe, kommandostrukturer og kanaler – Søfartens udvikling – Militærets standardisering – Forbedringer i infrastrukturen

NATURVIDENSKAB: Den naturvidenskabelige revolution

Offentlig eksperimentel videnskab – Arven fra renæssancen: eksperimentel animisme – Den mekanistiske naturfilosofi – Verdensbillede og mekanik: Kepler og Galilei – Verdensbillede og mekanik: Descartes og Huygens – Verdensbillede og mekanik: Newton – Matematik: Analytisk geometri og infinitesimalregning – Sandsynlighedsregningens begyndelse – Den eksperimentelle filosofis triumf: Luftens tryk – optik og farveteori – Biologi: Botanik og blodskredsløb – Mikroskopisk biologi: Opdagelsen af sædceller

POLITIK OG RET: Absolutisme og frihed

Grotius: Naturret og international ret – Sædvaneret og borgerret: Bill of rights – Den engelske borgerkrigs radikalister: Fribårne rettigheder – Hobbes og Pufendorf: Staten som suveræn og den almene lov – Locke: Uafhændelige rettigheder

ÆSTETIK OG KUNST: Billedernes magt

Barok, klassik og akademier – Dennesidighed og forgængelighed – Retorik og stilbevidsthed: Patos og universalisme – Bizarrerier: Lokale former indfældet i tid – Lys, skygge og farve: Zuccarros æstetik – Caravagios chiaroscuro – Drøm og skarpsindighed: Tesauro, Gracián, Marino og Gongora – Lovprisning af hverdagen: Pikaresk roman, interiør og stilleben – Absolutismen og fransk, akademisk klassicisme – Regler og regelløshed: ophøjethed og borgerlig sensibilitet

MENNESKE, SPROG OG SAMFUND: Universel problemløsning

Nyt curriculum og ikke-religiøs samfundstænkning – Universel problemløsning: Descartes' Mathesis Universalis – Universel problemløsning: Leibniz' Characteristica Universalis – Fra logik til erfaringsbaseret videnskab

FILOSOFI: Metafysik som systematisk projekt

Den cartesianske revolution – Jeg tænker, altså er jeg – Det cartesianske verdensbillede – Den moderne videnskab som filosofiens arvtager – Malebranche og Spinoza: okkasionalisme og monisme –Fra Locke til Leibniz – intellektets ideer, virkelighedens monader – 1600-tals filosofiens plads i idehistorien

RELIGION OG TEOLOGI: Jesuitter, modreformation, pietister og puritanere

Ortodoksiens storhedstid i protestantismen – Striden om den dobbelte prædestination og treenighedslæren – Modreformationen og dannelsen af jesuitterordenen – Kritikken af modreformationen – Pietister og reformerte imod alliancen mellem teologi og fyrstemagt – Puritanerne i Nordamerika – Ramismen: De reformertes autoritet – Spener og kvækerbevægelsen

[3] Tilsvarende gælder selvfølgelig også for de øvrige naturvidenskabelige studieretningsfag i samarbejde med historie, hvor man fx kan hente megen inspiration i **Skruen uden ende** – Den vestlige teknologis historie, Keld Nielsen, Henry Nielsen og Hans Siggaard Jensen, Nyt teknisk forlag.

Denne bog er ikke blot en gave til almen studieforberedelse, men også til studieretningsprojekter, hvori historie indgår, fordi den så at sige kan bygge bro mellem historie og de andre fag. I tilfældet matematik indgår der dels direkte afsnit om matematikkens udvikling (de grå afsnit under Naturvidenskab om analytisk geometri, infinitesimalregning og sandsynlighedsregning). Men også en række af de andre afsnit om Naturvidenskab, Æstetik og Kunst samt Menneske, Sprog og Samfund indeholder emner med klare berøringsflader til matematik. Det er selvfølgelig oplagt inden for de naturvidenskabelige emner, men inden for billedkunst er det værd at nævne ovaler og ellipser som et yderst interessant matematisk tema i forbindelse med barokken, ligesom det er i denne periode, der eksperimenteres videre med den perspektiviske afbildning, hvor især de forskellige typer anamorfoser er af betydelig matematisk interesse. Inden for Menneske, Sprog og Samfund er det især Descartes og Leibniz' drøm om en videreudvikling af det matematiske sprog (hos Descartes primært geometrisk, hos Leibniz primært symbolsk) til et egentligt universelt sprog, der kan regulere al menneskelig tænken.

Eksempler på studieretningsprojekter med udgangspunkt i perioden

Her vil vi kigge nærmere på eksempler på emner fra perioden, der kunne danne udgangspunkt for et studieretningsprojekt i matematikhistorie. To særdeles interessante primærkilder fra perioden udgøres af:

1) Galileo Galilei: **Dialogues concerning two new sciences**[4] (Dovers udgave af Galileis berømte værk, oprindeligt udgivet i 1638)

Kommentar: Hele værket er en klassiker inden for den moderne naturvidenskabs fødsel, men fra et matematiks synspunkt er det især det sidste kapitel med samtalerne fra den fjerde dag om projektilbevægelser, der er uhyre interessante. Dels er det her parablen får sit gennembrud som model for bevægelsen af et projektil, der alene er påvirket af tyngden: Galilei starter med at vise – med et enkelt og smukt geometrisk bevis – at parablen som et keglesnit også kan beskrives som en variabelsammenhæng ved hjælp af en kvadratisk proportionalitet. Det er så tæt på en moderne beskrives af en kvadratisk funktion man kan tænke sig fra før funktionsbegrebet var indført! Derefter viser han hvordan kombinationen af en ligefrem proportionalitet (den vandrette bevægelse) og en kvadratisk proportionalitet (den lodrette bevægelse) netop giver anledning til en parabel. Herefter undersøges kasteparablen i stor detalje, men det er tydeligt at Galilei lider under en manglende forståelse af hastigheden for en todimensional bevægelse. Galilei slutter sin tour de force med at undersøge sammenhængen mellem de fundamentale variable i kasteparablen: skudvidden (amplituden), skudhøjden (altituden), skudvinklen (elevationsvinklen) og udgangshastigheden (impetus) og giver herunder konkrete forskrifter for hvordan man kan beregne skudvidden som funktion af skudvinklen for en konstant udgangshastighed osv. Det fører til en historisk afgørende tabellægning af amplituden og altituden; en tabellægning, der i moderne sprogbrug involverer de trigonometriske funktioner – $10000 \cdot \sin(2 \cdot \text{skudvinklen})$ og $10000 \cdot \sin(\text{skudvinklen})^2$ – dvs. en simpel matematisk model for hvor langt en kanon kan skyde (når man ser bort fra luftmodstand).

---

[4] Dialogues concerning two new Sciences, Galileo Galilei, Dover Classics of Science and Mathematics, Dover Publications inc., 1914

[304]

Amplitudes of semi-parabolas described with the same initial speed.

Angle of Elevation		Angle of Elevation
45°	10000	
46	9994	44°
47	9976	43
48	9945	42
49	9902	41
50	9848	40
51	9782	39
52	9704	38
53	9612	37
54	9511	36
55	9396	35
56	9272	34
57	9136	33
58	8989	32
59	8829	31
60	8659	30
61	8481	29
62	8290	28
63	8090	27
64	7880	26
65	7660	25
66	7431	24
67	7191	23
68	6944	22
69	6692	21
70	6428	20
71	6157	19
72	5878	18
73	5592	17
74	5300	16
75	5000	15
76	4694	14
77	4383	13
78	4067	12
79	3746	11
80	3420	10
81	3090	9
82	2756	8
83	2419	7
84	2079	6
85	1736	5
86	1391	4
87	1044	3
88	698	2
89	349	1

Altitudes of semi-parabolas described with the same initial speed.

Angle of Elevation		Angle of Elevation	
1°	3	46°	5173
2	13	47	5346
3	28	48	5523
4	50	49	5698
5	76	50	5868
6	108	51	6038
7	150	52	6207
8	194	53	6379
9	245	54	6546
10	302	55	6710
11	365	56	6873
12	432	57	7033
13	506	58	7190
14	585	59	7348
15	670	60	7502
16	760	61	7649
17	855	62	7796
18	955	63	7939
19	1060	64	8078
20	1170	65	8214
21	1285	66	8346
22	1402	67	8474
23	1527	68	8597
24	1685	69	8715
25	1786	70	8830
26	1922	71	8940
27	2061	72	9045
28	2204	73	9144
29	2351	74	9240
30	2499	75	9330
31	2653	76	9415
32	2810	77	9493
33	2967	78	9567
34	3128	79	9636
35	3289	80	9698
36	3456	81	9755
37	3621	82	9806
38	3793	83	9851
39	3962	84	9890
40	4132	85	9924
41	4302	86	9951
42	4477	87	9972
43	4654	88	9987
44	4827	89	9998
45	5000	90	10000

Side 304 fra Galileis Dialogue of two Sciences.

Der er rigeligt at holde styr på for en elev på A-niveau: Galileis matematiske ræsonnementer er skrevet i et arkaisk geometrisk sprog, og skal først afkodes/oversættes til den matematik som eleven genkender. Dertil kommer Galileis historiske konflikt med kirken, der fik stor indflydelse for hans arbejdsvilkår. Endelig kan man – hvis det ønskes og eleven har det nødvendige overskud – inddrage såvel den tidligere beskrivelse af projektilbaner (ikke mindst Tartaglia), den senere udvikling af beskrivelsen af projektilbaner med inddragelse af først luftmodstanden (hvor de fundamentale sammenhænge blev fastlagt af bl.a. Newton), dernæst Jordens rotation osv. frem til den komplicerede numeriske løsning af de dertil hørende differentialligninger, der førte til brugen af mekaniske beregninger og senere computere i forbindelse med anden verdenskrig.

Der kan naturligvis laves mange opgaveformuleringer med udgangspunkt i den ovenstående primærkilde. Fagkonsulenten for historie har udarbejdet en skabelon til formulering af problemformuleringer:

Forslag til problemformuleringer mellem matematik A og historie A:
Udviklingslinjer – samfundstyper.. naturgrundlag … personers betydning…samspil og betydning Redegør kort for den samfundsmæssige udvikling i … fra … til …. med henblik på at diskutere samspillet mellem naturgrundlag, menneske og samfund i perioden. Foretag herunder en begrundet opdeling i matematikhistoriske perioder og vurder betydningen af (en eller to matematikeres? Eller et eller to matematiske nybruds..?) betydning på kort og på langt sigt.

Med udgangspunkt i ovenstående skabelon følger her et eksempel på, hvordan opgaveformuleringen kan tænkes struktureret for den viste primærkilde.

Modernitetens fødsel: Galilei (***matematik er hovedfag***)

Redegør for den samfundsmæssige udvikling i Europa i 1600-tallet med særligt henblik på at forklare Galileis rolle i konflikten mellem kirken og naturvidenskaben. Analysér Galileis brug af parablen som matematisk model for bevægelsen af et projektil, der udelukkende bevæger sig under indflydelse af tyngden. Sammenhold Galileis matematiske metoder og begreber med nogle af de matematiske metoder og begreber vi i dag har til rådighed ved opstilling af modeller for projektilbaner.

Modernitetens fødsel: Galilei (***matematik og historie er begge hovedfag***)

Redegør for den samfundsmæssige udvikling i Europa i 1600-tallet med særligt henblik på at forklare Galileis rolle i konflikten mellem kirken og naturvidenskaben. Analysér Galileis brug af parablen som matematisk model for bevægelsen af et projektil, der udelukkende bevæger sig under indflydelse af tyngden. Vurder med udgangspunkt i Galileis analyse af det frie fald og projektilbanen Galileis betydning for udvikling af det naturvidenskabelige verdensbillede.

Bemærkning: Hvis fysik også er inkluderet i studieretningsprojektet er det selvfølgelig nærliggende at inkludere en eksperimentel undersøgelse af kasteparablen, ligesom det er nærliggende at inkludere en sammenligning af de fysiske metoder og begreber som Galilei havde til rådighed med de begreber og metoder vi i dag har til rådighed.

2) René Descartes: **Optics and meteorology** (Inkluderet i den amerikanske udgave af Discourse[5], Descartes berømte værk oprindeligt udkommet i 1637)

Kommentar: Descartes udgav tre videnskabelige eksempler på sin metode i forbindelse med udgivelsen af Discourse (om metoden, der rent faktisk findes i en dansk udgave), hvor den mest berømte er hans Geometri, hvori han fremlægger sin berømte oversættelse af Euklids geometri til algebra (men *ikke* indfører analytisk geometri som vi kender den i dag!). Algebraen var imidlertid ikke hans eneste bidrag til metoden. I de to andre værker om optik og himmelfænomener udvikler han geometriske modeller til beskrivelse/forståelse af en række fysiske fænomener.

Det er i Optics han udleder brydningsloven ved at anvende en simpel geometrisk/fysisk model for brydningen og anvender den på et berømt problem i forbindelse med konstruktion af linser: Hvilken form skal en linse have for, at den kan omdanne et parallelbundt af stråler der rammer linsen til et bundt af stråler, der forlader linsen og går gennem linsens brændpunkt. Descartes påviser, at løsningen er at forme linserne som keglesnit, dvs. som ellipser og hyperbler. Derved gives endnu en væsentlig videnskabelig anvendelse af keglesnittene i forlængelse af Keplers berømte arbejde med at beskrive planetbanerne som ellipser med Solen i det ene brændpunkt (Astronomia nova, 1609). Optics giver altså en fin mulighed for at skrive et studieretningsprojekt om keglesnit med et klart historisk perspektiv. Temaet kan enten beskæftige sig med (dele af) keglesnittets historie eller koncentrere sig om et bestemt tema som det ovenstående med Descartes anvendelse af keglesnit i Optics. I begge tilfælde er der rigeligt at tage fat i.

Det andet værk, Meteorology, er mindst lige så interessant fra et matematisk synspunkt. Her anvendes brydningsloven til at konstruere en geometrisk model for bl.a. regnbuen. Descartes bygger på adskillige forgængere, som allerede havde udviklet væsentlige dele af modellen, men forsynet med en brydningslov kan han tage fat på det vigtigste matematiske problem: udledningen af de kritiske vinkler for hovedregnbuen og biregnbuen. Det indebærer en forståelse af, hvordan afbøjningsvinklen afhænger af den såkaldte impact parameter. Descartes opbygger derfor, ligesom Galilei i sin afhandling om kasteparablen, en komplet tabel over denne variabelsammenhæng, se figur på næste side. Denne gang er det altså et eksempel på et endnu mere kompliceret trigonometrisk funktionsudtryk. Men igen har Descartes ikke noget formelt funktionsbegreb til rådighed, så alt hvad han kan gøre er at konstruere en tabel over sammenhængen og for at tydeliggøre argumentet zoomer han ind på den interessante del af tabellen, så det bliver tydeligere at tætheden for de afbøjede stråler er størst ude ved randen at afbøjningsområdet.

På denne måde lykkes det for Descartes som den første at give en egentlig matematisk model for regnbuen. Der er dog stadigvæk mange mangler i hans modeller. Fx er hans teori for lysets farver højst ufuldstændig, og det er først Newton, der kan gøre ordentligt rede for farvespredningen (Optics, 1704). det er også interessant at se, hvordan Descartes kommer til kort over for mange andre himmelfænomener. Specielt forstår han ikke

[5] Rene Descartes: Discourse on Method, Optics, Geometry and Meteorology; translated, with introduction, by Paul J. Olscamp, Hackett Publishing Company, Inc., 2001

zenithbuen, den omvendte regnbue. Men alt i alt giver brydningsloven og Descartes model for regnbuen rigeligt at tænke over, og hvis der er overskud til det kan man inddrage såvel tidligere modeller som senere modeller for regnbuen (henholdsvis zenithbuer, haloer osv.).

Bemærkning: Når man dykker ned i Descartes primære kilder kan man også som sekundær kilde hente megen inspiration i udvalgte artikler fra:

> Descartes' Natural philosophy, Edited by Stephen Gaukroger, John Schuster and John Sutton, Routledge Studies in Seventeenth-Century Philosophy, Routledge, 2000

Som supplerende primær kilde er det i øvrigt oplagt at inddrage Newtons Optics[6] (oprindeligt udkommet i 1704), der netop diskuterer mange af de samme emner.

[6] Optics, Sir Isaac Newton, Dover Classics of Science and Mathematics, Dover Publications inc., 1979

line HF	*line CI*	*arc FG*	*arc FK*	*angle ONP*	*angle SQR*
1,000	748	168°30′	171°25′	5°40′	165°45′
2,000	1,496	156°55′	162°48′	11°19′	151°29′
3,000	2,244	145°4′	154°4′	17°56′	136°8′
4,000	2,992	132°50′	145°10′	22°30′	122°4′
5,000	3,740	120°	136°4′	27°52′	108°12′
6,000	4,488	106°16′	126°40′	32°56′	93°44′
7,000	5,236	91°8′	116°51′	37°26′	79°25′
8,000	5,984	73°44′	106°30′	40°44′	65°46′
9,000	6,732	51°41′	95°22′	40°57′	54°25′
10,000	7,480	0	83°10′	13°40′	69°30′

It is easy to see, in this table, that there are many more rays which make the angle *ONP* around 40°, than there are those which make it less; and also more of them which make *SQR* around 54° than make it greater. Then, in order to make it still more precise, I do the following:

line HF	*line CI*	*arc FG*	*arc FK*	*angle ONP*	*angle SQR*
8,000	5,984	73°44′	106°30′	40°44′	65°46′
8,100	6,058	71°48′	105°25′	40°58′	64°37′
8,200	6,133	69°50′	104°20′	41°10′	63°10′
8,300	6,208	67°48′	103°14′	41°20′	62°54′
8,400	6,283	65°44′	102°9′	41°26′	61°43′
8,500	6,358	63°34′	101°2′	41°30′	60°32′
8,600	6,432	61°22′	99°56′	41°30′	58°26′
8,700	6,507	59°4′	98°48′	41°28′	57°20′
8,800	6,582	56°42′	97°40′	41°22′	56°18′
8,900	6,657	54°16′	96°32′	41°12′	55°20′
9,000	6,732	51°41′	95°22′	40°57′	54°25′
9,100	6,806	49°	94°12′	40°36′	53°36′
9,200	6,881	46°8′	93°2′	40°4′	52°58′
9,300	6,956	43°8′	91°51′	39°26′	52°25′
9,400	7,031	39°54′	90°38′	38°38′	52°
9,500	7,106	36°24′	89°26′	37°32′	51°54′
9,600	7,180	32°30′	88°12′	36°6′	52°6′
9,700	7,255	28°8′	86°58′	34°12′	52°46′
9,800	7,330	22°57′	85°43′	31°31′	54°12′

Descartes tabel over sammenhængen mellem impact parameteren HF og afbøjningsvinklerne ONP (hovedregnbuen) og SQR (biregnbuen).

Et eksempel på en opgaveformulering, hvor fokus er på keglesnittene

Modernitetens fødsel: Descartes
Redegør for den samfundsmæssige udvikling i Europa i 1600-tallet med særligt henblik på at forklare Descartes' rolle konflikten mellem kirken og videnskaben. I tillæg til Descartes værk "Metoden" skriver Descartes bl.a. om optikken som et eksempel på metoden. Analysér Descartes brug af keglesnit som matematisk model for en linse. Sammenhold Descartes matematiske metoder og begreber med metoder og begreber fra andre tiders behandling af keglesnit.

Bemærkning: Hvis fysik også er inkluderet i studieretningsprojektet er det selvfølgelig nærliggende at inkludere en eksperimentel undersøgelse af brydning i linser.

Et eksempel på en opgaveformulering, hvor fokus er på brydningsloven

Modernitetens fødsel: Descartes
Redegør for den samfundsmæssige udvikling i Europa i 1600-tallet med særligt henblik på at forklare konflikten mellem kirken og naturvidenskaben. Gør herunder rede for Descartes' og Newtons forhold til kirken. Analysér Descartes brug af geometriske modeller som forklaringsmodeller for brydningsloven henholdsvis regnbuen. Giv en kritisk vurdering af Descartes forklaringsmodeller i lyset af Newtons diskussion af brydningsloven og regnbuen. Vurder Descartes' og Newtons betydning for udviklingen af naturvidenskaberne.

Bemærkning: Hvis fysik også er inkluderet i studieretningsprojektet er det selvfølgelig nærliggende at inkludere en eksperimentel undersøgelse af brydning i kugleformede legemer, ligesom det er nærliggende at inddrage modeller for andre himmelfænomener som zenithbuer og haloer.

Andre eksempler på studieretningsprojekter

I det senere afsnit om tidsperioder er det centrale indhold for matematik og historie i de forskellige perioder skitseret sammen med forslag til problemformuleringer og litteratur.

Ved matematisk institut på KU har et hold studerende i foråret 2007 udarbejdet en række forslag til opgaver der udmærker sig ved meget gode henvisninger til litteratur og links til brug for opgaverne. Forslagene ligger på emuen på følgende adresse:

http://www.emu.dk/gym/fag/hi/inspiration/srinspir.html

Om forskellige tilgange til matematik herunder historisk matematik

Man kan se på matematik fra mange synsvinkler. Når man skal skrive om matematik i fx et studieretningsprojekt er det derfor vigtigt at holde sig for øje at der ikke kun er én tilgang til matematikken: Det er en oplagt pointe at matematik ikke kun består af sætninger og beviser.

I en traditionel opdeling af matematikken skelner man typisk mellem den *rene teoretiske matematik* på den ene side og den *praktiske anvendte matematik* på den anden. Men det er også klart at der ikke er et skarpt skel mellem den rene og den anvendte matematik. En af matematikkens store styrker er netop dens overraskende høje grad af anvendelighed og i overensstemmelse hermed viser det sig gang på gang at områder fra den rene matematik med tiden overflyttes til den anvendte matematik. Et godt eksempel fra nyere tid er talteorien, som har vist sig fuldstændigt uundværlig indenfor elektronisk kommunikation.

Når matematik skal ind i et tværfagligt sammenspil med andre fag er det klart at den anvendte matematik i langt højere grad byder sig til. I den anvendte matematik er der ikke samme krav om stringens som i den rene matematik, der traditionelt fokuserer på beviser og den indre logiske sammenhæng mellem sætninger. I den anvendte matematik er det langt vigtigere at opstille modeller og metoder, der fungerer i praksis. Det er stadigvæk matematik, også selvom den anvendte model/metode ikke nødvendigvis hviler på et bredt teoretisk fundament, men i højere grad på erfaring (et forhold der i øvrigt også præger matematikkens egen historie i de tidlige faser).

Denne dobbelthed afspejles netop i de faglige mål for matematik, der på den ene side betoner at eleverne på den ene side skal kunne

- "*redegøre for matematiske ræsonnementer og beviser, samt deduktive sider ved opbygning af matematisk teori*".

På den anden side skal de kunne

- "*demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling*"

En anden vigtig opdeling møder man i opdelingen af den matematiske tænkning i den *logisk analytiske tænkning* på den ene side og den *intuitive billedskabende tænkning* på den anden side. Begge måder at tænke på er lige vigtige for den matematiske selvforståelse. Den berømte tyske matematiker Hilbert udtrykte det således i forordet til 'Geometry and Imagination' af Hilbert og Cohn-Vossen fra 1934:

> 'I matematik, som i alle andre videnskaber, er der altid to forskellige tendenser tilstede. På den ene side er der bevægelsen mod *abstraktionen*, som dels søger at udkrystallisere de *logiske* sammenhænge i det labyrintiske materiale der undersøges, dels søger at samle materialet i en systematisk ordnet rækkefølge. På den anden side er der tendensen mod en direkte *intuitiv forståelse*, som fører til et umiddelbart greb om de genstande man undersøger, så at sige et *levende forhold* til dem, der betoner den konkrete betydning af sammenhængene.

> Kigger vi specielt på geometrien har den abstrakte tendens ført til de storslåede systematiske teorier om algebraisk geometri, differentialgeometri og topologi. Disse teorier gør udstrakt brug af abstrakte ræsonnementer og symbolske udregninger, som vi kender dem fra algebraen. Ikke desto mindre spiller den direkte intuitive forståelse stadigvæk en lige så afgørende rolle, som den altid har gjort i geometrien. Og en sådan direkte intuition er ikke bare af stor betydning for forskeren, men af stor betydning for alle som ønsker at sætte sig ind i og værdsætte de resultater, der udspringer af forskningen indenfor geometri.'

Denne direkte intuitive forståelse af matematikken må nødvendigvis formidles på en anden måde end den abstrakte forståelses brug af beviser og sætninger. Her kan billeder og figurer fx spille en afgørende rolle for formidlingen, ligesom en billedskabende sprogbrug rig på metaforer kan anvendes med succes til formidling af et matematisk emne/aspekt.

Når der i de faglige mål for matematik bl.a. står at eleverne skal kunne

- "*demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling*".

må altså heller ikke glemme at matematik er et yderst vigtigt kulturbærende fag som ikke kun har bidraget med væsentlig synspunkter omkring opbygningen af sikker holdbar viden, men også leveret afgørende inspiration til kunstnere, håndværkere, ingeniører, arkitekter osv. gennem dets arsenal af arketypiske former, som netop formidles via matematiske billeder fra oldtidens talmønstre til nutidens fraktaler.

Der kan tilsvarende anlægges forskellige historiske synsvinkler på matematik. I denne rapport har vi lagt vægt på den periodemæssige opdeling af matematikkens historie, hvor man så at sige snitter historien op på tværs og ser på hvad der er karakteristisk for den pågældende periode indenfor samfundsforhold, matematik og naturvidenskab osv. Men det er også muligt at snitte historien op på langs og i stedet fokusere på de spor, der trækkes op gennem historien. En sådan tilgang finder man fx i David Henderson og Daina Tamira's bog: *'Experiencing Geometry – Euclidean and Non-Euclidean with history'* fra 2005. De skelner mellem fire *spor* i geometriens historie:

1. **Kunst- og mønstersporet:** Sporet udspringer af brugen af symmetrier og gentagne mønstre til brug for dekorationer af vævede tekstiler, krukker osv. Det førte til studiet af flisedækninger, flytnings- og transformationsgrupper, krystallografi og til sidst de endelige geometrier. Behovet for at kunne gengive personer såsom dyr, mennesker og guder samt forskellige genstande på billedform førte i renæssancen til opdagelsen af perspektivet, som igen udviklede sig til den projektive og senere den deskriptive geometri. I vor tid har behovet for at kunne fremstille billeder på computer ført til udviklingen af digitale komprimeringsteknikker, computergrafik og digitale virtuelle animationer til brug for fx spillefilm.

2. **Navigations- og astronomisporet:** Sporet udspringer fra systematiske observationer af stjernehimlen til brug for fastlæggelsen af en kalender og navigationen ved lange rejser over land eller på havet. Det førte til trigonometri (først den

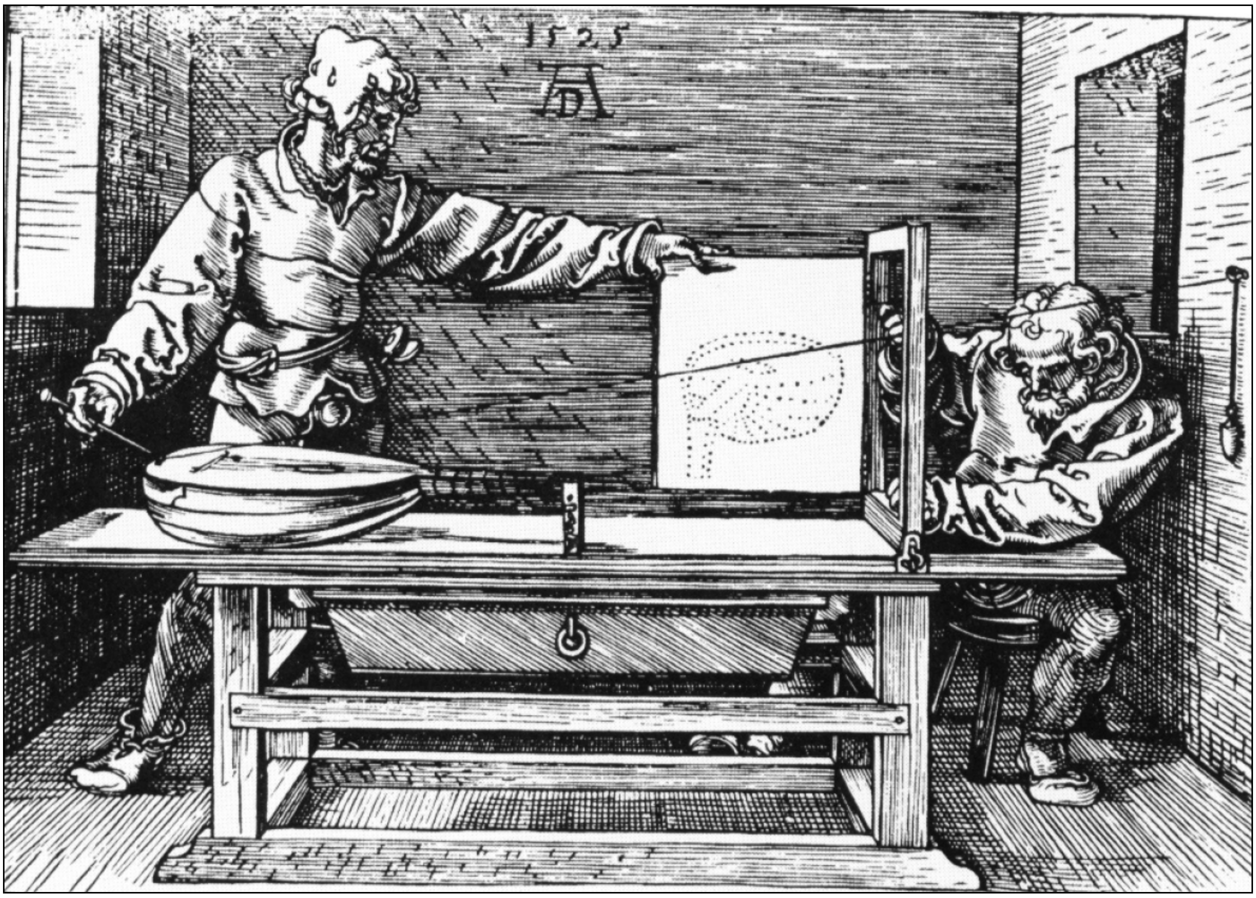
sfæriske og siden den almindelige trigonometri til brug for landmåling), kortprojektioner, den sfæriske geometri, geometrien for flader og krumme rum og i vor tid geometrien for såvel de felter, der formidler vekselvirkningerne mellem partikler som geometrien for den krumme rumtid i den almene relativitetsteori.

3. **Bygge- og arkitektursporet:** Sporet udspringer af behovet for at opføre forskellige former for genstande og bygninger fx templer med altre eller broer. Det fører til systematiske manualer for elementær geometri. der til sidst udkrystalliseres i Euklids elementer. Ud fra denne udvikledes på den ene side de forskellige tilgange til geometri: Euklidisk geometri, analytisk geometri, vektorgeometri og algebraisk geometri. På den anden side udvikledes den aksiomatiske metode indenfor matematikken, der kulminerede med opdagelsen af den ikke-euklidiske geometri. Denne aksiomatisering bredte sig herefter til andre områder af matematikken, først og fremmest til de reelle tal, der herefter blev grundlaget for geometrien (via den analytiske geometri) og senere til en aksiomatisering af andre geometrier, såsom den sfæriske/elliptiske geometri og den projektive geometri.

4. **Bevægelses- og maskinsporet:** Sporet udspringer af opfindelsen af hjulet, trissen, sammenkædede stænger (linkages), gearet og andre simple maskiner og mekaniske instrumenter til brug for transport af mennesker og varer. Grækerne anvendte også sådanne mekaniske instrumenter til at frembringe nye kurver, der er mere komplicerede end de rette linjer og cirkler, som Euklid alene opererede med. Det satte dem i stand til at finde praktiske løsninger på konkrete matematiske problemer, såsom tredelingen af en vinkel eller fordoblingen af en terning. Herefter skal vi frem til renæssancen før man begynder mere systematisk at studere de kurver, der kan frembringes af sådanne mekaniske instrumenter, hvilket var medvirkende til udviklingen af den analytiske geometri. Tilsvarende blev de første mekaniske regnemaskiner udviklet i 1700-tallet, hvilket senere førte til Babbages opfindelse af differensmaskinen og den analytiske maskine, som er forløbere for den moderne computer. I vore dage lever dette spor fx videre i studiet af studiet af polygonale strukturers stabilitet og robotters bevægelsesmønstre.

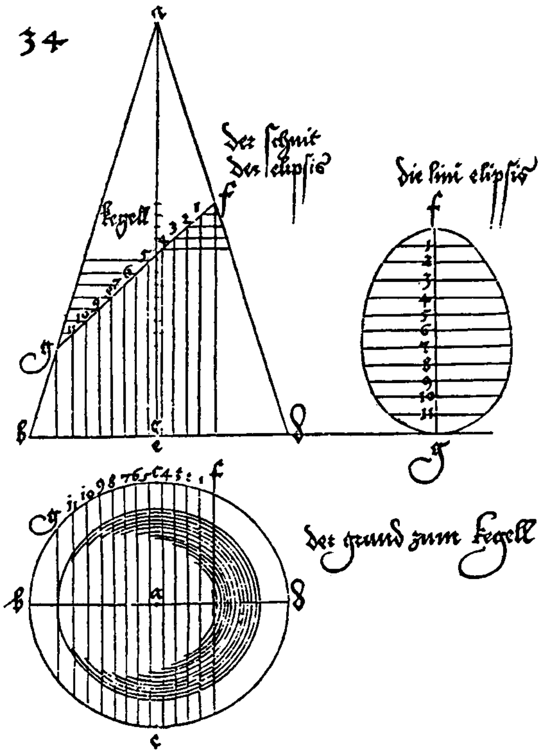
Det giver så en anden indfaldsvinkel til hvilke matematiske emner, der kunne være interessante at tage op i forbindelse med studieretningsprojektet. Lad os som et første eksempel se på *kunst- og mønstersporet.* Her kunne et udgangspunkt være renæssancen og dens opdagelse af bl.a. centralperspektivet. Hvordan blev denne ny viden nu gjort tilgængelig? I første omgang gennem svært tilgængelige kunstteoretiske afhandlinger som fx arkitekten Albertis tidlige afhandling om billedkunsten: De Pictura fra 1435, hvor principperne bag centralperspektivet for første gang optræder på skrift. På trods af at det er en afhandling om billedkunstens principper – og herunder de grundlæggende matematiske principper bag centralperspektivet – indeholder den *ingen* billeder samtidigt med at matematikken er beskrevet i et omstændeligt sprog, bl.a. fordi den netop ikke støtter sig til illustrationer. Heldigvis er den danske udgave forsynet med fyldige kommentarer, der ikke kun kaster godt lys over de matematiske principper men også over hele den historiske ramme som værket er skrevet ind i. Alligevel må den originale tekst fra et matematisk synspunkt siges at være klodset i sin opbygning og svær at få hold på. Heldigvis findes der en anden fremragende kunstner, Albrecht Dürer, der på en dannelsesrejse til Italien lærte sig de nye principper og teknikker og samlede den nødvendige matematiske baggrundsviden i den omfattende lærebog: Unterweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtsheyt fra 1525. Den er skrevet efter bogtrykkerkunstens opfindelse og kunne derfor nå ud til et stort publikum i form af samtidens kunstnere håndværker og andre, der havde brug for at tilegne sig den matematiske viden, der lå bag den nye perspektiviske billedfremstilling. Den er gennemillustreret med Dürers egne tegninger og udgør en guldgrube, når man vil danne sig et indtryk af kunstnerens eget direkte forhold til matematikken. Den er fx tilgængelig via en CD-rom med facsimileudgaver som pdf-filer af to centrale Dürer tekster (om menneskelige proportioner og Unterweysung).

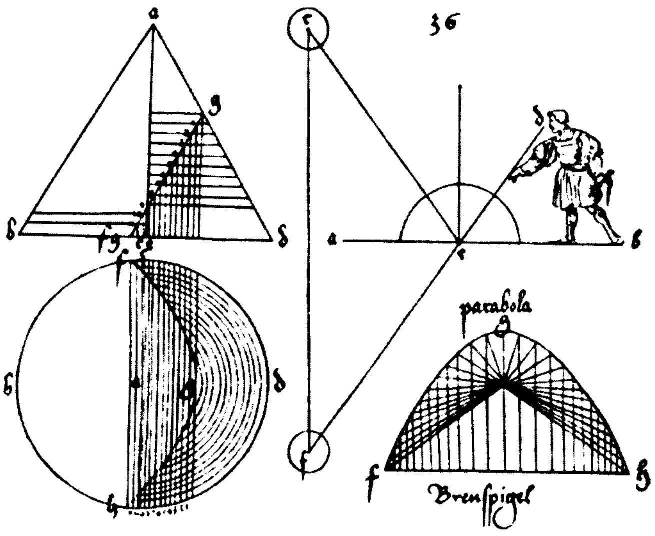
Dürer er med rette berømt for sine meget illustrative billeder til forklaring af princippet bag centralperspektivet:



Sammenholder man informationen i sådanne billeder med Albertis knudrede tekst forstår man virkelig at værdsætte det kendte mundheld om at 'billeder siger mere end tusinde ord'.

I Unterweysung viser Dürer nu fx, hvordan man 'oversætter' de klassiske konstruktioner i geometri til praktiske tegnemetoder, her illustreret med tegninger af ellipser og parabler:





Der findes nu et bredt spektrum af måder, hvorpå man kan inddrage perspektivets historie i en matematisk sammenhæng:

- Man kan bruge det til illustration af en *eksperimentel tilgang til matematik* fx eksemplificeret ved Brunellechis og Albertis berømte eksperimenter til godtgørelse af de centrale principper, se fx en kortfattet historisk gennemgang i Vedelsby og Felsager, perspektiv med Geometer fra forlag Malling Beck 2005.
- Man kan bruge det til en illustration af en mere *intuitiv direkte billedskabende tilgang til matematik* fx eksemplificeret ved Dürers store lærebog i praktisk perspektivtegning: Underweysung der Messung. I den forbindelse kan man fx genskabe illustrationerne ved hjælp af moderne dynamiske geometriprogrammer og der i gennem både demonstrere forståelse for Dürers tankegang og samtidigt sætte hans metoder ind i en moderne kontekst hvor computer støttet design spiller en stadigt mere afgørende rolle.
- Man kan selvfølgelig også bruge de til illustration af en *teoretisk analytisk tilgang til matematikken* og lægge fokus på udviklingen af det teoretiske fundament for centralperspektivet. Her vil man kunne finde en righoldig samling af eksempler på interessante teoretiske problemstillinger i Kirsti Andersens doktorafhandling fra 2004 om 'The Geometry of an art – The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge' som involverer alt fra elementære geometriske problemstillinger til anvendelsen af infinitesimalregning til at løse vanskelige afbildningsopgaver.

Et andet eksempel kunne være *bygge- og arkitektursporet*, som ikke kun har affødt de imponerende aksiomatiske metoder indenfor matematikken, men også i vidt omfang har støttet sig til geometrien som det afgørende formskabende sprog. Her kunne et udgangspunkt være Lars Marcussens imponerende historiske fremstilling 'Rummets arkitektur – Arkitekturens rum' med en ny og udvidet udgave fra 2006, der netop viser hvordan udviklingen i den geometriske rumopfattelse forløbet parallelt med udviklingen af arkitekturens rumopfattelse. Igen åbner et sådant emne muligheder for mange matematiske tilgange: Eksperimentelle, intuitive billedskabende og teoretisk analytiske. Hvilken tilgang der vil være velegnet afhænger selvfølgelig ikke kun af emnet men også af den elev, der skal skrive opgaven. Nogle elever vil føle sig mest trygge ved en teoretisk analytisk tilgang, mens andre typer af elever vil føle sig mere tiltrukket af matematikkens formsprog formidlet gennem billeder og et mere intuitivt direkte metaforisk sprog. Begge tilgange kan give anledning til at demonstrere en dyb forståelse af matematiske sammenhænge.

2. Vurderingen af studieprojektopgaven

Taksonomiske krav

Dette afsnit sigter på en afklaring af niveauer for såvel lærere som elever. Eleverne har krav på at få at vide hvad der forventes af en god opgave set med matematiske og historiske øjne. Her vil vi især arbejde med de taksonomiske forventninger til opgaven. Historielærerne kender nok især Blooms taksonomi, mens de matematisk/naturvidenskabeligt orienterede lærere nok er mere fortrolige med SOLO-taksonomien. Men begge taksonomier er universelle taksonomier, der kan anvendes på alle fagområder.

En *taksonomi* er et klassifikationssystem, der benyttes til at strukturere et bestemt vidensområde (fx planter i biologi, der klassificeres ved hjælp af Linnés taksonomi). SOLO-taksonomien og Blooms taksonomi er eksempler på overordnede *kognitive taksonomier*, dvs. en systematisk strukturering af forskellige måder at *tænke* på, der kan anvendes på alle fagområder. Disse tænkemåder *rangordnes*, idet nogle tænkemåder er simple/konkrete, mens andre tænkemåder er komplekse/abstrakte. Jo mere dyb/kompleks ens tænkning er, jo mere har man udviklet sin tænkning.

7-trinsskalaen

UNDERVISNINGS MINISTERIET

Karakter		Betegnelse	Beskrivelse
12	A	Den fremragende præstation	Karakteren 12 gives for den fremragende præstation, der demonstrerer udtømmende opfyldelse af fagets mål, med ingen eller kun få uvæsentlige mangler
10	B	Den fortrinlige præstation	Karakteren 10 gives for den fortrinlige præstation, der demonstrerer omfattende opfyldelse af fagets mål, med nogle mindre væsentlige mangler
7	C	Den gode præstation	Karakteren 7 gives for den gode præstation, der demonstrerer opfyldelse af fagets mål, med adskillige mangler
4	D	Den nogenlunde præstation	Karakteren 4 gives for den nogenlunde præstation, der demonstrerer en mindre grad af opfyldelse af fagets mål, med adskillige væsentlige mangler
02	E	Den tilstrækkelige præstation	Karakteren 02 gives for den tilstrækkelige præstation, der demonstrerer den minimalt acceptable grad af opfyldelse af fagets mål.
00	Fx	Den utilstrækkelige præstation	Karakteren 00 gives for den utilstrækkelige præstation, der ikke demonstrerer en acceptabel grad af opfyldelse af fagets mål.
-3	F	Den ringe præstation	Karakteren -3 gives for den helt uacceptable præstation.

Når man skal vurdere en præstation, i dette tilfælde et studieretningsprojekt, benyttes karaktersystemet til at strukturere præstationen. Karaktersystemet er altså også et eksempel på en taksonomi. Den hænger på mange måder sammen med de kognitive taksonomier: Jo dybere man tænker, to højere karakter får man. Karakteren forventes altså at afspejle det kognitive taksonomiske niveau, som eleven er kommet op på.

Man kan lidt forenklet forestille sig de enkelte niveauer som trin på en stige: For at kravle op af stigen, må man tage stigen trin for trin, dvs. de enkelte niveauer hviler på hinanden. Jo højere op det lykkes at kravle på stigen, jo højere karakter får man. I den officielle karakterskala er det dog *ikke* formuleret ud fra kognitive taksonomier, men i stedet for ud fra de faglige mål. Det er en såkaldt mangelbeskrivelse, dvs. man får karakter efter hvor store mangler man har i forhold til den udtømmende præstation.

Ser man på bedømmelseskriterierne for studieretningsprojektet falder de i forskellige kategorier. I første pind er der et nogle formelle rammer for bedømmelsen (overensstemmelse mellem besvarelsen og opgaveformuleringen ...), derefter følger i anden pind fem kriterier der er interessante i forhold til taksonomier og i sidste pind er der endnu to kriterier, der er interessante i forhold til taksonomier samt en enkelt bemærkning om formidling (se side 26 om formuleringsmæssige krav):

> *Ved bedømmelsen lægges der herudover vægt på nedenstående forhold:*
>
> - *overensstemmelsen mellem besvarelsen og opgaveformuleringen, herunder de afgrænsninger og krav, der indgår i denne,*
> - *eksaminandens udvælgelse, inddragelse, bearbejdning, vurdering og perspektivering af relevant fagligt stof,*
> - *problemstillingernes sværhedsgrad og kompleksitet, samt formidlingen af stoffet*
>
> Udklip fra læreplanen, juni 2007

De første to taksonomiske kriterier går ikke særligt dybt: Her drejer det sig blot om dels at *udvælge*, dels om at *inddrage relevant fagligt stof*. Hvis disse kriterier overhovedet ikke er opfyldt kan man næppe siges at have demonstreret den minimale opfyldelse af de faglige mål for studieretningsprojektet, som er nødvendige for at bestå.

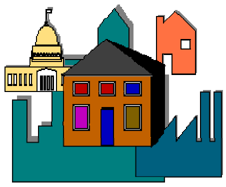
De næste tre kriterier rækker dybere: Stoffet skal *behandles*, der skal gennemføres en *vurdering* på fagligt og metodisk grundlag og der skal være en *perspektivering* af stoffet. Endelig skal der lægges vægt på *problemstillingernes sværhedsgrad og kompleksitet.* Eleven kan for eksempel have arbejdet med særligt vanskelige og komplekse problemstillinger (noget der fx ofte vil være relevant i forbindelse med primære matematiske kilder). I så fald skal der tages særlige hensyn i vurderingen af hvor dybt man er nået i sin forståelse af problemstillingen. Man kan selvfølgelig nemmere acceptere 'mangler' og 'usikkerheder' i en vanskelig og kompleks problemstilling og dermed på trods af manglerne opnå et rimeligt niveau. Omvendt følger det, at hvis man kun arbejder med særligt simple og enkle usammensatte problemstillinger, skal fremstillingen være ret dybtgående før man kan siges at have nået et tilfredsstillende niveau.

SOLO-taksonomien

SOLO-taksonomien (Structure of the Observed Learning Outcome, dvs. strukturen af det observerede udbytte af læringsprocessen) stammer fra Biggs og Collis (1982). Den tager udgangspunkt i *kognitiv kompleksitet*. I denne taksonomi lægges vægten derfor på læringsudbyttet, som det kommer til udtryk i løsningen af den konkrete opgave.

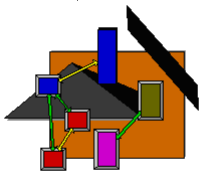
I SOLO-taksonomien opererer man med fem niveauer, hvoraf det nederste niveau repræsenterer fraværet af egentlig forståelse og læring (og derfor svarer til karakteren **F+=00**, dvs. dumpet). De øvrige fire niveauer falder i to grupper. Den første gruppe omfatter de to næste niveauer, som repræsenterer en *kvantitativ* fase, hvor omfanget af detaljerne i elevens svar afspejler karaktererne **E=02**, **D=4** og **C=7**. Den anden gruppe med de to sidste niveauer repræsenterer en *kvalitativ* fase, hvor detaljerne i svarene integreres i et samlet mønster svarende til karaktererne **B=10** og **A=12**. Den egentlige karaktervurdering beror selvfølgelig også i høj grad på de specifikke faglige mål i fagene matematik og historie.

SOLO-taksonomien

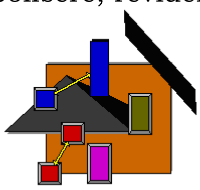


5. Det udvidede abstrakte niveau er kendetegnet ved, at eleven kan behandle nye problemstillinger ved at forbinde dem med kendte principper og kunne forholde sig kritisk til dem. Løsning af komplekse problemer med perspektivering og diskussion ud over det forventede svar.
Verber: Teoretisere, generalisere, reflektere, generere, udvikle, vurdere, syntetisere, validere, visualisere, værdisætte, diskutere.

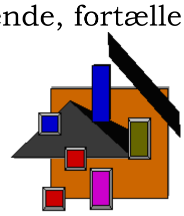
4. Det relationelle niveau er kendetegnet ved integration af flere komponenter eller data og anvendelse inden for kendte sammenhænge. Løsning af komplekse problemer.
Verber: Sammenligne, forklare, analysere, anvende, skelne, forudsige, kombinere, sammenfatte



3. Det multi-strukturelle niveau er kendetegnet ved at flere komponenter inddrages enkeltvis, med forståelse for grænser mellem enkeltdele, men ikke for systemer. Opgaveløsning med kombination af formler gennem skridtvis udregning.
Verber: Klassificere, opremse, gengive, udtrykke, definere, udvide, fortolke, løse, symbolisere, revidere



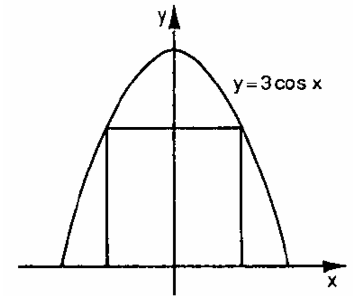
2. Det enkelt-strukturelle niveau er kendetegnet ved en konkret tilgang, præget af overvejende terminologisk viden og meget begrænset kognitiv kompleksitet. Viden er begrænset, fordi komponenter ikke kombineres. Simpel opgaveløsning med indsættelse af tal i en formel.
Verber: Huske, benævne, genkende, fortælle, citere, bemærke



1. Det før-strukturelle niveau er kendetegnet ved at eleven samler stumper af usammenhængende viden, som ikke organiseres på nogen måde, og som derfor ikke giver nogen mening.

Vi slutter med et eksempel på en taksonomi for matematiske problemløsningsopgaver i fire niveauer udarbejdet af den svenske matematiker Hans Brolin. Den eksemplificerer på mange måder SOLO-taksonomien i en matematisk sammenhæng:

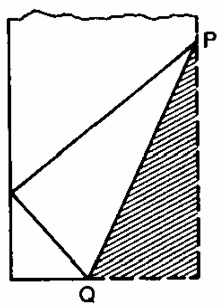
Det indskrevne rektangel:



I det område, som afgrænses af førsteaksen og kurven $y = 3\cos x$, hvor $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$, er der indskrevet et rektangel (se figuren). Undersøg situationen!

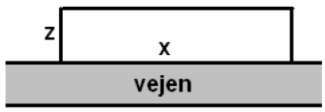
Niveau 4: På dette niveau får du en åben situation og må selv konstruere en passende opgave!

Et A4-papir foldes, så nedre højre hjørne placeres på papirets venstre kant (se figur). Hvad er den mindste værdi, som længden af folden *PQ* kan antage, hvis papirets bredde er 21 cm?



Niveau 3: På dette niveau skal du selv indføre de relevante variable og finde de relevante sammenhænge. Men du får stadigvæk et konkret spørgsmål.

Et rektangulært område på 6000 m² skal indesluttes af et hegn. På de tre sider koster hegnet 100 kr./m og på den fjerde side (ud mod vejen) 400 kr./m.



a) Opstil en sammenhæng mellem x og z.
b) Kald totalomkostningen for y kr. Udtryk y som funktion af x.
c) Hvilke værdier kan x antage?
d) Bestem den mindste værdi for y. Hvilke mål har området så? Kommentér!

Niveau 2: På dette niveau får du alle de relevante variable foræret, men du skal selv finde de relevante sammenhænge. Herefter stilles et konkret spørgsmål, hvor du skal finde en værdi for en af variablene ud fra en bestemt egenskab ved en af variablene, fx at den antager sin mindste værdi.

Den energi y (målt i J/g/km), som en australsk papegøje bruger pr. gram kropsvægt og flyvekilometer, er givet ved

$$y = \frac{0.31\cdot(x-35)^2+92}{x}, \text{ hvor } x \text{ er hastigheden i km/h.}$$

Hvilken hastighed bør papegøjen holde, hvis den vil bruge mindst mulig energi?

Niveau 1: På dette niveau får du både alle variable og alle relevante sammenhænge mellem de variable foræret. Herefter stilles et konkret spørgsmål, hvor du skal finde en værdi for en af variablene ud fra en bestemt egenskab ved en af variablene, fx at den antager sin mindste værdi.

Blooms kognitive taksonomi

Den opererer med seks niveauer med progression i niveauerne. Udøvelse på niveau seks forudsætter de fem foregående niveauer. Blooms taksonomi er som udgangspunkt en output-evaluering, men den er skabt med et ønske om at hierarkisere denne evaluering, også med henblik på uddannelsesprocesser. Teorien kan således benyttes til en **måling af output** - hvor komplekst er det foreliggende produkt? Er den studerende i stand til at bevæge sig på alle 6 niveauer? [7]

Taksonomi-niveau	**Eksempler på tilknyttede kompetencer**
1. Viden	Huske, genkende, beskrive og simpelt redegøre for facts, fænomener, ideer
2. Forståelse	oversætte mellem kommunikationsformer, fortolke og uddrage det væsentlige, uddrage konsekvenser
3. Anvendelse	anvende begreber m.m. i situationer hvor deres brug ikke er specificeret, fx i løsningen af åbne problemer
4. Analyse	reducere og analysere elementer af en sammenhæng, analysere sammenhænge og organiserende principper
5. Syntese	fremstille unik kommunikation, udarbejde planer, operationalisere modeller, udlede abstrakte relationer, finde nye mønstre
6. Evaluering - vurdering	evaluere ud fra interne kriterier (usikkerhed, konsistens) eller eksterne kriterier (samfundsmæssige, etiske)

Trinene kan beskrives således:

Kilde: Peter Føge og Bonnie Hegner: ***Primus* – *almen studieforberedelse i grundforløbet.*** Systime A/S 2005

Trin 1 Kendskab

Man skal kunne genkende og gengive stoffet. Man forlanger ikke, at man forstår stoffet, men man skal kunne genfortælle det. Kravet til viden kan naturligvis være mere eller mindre omfattende og mere eller mindre detaljeret.

Trin 2 Forståelse

Forståelse stiller udover ovennævnte krav om viden også krav om, at man med egne ord og eksempler kan forklare stoffet, fx forklare anvendelsen af metoder.

Trin 3 Anvendelse

På dette niveau er det ikke nok at kunne forklare. Man skal kunne demonstrere, at man kan bruge den viden, man har tilegnet sig ved at benytte generelle teorier og metoder i konkrete nye situationer.

[7] http://www.hum.ku.dk/studiereform/Publikationer,%20inspirationsskrifter%20og%20arbejdspapirer/Arbejdspapir%20progression%20og%20kompetencer.pdf

Trin 4 Analyse

En analyse indebærer, at man skal kunne nedbryde en helhed i elementer med henblik på afdækning af relationen mellem enkeltdele og en nærmere undersøgelse.

Trin 5 Syntese

Syntese er det stik modsatte af analyse, idet man ud fra elementer skal kunne danne helheder. Man skal kunne kombinere og se sammenhæng i tingene.

Trin 6 Vurdering

Ved vurdering skal man kunne afveje og bedømme, i hvilket omfang fx løsningsforslag på problemerne er gode eller dårlige. Man skal kunne bedømme forskellige alternativer ud fra fx eksterne og interne vurderingskriterier.

Blooms taksonomi i praksis: Nøgleord

I erkendelse af, at overgangene mellem trinene er flydende, opereres der ofte kun med tre trin, *redegørelse, analyse og vurdering.* I de fleste problemformuleringer vil man skulle arbejde med alle tre niveauer, og det er meget vigtigt, at man er bevidst om, på hvilket niveau man på et hvilket som helst tidspunkt arbejder på.

At arbejde på denne måde kan bl.a. læres ved systematisk øvelse, og da ethvert trin i taksonomien også indeholder de underordnede trin, er det naturligt at starte med redegørelsen.

Redegørelse

- Er **ikke** genfortælling
- Er reproducerende, men
- På baggrund af en udvælgelse
- Skelner mellem væsentligt og uvæsentligt og
- Stiller hvad-spørgsmål

Analyse

- Er en opsplitning i bestanddele, fx en tekst
- Er gruppering af bestanddelene
- Er påvisning af sammenhænge
- Er afdækning af strukturer eller årssagssammenhænge
- Er bearbejdning af viden
- Stiller hvorfor-spørgsmål

Vurdering

- Er en selvstændig stillingtagen
- Er at stille synspunkter op over for hinanden
- Er at overveje for og imod
- Er at sætte et emne i relation til andre synsvinkler og sammenhænge
- Er at reflektere over sit emne
- Stiller hvordan-spørgsmål

Formuleringsmæssige krav

I bedømmelseskriterierne indgår også et egentlige formuleringsmæssige krav:

- *… samt formidlingen af stoffet*

Dette krav er meget åben formuleret og giver derfor vide rammer for udfoldelsen af opgaven, herunder for inddragelse af egentlige journalistiske overvejelser. Opgaven er *også* en formidlingsopgave, hvorfor den ikke nødvendigvis skal skrives i en faktuel akademisk stil. Det er også en kvalitet ved opgavebesvarelsen, hvis opgaven er skrevet i en medrivende og engageret stil. Selv om man i en skriftlig fremstilling normalt bør undgå egentlige følelsesudbrud er engagement og følelser ikke noget, der nødvendigvis skal undertrykkes i forbindelse med rapportskrivningen[8]:

> … Engagement og følelser kan sagtens bruges. Det kan frem for alt skinne igennem i den grundighed, ihærdighed og selvstændighed, man har lagt for dagen i forbindelse med de analyser og vurderinger, der findes i rapporten og i forbindelse med fremstillingen af rapporten. Og det er først og fremmest i den sammenhæng, man skal bruge engagement. Der kan være stor forskel på et produkt produceret under ligegyldighed og et, produceret med aktiv engagement i emnet.
>
> Det er det samme fænomen, der optager Pirsig i bogen "Zen og kunsten at vedligeholde en motorcykel". Et sted er han irriteret over de mekanikere, der reparerer hans motorcykel: "Og så var der deres tempo. De jaskede tingene af sted med en sådan fart, at de ikke lagde mærke til hvor de landede… men mest af alt var der deres ansigtsudtryk. Det er vanskeligt at forklare. De var venlige og afslappede og i godt humør, men de var ligeglade med arbejdet. De mindede om tilskuere. Man skulle tro at de lige var kommet vandrende ind på værkstedet og havde fået stukket en skruenøgle i hånden. De identificerede sig ikke med deres arbejde." (Pirsig 1977, p. 33).
>
> Engagement i arbejdet kan føre til en øget kvalitet, hvis det medfører større omtanke. Små stilistiske trick kan bevirke en forøgelse af denne effekt. Det er et spørgsmål om, hvordan der skrives. Et aktivt engagement kan antydes gennem brugen af aktiv form i rapporten.
>
> Engagement fører til øget kvalitet, hvis du tænker dig om. Små stilistiske trick forøger effekten. Det er et spørgsmål om, hvordan du skriver. Du kan antyde et aktivt engagement ved at bruge en aktiv form i rapporten.
>
> Det var ikke blot en gentagelse. Det var et forsøg på at vise, hvad der sker, hvis man bruger en mere aktiv form. …

Valget af stil og struktur er i høj grad personligt, men selv om opgaven skrives med udgangspunkt i matematik er der ingen grund til at glemme alt, hvad man har tilegnet sig om kreativ skrivning og skriftlig formidling i løbet af gymnasiet.

[8] Det følgende citat stammer fra Verner C. Petersen, Rapportskrivning, systime, 1989, s. 128-129

Endelig bør man tænke over at opgaven er en tværfaglig opgave, der skal bygge bro mellem det humanistiske og naturvidenskabelige område. Selv om det selvfølgelig er oplagt at man i et matematisk studieretningsprojekt benytter sig af det særlige matematiske sprog i form af ligninger, grafer, kurver, tabeller osv. er det også en kvalitet at kunne illustrere den matematiske tankegang ved brug af oplysende billeder/metaforer og andre stilistiske greb, så også læsere, der ikke nødvendigvis selv er på A-niveau med udbytte kan følge tankegangen.

3. Tidsperioder

I dette afsnit er centrale matematisk-opdelte tidsperioder skitseret med en kort beskrivelse af det matematiske og historiske indhold for perioden. For de fleste perioder er der udarbejdet eksempler på problemformuleringer samt en liste af relevant litteratur.

Ægyptisk matematik

Periode: 3000-2000 f.kr.

Matematisk indhold/emner

Tal og talsystemer: Grupperinger af tal ved hjælp af hieroglyffer i sten, 10-talssystem, ikke-positionsystem (repetitionsprincip), skrifttegn, regning vha. grupper; addition let, multiplikation vha. fordobling, brøker skrevet som 1/n (stambrøk) og 2/3 (ikke stambrøk), multiplikation med brøker vha. fordobling

Ligningsløsning: 1. gradsligninger, ingen symboler – rent "verbal" teknik, praktiske problemer. Metode; gæt løsning (evt. forkert) → udlign, ingen bevis. Forstod basale ideer ved lineære forhold.

Geometri: Simple areal og rumfangsberegninger, herunder cirklens omkreds og areal med en tilnærmet værdi for π.

Historisk indhold/vinkel

Flodkulturer: Øvre og nedre ift. Nilen. Ægypten havde en stærk central styring, med et stabilt socialt system. Der var en stor centraladministration med mange embedsmænd, som gennem nøjagtige målinger af vandstanden på forskellige årstider og gennem observationer af himmellegemernes bevægelser for at få faste tidsberegninger, kunne forudsige, hvor, hvornår og hvor meget vandet ville stige det år. Der gik så besked ud til provinsen, om hvor store arealer de kunne tilså. For at kunne holde regnskab og gemme observationerne opfandtes en skrift. Fordi Kongen, kaldet Farao, (gennem sine embedsmænd) kunne forudsige vandets kommen og gåen, blev han af de menige ægyptere betragtet som en Gud. I det gamle rige begravedes faraoerne i mægtige pyramider. Formålet med dette er stadig en gåde. Ligeledes er det uopklaret hvordan ægypterne formåede at bygge pyramiderne, om end der blandt forskere findes forskellige teorier.

Skrift fra ca. 3000 f.kr. Kilder: Papyrus ruller (Rhind), læderruller, gravinskriptioner

Forslag til opgaveformuleringer

Pyramiderne i Ægypten.
Redegør for det Ægyptiske samfunds indretning under Det Gamle Rige; vurder herunder Nilens betydning. Analyser Cheops pyramideanlæggets opbygning med henblik på at klarlægge pyramidens funktion og den matematiske viden der ligger til grund. Analyser Hubert Paulsens og Bent Heick Hansens pyramideteorier med henblik på at forklare de matematiske principper der er anvendt og vurder deres sandsynlighed.[9]

[9] Udarbejdet af fagkonsulenten i historie: Torben Jakobsen.

Flodkulturer: Mesopotamien og Ægypten.
Redegør kort for begrebet flodkultur og foretag en sammenlignende analyse af udviklingen i Babylon og Ægypten frem til ca. 1000 f.kr., med henblik på at forklare forskelle og ligheder i økonomi, politik og ideologi. Analyser den matematiske forståelse i de to flodkulturer og giv eksempler på dens anvendelse.[10]

Ægyptisk brøkregning
Redegør for den ægyptiske samfundsmæssige udvikling med særlig henblik på at diskutere samspillet mellem matematik og samfund.

Redegør for ægyptisk(e) matematik og regnemetoder med udgangspunkt i kilder og med særlig fokus på regning med brøker.

Perspektiver ægypternes regnemetoder i lyset af senere tiders matematiske metoder til regning med brøker.

Ægyptisk areal- og rumfangsbestemmelser
Redegør for den ægyptiske samfundsmæssige udvikling med særlig henblik på at diskutere samspillet mellem matematik og samfund.

Redegør for ægyptisk(e) matematik og regnemetoder med udgangspunkt i kilder og med særlig fokus på bestemmelse af areal og rumfang.

Perspektiver ægypternes regnemetoder i lyset af senere tiders matematiske metoder til bestemmelse af arealer og rumfang.

Litteratur

- http://www.math.tamu.edu/~dallen/masters/egypt_babylon/readings3.htm (Egyptian and Babylonian Mathematics)
- http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Egyptians.html (History Topics: Ancient Egyptian mathematics)
- http://www.246.dk/stamb.html (stambrøker)
- Jesper Frandsen, *Ægyptisk matematik*, Systime 1996.
- Jesper Lund, *Regn med en skriver. Matematik i det gamle Ægypt*en, Munksgaard 1997.
- Richard J. Gillings, *Mathematics in the time of the pharaos*, Dover Science Books, Dover Publications inc., 1982
- Torben Holm-Rasmussen, *Politikens bog om det gamle Egypten.* Forlaget Politiken 2003.

[10] Udarbejdet af fagkonsulenten i historie: Torben Jakobsen.

- Torben Holm-Rasmussen, *Ansigt til ansigt med ægypterne. Forlaget Pantheon 2003.*
- Torben Holm-Rasmussen og Johnny Thiedecke, *Pyramider og Pionerer. Det gamle rige og dets udforskning.* Forlaget Pantheon.
- Dansk Ægyptisk Selskab: http://www.daes.dk/indhold.html
- http://abbass.nik.person.emu.dk/matgen.htm
- Desuden findes der mange verdenshistorie-bøger, hvor der findes større eller mindre afsnit om det gamle Egypten.
- Bent Heick Hansen, *Om at bygge pyramider med snor.* Sfinx 11,1. Århus 1988.

Se også kildesamlingerne mm. i litteraturlisten (bilag 1), hvoraf mange indeholder afsnit om ægyptisk matematik:

Babylonsk matematik

Periode: 3000-1000 f.kr.

Matematisk indhold/emner

Tal og talsystemer: 60-tals positionssystem med grupperinger, ingen ”komma”, intet 0 (kun tom plads). Regning med * og / ved hjælp af 9-tals tabel og reciproktabeller. Regning med + og – fremgår ikke af kilder (måske regnebræt). Gode approksimationer af transendente tal som kvadratroden af to ved hjælp af algoritme.

Ligningsløsning: 2. gradsligninger uden symboler – rent ”verbal” teknik. Specifikke praktiske problemer (geometriske) – intet bevis for løsning. Algebra på højere stadie end Ægypten. To ligninger med to ubekendte løses ved gæt.

Historisk indhold/vinkel

Flodkultur. Central styring, hvor landbruget sættes i system med kunstvanding, og der indføres et lovsystem. Talsystem og Kileskrift opfindes, og bruges i rigt mål til at samle og udvikle riget. Hovedstaden Babylon verdens største by, hvor flere videnskaber blev praktiseret. Kilder: De såkaldte Hamurabi-love, der er skrevet på lertavler 3000 f.kr. og matematiske tekster.

Forslag til opgaveformuleringer

Flodkulturer: Mesopotamien og Ægypten. Redegør kort for begrebet flodkultur og foretog en sammenlignende analyse af udviklingen i Babylon og Ægypten frem til ca. 1000 f.kr., med henblik på at forklare forskelle og ligheder i økonomi, politik og ideologi. Analyser den matematiske forståelse i de to flodkulturer og giv eksempler på dens anvendelse. [11]
Babylonsk matematik: løsning af første og anden grads ligninger Redegør kort for den babylonske samfundsmæssige udvikling med særlig henblik på at diskutere samspillet mellem matematik og samfund. Redegør for babylonsk(e) matematik og regnemetoder med udgangspunkt i kilder og med særlig fokus på løsning af ligninger af første og anden grad. Perspektiver babyloniernes metoder til løsning af ligninger af første og anden grad i lyset af senere tiders matematiske metoder.

Litteratur

- http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Babylonians.html (History Topics: Babylonian mathematics)
- http://www.math.tamu.edu/~dallen/masters/egypt_babylon/readings3.htm (Egyptian and Babylonian Mathematics)
- Jens Høyrup, *Algebra på lertavler*, Århus 1998

[11] Udarbejdet af fagkonsulenten i historie: Torben Jakobsen.

- Edward Chiera, *De skrev i ler.* (C.A.Reitzel)1957.
- O.E. Rav m.fl.. *Babylon studier.* (museum tusculanums forlag 1978.
- http://abbass.nik.person.emu.dk/matgen.htm
- Desuden findes der mange verdenshistorie-bøger, hvor der findes større eller mindre afsnit om Babylon.

Se også kildesamlingerne mm. i litteraturlisten (bilag 1), hvoraf mange indeholder afsnit om babylonsk matematik:

Græsk matematik

Periode: 600-0 f.kr.

Matematisk indhold/emner

<u>Tal:</u> *Pythagoræerne*; Alt er (hele) tal, talmystik, pythagoræiske tripler, krise pga. inkommensurable størrelser, indså ikke forskel på tal og størrelser. *Euklid* (”Elementerne, bog 7-9”); definitioner, postulater, axiomer, adskiller tal og størrelser, med størrelse udledes proportionslære (#5 og 6), talteori (#7-9). *Aristoteles* (384-322 f.kr.); Elev på Platons akademi, logik, størrelser kan divideres uendeligt, tal endelig divisible og samling af enheder. Regning med regnebord, stambrøker som i Ægypten.

<u>Ligningsløsning:</u> To ligninger med to ubekendte; ”Geometrisk algebra”, problemstillinger geometrisk formuleret og bevist (axiomatisk deduktion). Diophanstiske ligninger.

<u>Geometri:</u> *Thales* (624-547 f.kr.); Geometriske sætninger. *Plato* (429-347); Axiomatisk deduktiv metode til matematik, ideelle objekter i stedet for reelle (idealisme – skyggen på hulevæggen), geometri teoretisk ikke praktisk, eksakthed ikke approksimation, akademi i Athen. *Euklid* (”Elementerne, bog 1-6 og 11-13”); definitioner, postulater, axiomer, sætninger, plangeometri, proportionslære, 3-dim geometri og polyeder.

<u>Mekanik/teoretisk fysik:</u> *Archimedes* (287-212 f.kr.); Loven om vægten, idealisering af fysiske fænomener, matematisk vægt; vægtløs, konsistent.

<u>Diskussion af geometrisk algebra.</u> *Ungurus* (1975-76); ser intet algebraisk i bevis for Euklid II5. ”Whig History”: Vi kan ikke frigøre os fra nutidens viden ved at tænke algebra ind i geometrien. Der ingen spor af ligninger det er rent geometrisk (visuelt). Der er ingen symboler og regning med disse. Bare fordi det kan omskrive til algebra betyder det ikke at det er algebra. *Van der Waerden* (1975-76); ikke så dum at bare fordi det kan forstås algebraisk at det så er algebra, de geometriske problemer isoleret giver ingen mening praktisk, sætninger decideret algebraisk formuleret i ord uden symbolik.

Historisk indhold/vinkel

Bystyre – monarkier eller demokratiske. Ingen central styring. Geografi svarer til nutid. Statsmagten var ikke afhængig af total kontrol med borgerne, hvorfor nye tanker indenfor videnskaber ikke var politiske farlige. Dette fik videnskaben til at blomstre, og især er oldtidens Grækenland kendt for at have frembragt flere genier inden for videnskab og filosofi.

Enkeltdiscipliner inden for naturvidenskaben grundlægges. Aristoteles systematiserede ”Induktion og deduktion”.

Krav til stringens ikke bare i matematik men også udtryk for korrekthed. Sammenhæng mellem filosofi og matematik. Begyndte at stille spørgsmål – accepterede ikke det givne. Matematik den primære videnskab. Argumenterer for sin teori. Kilder: Kopier af bøger (Euclid) – tidligste fra 300 f.kr. Pythagoræerne fra 540 f.kr.: Religiøst og filosofisk broderskab/skole, disciple, matematik – det der skal læres. Græsk matematik uddøde med romerrigets tilbliven.

Forslag til opgaver

Pythagoræerne Redegør kort for den samfundsmæssige udvikling i Antikken i Grækenland med særlig henblik på at diskutere samspillet mellem matematik og samfund i perioden. Redegør for græsk(e) matematik og regnemetoder med udgangspunkt i kilder og med særlig fokus på kommensurable og inkommensurable størrelser. Vurder konsekvensen af grækernes forståelse og anvendelse af deres talsystem.
Pythagoræerne Redegør kort for den samfundsmæssige udvikling i Antikken i Grækenland med særlig henblik på at diskutere samspillet mellem matematik og samfund i perioden. Redegør for græsk(e) matematik og regnemetoder med udgangspunkt i kilder og med særlig fokus på geometrisk løsning af ligninger af første og anden grad. Perspektiver grækernes metoder til løsning af ligninger af første og anden grad i lyset af senere tiders matematiske metoder.

Litteratur

- http://www.emu.dk/gym/fag/ma/undervisningsforloeb/paradigmatiske/not/n117,127a,314.pdf (Bjørn Grøn: Fra græsk geometri til moderne algebra)

Kinesisk matematik

Periode: fra 1500 f.kr.

Matematisk indhold/emner

Tal: 10-tals ikke-positionssystem… senere positionssystem (fra år 0-700), negative og positive tal udtryk ved farver, ”0” fra 700, regning med kinesisk regnebræt, brøker ved fællesnævner, regning med decimaler, god approksimation af pi. Jiu Zhang Suanshu (omkring 200-0 f.kr. under Han-dynasti). Regnekunstens ni bøger (ukendt forfatter). Eksakthed og tilnærmelse adskilles ikke.

Ligningsløsning: Lineære ligningssystemer i Jiu Zhang Suanshu. To ligninger med to ubekendte – løses vha. forkert gæt to gange (som Babylonierne). Ligningssystemer for løsning af n ligninger med n ubekendte (art matrice regning, vendt 90 grader – Gauss elimination, regning med hele tal). Konkrete problemer uden geometri og bevis.

Historisk indhold/vinkel

Kinas historie er karakteriseret ved, at den er delt op i en række afgrænsede perioder med hver sin Dynasti som ledende; alle med en stærk centralmagt. Kina havde et meget højt befolkningstal. Dynastierne havde deres opgang og nedgang, og der var derfor lidt skiftende stabilitet og også nogle krige, men historien er mest præget af stabilitet. Samfunds-, kultur-, og religions-udviklingen er noget forskellig i de enkelte perioder. Overordnet set havde Kina dog en god økonomi, en stærk administration og teknologisk fremgang med mange opfindelser, der gik århundreder forud for Europa.

Kinesernes syn på sig selv var, at de som riget i midten, intet kunne lære af andre, men havde nok i sig selv, hvorfor de heller ikke forsøgte at udbrede deres viden til andre lande. Bevarelse af traditioner havde højeste prioritet. Historiesynet i Kina var, at historien går i ring. Historien gentager sig, og fremtiden er nærmest fastlagt. Flere historikere mener, at det har bremset udviklingen i Kina, set i forhold til vesten.

Kilder: Ben-inskriptioner med talsystem. Kalendervæsen.

Forslag til opgaveformuleringer

Riget i midten

Redegør for kinesisk(e) matematik og regnemetoder og med særlig fokus på lineære ligningssystemer.

Redegør for den samfundsmæssige udvikling i Kina som ”riget i midten” med henblik på at diskutér den videnskabelige udvikling set i forhold til den datidige omverden.

Perspektiver kinesernes lineære ligningssystemer til nutidige systemer.

Litteratur.

- http://www.internettrash.com/users/tnla/kina.html
- Rudi Thomsen, *Oldtidens Kina.* Nørhavens Bogtrykkeri 1983.
- A.ST. Langeland, *Kina, Japan og Korea.* Politikens forlag 1977.
- Erling Bjøl, *Politikens Verdenshistorie bd. 6.* Polikens forlag 1983.

- Kinaportalen. *http://kina.emu.dk/*
- "Kinesiske religioner og livsformer" af Poul Andersen, Simon Heilesen og Birthe Mølhave. Gyldendal 1990.

  Kapitel 1, som handler om Kinesisk historiesyn, hvilket er yderst relevant for at forstå kinesisk tankegang.
- Desuden findes der mange verdenshistorie-bøger, hvor der findes større eller mindre afsnit om Kina. Fx Ebbe Kühles *Hvorfra, hvorhen, hvorfor – en verdenshistorie, 1998.*

Indisk matematik

Periode: 250-700 (datering problematisk)

Matematisk indhold/emne

Tal: Brahimi; 10-tals ikke-positionssystem… senere positionssystem (fra ca. 600-700) hvor regning bliver let uden risiko for sammenblanding af tal. Prik som repræsentant for 0 (i stedet for tom plads). Eksakthed og tilnærmelse adskilles ikke.

Ligningsløsning: Algoritmer til løsning af 2. gradsligninger (uden bevis)

Historisk indhold/vinkel

Indien har altid ligget på den euroasiatiske hovedvej for handlen mellem Europa og Øst asien. Flere gange er det da også sket, at Indien er blevet erobret af fremmede riger. Men påvirkning udefra har aldrig rigtig slået igennem, for inderne levede bare videre, som de altid havde gjort. Religionen spillede en enorm rolle i det indiske samfund, hvor jordiske anliggender blev prioriteret lavt. Sammen med kastesystemet medførte det, at Indien økonomisk og teknologisk altid har været meget mere tilbagestående end fx nabolandet Kina. Der er heller ikke noget som tyder på, at Indien selv søgte ud i verden.

Indien var ikke et samlet rige på noget tidspunkt, og udviklede derfor aldrig nogen stærk centralmagt. Det nordlige Indien bestod dog indtil år ca. 700 af en række magtfulde riger og kongedømmer.

Forslag til opgaveformuleringer

Indisk videnskab og regionshistorie

Redegør for indiske(e) matematik og regnemetoder og med særlig fokus på talsystemet.

Redegør for den samfundsmæssige udvikling i Indien med særlig vægt på den religiøse betydning for den videnskabelige udvikling.

Perspektiver det indiske talsystem set i forhold til den senere udvikling.

Litteratur

- http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Zero.html (A history of Zero)

- http://indiensportalen.emu.dk/fag/hi/hi.html

- Ansigt til ansigt med inderne. Religion - historie - samfund. Af Kirsten Egeberg, Lona Lerberg, Johnny Thiedecke. 195 sider, 17,5 x 24,5 cm. Med 61 illustrationer (37 i farver). Pris kr 230,00. [Udgivet 2006]
- Langeland og Holmboe, *Indien og Sydøstasien.* Politikens forlag 1971.
- Desuden findes der mange verdenshistorie-bøger, hvor der findes større eller mindre afsnit om Indien. Fx Ebbe Kühles *Hvorfra, hvorhen, hvorfor – en verdenshistorie, 1998*

Arabisk matematik (islamisk matematik)

Periode: 600-

Matematisk indhold/emner

Tal: Før 600; to talsystemer (gadeplan og skrift). Al-Khwarizmi (780-850); 10-tals positionssystem (fra Indien), karakterer for 1,..9 og 0, beskriver algoritme med +, -, *, /, ½, 2 og kvadratrod. Brøker 1/n som i Ægypten. Hjælpemiddel: Sandbræt.

Ligningsløsning: Al-Khwarizmi (780-850); 1. og 2. grads ligninger, positive koefficienter og rødder (ikke størrelser), ”opskrift” på løsning (*algoritme*), seks typer 2. gradsligninger, geometrisk bevis. Al-Khayyami (1100); 14 typer 3. gradsligninger løses ved keglesnit.

Historisk indhold/vinkel

Muhammeds erobringer (570-632) samlede de arabiske riger til et rige, der hovedsaglig kun havde en religion – Islam. Efter Muhammeds død, opstod der både politisk og religiøs splittelse. Men gældende var det, at islamisk kultur og tro (trods splittelsen mellem især sunnier og shiitter) virkede som en samlende faktor for de arabiske riger.

De arabiske riger tillærte sig meget lærdom i forbindelse med islams ekspansion; især antikkens viden. Den arabiske tolerance betød endvidere at den græske erfaringsvidenskab forsat udviklede sig. Senere stagnerede arabernes ”tørst” efter mere viden og under opdagelserne lærte europæerne meget mere af de arabiske lande end omvendt.

Særlig kendt er ”Visdommens hus i Bagdad” (750). Gud og læring (opfordring). Kilder; Oversættelser af indisk og græsk matematik (fra 750), fra 850; egen udvikling.

Forslag til opgaveformuleringer

Arabisk (islamisk) matematik

Redegør kort for Muhammeds erobringer og islams udbredelse med særlig henblik på at diskutere samspillet mellem matematik og samfund i perioden.

Redegør for arabisk (islamisk) matematik og regnemetoder med udgangspunkt i kilder og med særlig fokus på ligningsløsning.

Perspektiver arabernes metoder til ligningsløsning i lyset af senere tiders matematik.

Litteratur

- Ivan Tafteberg, ”Den arabiske matematiks bidrag til løsning af andengradsligninger”
- Kirsti Andersen, ”Omar Khayyam og geometrisk løsning af tredjegradsligninger” fra *Kilder og kommentarer til ligningernes historie*, ed. Kirsti Andersen, Vejle 1986, 85-100, 110-117
- http://islamic.dk/modules.php?name=videnskab

Europæisk matematik

Periode: Fra 1400-1600

Matematisk indhold/emner

<u>Tal:</u> *Middelalderen*; Misforståelse af tal og egenskaber (modstrid af Isidore af Sevilla – 7.århundrede). *Renæssancen*; Hindu-arabiske tal fra 1500 (langsom indføring, står overfor Græsk Abakus og Romertal), regnetricks og numeriske metoder. Forståelse af græske og arabiske værker. Stevin; decimaltal, adskiller tal og størrelser, alle tal kan deles, regneregler for decimaltal, enhed er et tal, kvadratrod af 8 er et tal. Logaritme (formål: at gøre regneoperationer mere simple ved at transformere "*" til "+"). Regnemaskiner (Pascal og Leibnitz).

<u>Ligningsløsning:</u> Cardano (givet af Tartaglia i form af et vers (1539), oprindeligt bestemt af Ferro (1500-1515)); generel løsning på 3. gradsligning i "Ars Macna" (1545) geometrisk (terning) bevis, 4. gradsligning (Ferrari). Bomelli; komplekse (imaginære) løsninger til 3. gradsligninger. Notation forbedres (Viete og Descartes) medfører ny indsigt. Abel (1802-1829, dør af sygdom); 5. gradsligning ingen generel løsning. Evariste Galois (1811-1832, dør i duel); ingen generel løsning til n'te gradsligninger større end eller lig 5.

<u>Kortlægning:</u> Bredde og længdesejlads. Landmåling. Navigation

Historisk indhold/vinkel

Renæssancen. Før renæssancen var Middelalderen, hvor Kirken var centrum for stort set alt. Kirken – eller klostrerne - "sad" på al viden, hvorfor Videnskaber som fx Matematik blev næsten glemt. Oversættelse af græske og arabiske værker fandt sted – blev færdige i 1100 tallet, men var ikke kendt uden for klosterverden.

1400-1600: Renæssancen. Genfødsel af den antikke tradition med fokus på kultur og videnskaber. Opdagelsesrejser gav gammel/ny viden udefra. Mange opfindelser som fx Bogtryk (1456). Kirkens såvel åndelige som videnskabsmæssige monopol blev brudt, og forskning inden for naturvidenskaberne begyndte igen. Reformationen akkumulerede dette. Individualismen var en del af renæssancens ideverden.

Forslag til opgaveformuleringer

Renæssancens europæiske matematik
Redegør for den samfundsmæssige udvikling i Europa under renæssancen med særligt henblik på at forklare den naturvidenskabelige udvikling. Diskuter forskellige opfattelser af renæssancebegrebet. Analyser matematiker "Børge" og "Kurts" bidrag til matematikkens udvikling og vurder deres opdagelsers betydning på kort og på langt sigt.[12]

Litteratur

- Matematik i Danmark 1500-1700. Af Malene Marie Bak. Med 13 illustrationer. Pris kr 55,00. [Udgivet 2003], http://www.fagboginfo.dk/Ientre/ientree.htm

- Flemming Clausen m.fl. *Skabt til at skabe.* Aschehoug 1990.

[12] Udarbejdet af fagkonsulenten i historie: Torben Jakobsen.

Europæisk matematik – den naturvidenskabelige revolution

Periode: Fra 1600

Matematisk indhold/emner

Analytisk geometri: *Fermat* (1601-1665). *Descartes* (1596-1650); "La Geometrie", strin-gens, moderne notation, cartesiske koordinatsystem, fortegnsregel. Program; geometrisk problem → ligning(er) → algebraisk reduktion → ligning → konstruktion af løsning, geo-metriske problemer skal have geometriske løsninger – regning i geometri skal give me-ning, fik Fermats arbejde inden publikation af egen bog. Både Fermat og Descartes for-stod forholdet mellem en geometrisk kurve og en ligning i to variable.

Ligningsløsning: Algebraens fundamentalsætning (Girard og Descartes).

Infinitesimalregning: Bestemmelse af arealer og volumener (+ tangenter), tidligere udreg-net for bestemte figurer vha. bl.a. exhaustionsmetoden. *Kepler*; infinitesimaler. *Cavalieri* (1598-1647); indivisibler udvikles efter Galileo Galilei – opdel figur i objekter der er en dimension lavere. *Roberval*; Indivisibler – Cycloiden, udleder tangent og areal. *Barrow* (1630-1677); Sammenhæng mellem tangenter og arealer (differentialregning og integral-regning). *Wallis*; "Arithmetica intinitorum".

Historisk indhold/vinkel

Matematik udvikling accelererer.

Trykning etableret. Kommunikation vha. breve ol. forøges, og hjælper kraftigt til udvik-ling af videnskab. Kirkens magt svækkes yderligere (især mod nord). Den verdensom-spændende handel slår igennem, som giver økonomisk vækst i Europa samt mulighed for at "suge" viden til sig fra andre dele af verdenen.

De økonomiske centre flytter fra Sydeuropa til Frankrig, Holland og England. Enevælden indføres overalt bortset fra England og Holland. Akademier erstatter universiteter (kirke). Forventning om at videnskab er fremmende for handel og industri, gør at statsmagten ofte støtter videnskaben betydeligt. Den naturvidenskabelige revolution sker i denne pe-riode. Inden for astronomi fastslås at; Solen er centrum – ej jorden. Matematik inspireret af fysik.

Forslag til opgaveformuleringer

Infinitesimalregning

Redegør kort for den naturvidenskabelige revolution med særlig henblik på at diskutere samspil-let mellem matematik og samfund i perioden.

Redegør for infinitesimalregning til bestemmelse af arealer, volumener og tangenter.

Perspektiver infinitesimalregning til senere tiders differential- og integralregning.

Litteratur

- http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/ (Matematik historie specielt 1600 og 1700 – tals matematik)

- Matematik i Danmark 1500-1700. Af Malene Marie Bak. 51 sider, 15 x 21 cm. Med 13 illustrationer. Pris kr 55,00. [Udgivet 2003], http://www.fagboginfo.dk/Ientre/ientree.htm
- A.K. Erlang og teletrafikken. Af Bjarne Kousholt. 101 sider, 13 x 21 cm. Med 36 illustrationer. Pris kr 98,00. (Serie: Idéernes bagmænd), http://www.fagboginfo.dk/Ientre/ientree.htm

Europæisk matematik – differential- og integralregning

Periode: Fra 1600

Matematisk indhold/emne

Isaac Newton (1642-1727): Fysiske objekter, fluxion (hastighed) og fluent. Kontinuert opfattelse. Fluxionsregning tæt knyttet til uendelige potensrækker – indset ved at læse Wallis og generalisere ved hjælp af Pascals trekant, bevis vha. infinitesimaler (ingen grænseværdibetragtninger – ren intuition), regner ikke med afledede – har ikke funktionsbegreb, kæderegl. Integration; bestemme forhold mellem fluenter giver forholdet mellem fluxionerne – omvendt procedure. Maksimum og minimum bestemmes ved at sætte relevant fluxion lig nul.

Gottfried Wilheim Leibniz (1646-1716): Læste Pascal og Descartes, interesseret i god notation. Sum og difference – inverse. Differentialer dx. Diskret opfattelse. Regneregler bevises; da dx og dy lille regnes ved substitution af x og y til x + dx og y + dy. Maksimum og minimum når tangent horisontal.

Biskop Berley (1734); ”The analyst”, kritik af analysens grundlag, vantro matematikere – division med v forskellig fra 0 og eliminerer led med v dvs. 0 = 0!

Historisk indhold/vinkel

Oplysningstiden, med tro på at verdens sammenhæng var forståelig og tilgængelig for mennesket, og at alle forandringer kan føres tilbage til simple og få matematiske love. Mennesket skulle blot forstå og erkende mere og mere i en rationel tilgang til naturvidenskaberne. Newton arbejdede ud fra dette syn.

Prioritetsstrid: Hvem opdagede differentialregningen og integralregningen, udvalg nedsat af Newton med Newton som formand – Leibnitz taber strid. England kom bagud i udviklingen af matematikken da de anvendte fluxionsberegning frem til 1830.

Forslag til opgaveformuleringer

Europæisk matematik – differential- og integralregning

Redegør for Newtons og Leibnitzs differential- og integralregning.

Der ønskes en redegørelse og analyse af prioritetsstriden om hvem der opdagede differential- og integralregningen.

Perspektiver Newtons og Leibnitzs differential- og integralregning til senere tiders matematiske metoder/regning.

Litteratur

- http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/ (Matematik historie specielt 1600 og 1700 – tals matematik)
- http://www.geomat.dk/landmaaling/kildetekster/bugge.htm (Thomas Bugge (1740 - 1815))
- Johnny Thiedecke, *Oplysningstiden.* Borgens forlag 1989.

Matematikken i Frankrig

Periode: 1770-1850

Matematisk indhold/emne

Monge: École Poletechnique, 1794, reformere undervisningen I flåden. Lærerbøger

Lagrange (1736-1813): Lærebøger, søger præcis definition af differentialregning, enhver funktion skrives som potensrække, udvikler Taylor-rækker.

Lacroix: Lærerbøger, udgangspunkt for differentialregning er grænseværdi – ej længere tangentlinie, ingen geometriske illustrationer, tangenter biprodukt, alle funktioner som Taylor-rækker.

Cauchy (1789-1857): Ej tilfreds med fundament for Taylor-rækker – fandt funktioner der ikke konvergerede mod funktionen, funktionsbegreb, grænseværdibegreb, kontinuitet, afledede og integraler med udgangspunkt i grænseværdibetragtning (integraler ikke kun invers til differentialer), konvergens/divergens, første stringente bevis for analysens fundamentalsætning.

Fourier (1768-1830): rækker kun for varmeledningsfunktioner, udtrykker funktion ved trigonometriske funktioner – kun mht. sinus.

Dirichlet (1805-1859): Fra Tyskland til Frankrig, nødvendig betingelse for at Fourier række konvergerer.

Historisk indhold/vinkel

Revolutionernes århundrede, herunder også ”Den naturvidenskabelige revolution”. Økonomiske modeller udvikles, hvoraf især liberalismen slår igennem. Det medfører liberalisme indenfor politik, med en dertil hørende frihed til at tænke ”anderledes”, der kunne ende i et opgør med fortiden eller det gængse.

Trykning etableret. Kommunikation vha. breve ol. forøges. Kirkens magt svækkes. Akademier erstatter universiteter (kirke). Matematikken udøvet i militære akademier. Monarkiske institutioner. Udøvere af matematik i Frankrig før revolutionen: Fermat og Descartes (fritidsbeskæftigelse). Fransk revolution medfører nedlukning af universitetet og militær akademier (monarkisk styrede) 1794. Monge, Laplace og Legendre underviste på militære akademier. Standardisering ved metersystemet, medlemmer; Laplace, Lagrange, Monge. Generelt om lærebøger; stringens forøget dog stadig uklarheder, grænseværdi grundlæggende, kontinuitet, forankring i de reelle tal.

Ikke-Euklidiske geometri

Periode: 1770-1850

Matematisk indhold

Euclid (360 f.kr.): Parallel postulatet (5. postulat), kritik; postulater skal være selvindlysende – det er P5 ikke, Euclid beviser ikke postulat.

Girolamo Saccheri (1667-1733): Forsøger at bevise P5 – men cirkelslutning.

Johann Lambert (1728-1777): Læst dele af Saccheri, arbejder med egenskaber ved ikke Euklidisk geometri.

Euler (1707-1783): Parametricerer kurver i rummet, krumning, radius af krumning

Gauss (1777-1855): Krumninger centrale for studie af flader.

Lobachevsky (1792-1856) og Bolyal: Ikke Euklidisk geometri, udleder mange trigonometriske relationer der opfylder standard Euklidiske formler, sfæriske trigonometriske relationer med imaginær radius. Deres resultater ikke behandlet før 1860'erne – svær at acceptere og forstå (desuden udgivet i "små" tidskrifter).

Helmholtz (1821-1894): Nyt generelt system for geometri, rummet som n-dimensionel mangfoldighed

Grassmann (1809-1877): Definerer n-dimensionalt rum hvor n > 3, krydsprodukt, linearkombination, vektorrum, indre produkt, basis for lineært uafhængige vektorer.

Hilbert: Centrale spørgsmål om formelle systemer; konsistens, fuldstændighed, afgørlighed.

Gödel (1931): Ufuldstændighedssætningen; ethvert formelt system, der omfatter aritmetikken og som er konsistent, er ufuldstændigt.

Historisk indhold/vinkel

Det enkelte menneskes betydning for matematikkens udvikling.

Litteratur

- Matematikkens uendelige univers. Af Vagn Lundsgaard Hansen. 128 sider, 17,5 x 24,5 cm. Ill: 20 farvefotos, 22 tegninger (6 i farver), 76 figurer. Pris kr 100,00 (ib.). [Udgivet 2002], http://www.fagboginfo.dk/kentre/kentrem.htm

- http://www.matematiksider.dk/sfaere.html (*Tillæg til sfærisk geometri* (75 kB))

Kvinder i matematikken

Periode: !

Matematisk indhold/emne

Hypatia fra Alexandria: *Hypatia* (ca. 370 - 415) er en af de tidligst kendte kvinder, der bidrog til matematikkens udvikling. Selv om alle Hypatias arbejder er gået tabt, så viser studier i græske, arabiske og middelalder latinske skrifter, at hun må have været ansvarlig for adskillige matematiske skrifter, hvor hun kommenterede klassiske værker af berømheder som*Arkimedes* ("Cirklens udmåling"), *Apollonius* ("keglesnit") og *Diophant* ("Arithmetica").

Maria Agnesi (1718 - 1799): Var den ældste datter af en rig købmand fra Milano. På et tidspunkt besluttede hun at skrive en lærebog i blandt andet algebra og differential- og integralregning med det formål, at den skulle komme den italienske ungdom til gode.

Sophie Germain (1776 – 1831): Leverede bidrag til matematikken inden for flere områder: Fermats sidste sætning, talteori, matematisk fysik (elasticitet). Også inden for filosofi gjorde hun sig gældende. Hun var den mellemste datter af en rig silkehandler ved navn *Ambroise-François* og moderen *Marie-Madelaine Gruguelin.* Sophie var altså selvlært og hun fulgte aldrig et egentligt professionelt undervisningsforløb. Germain henvendte sig også til en anden af de store matematikere, nemlig *Legendre*, angående nogle problemer, som denne havde skitseret i sit værk fra 1798, *Essai sur le Théorie des Nombres*. Brevvekslingen betød, at Legendre senere offentliggjorde nogle af Germains opdagelser i et supplement til den anden udgave af sin bog. Sophie Germain havde skrevet det under med pseudonymet M. LeBlanc, for at forhindre fordomme på grund af hendes køn!

Historisk indhold/vinkel

Kønsmønster med kvinden som det svage køn. Ikke alene fysisk men også åndeligt og intellektuel. Og ikke alene var hun ikke egnet til at beskæftige sig med videnskaber, det var også nedbrydende for en kvinde.

Forslag til opgaveformuleringer

Kvinder i matematikken

Der ønskes en redegørelse for Sophie Germains arbejde med Fermats sidste sætning.

Der ønskes en redegørelse og analyse af Sophie Germains muligheder for at begå sig i den naturvidenskabelige verden i sin samtid.

Diskuter Sophie Germains betydning for såvel matematikkens senere udvikling – som kvinders arbejde inden for videnskab.

Litteratur

- http://www.matematiksider.dk/kvinder.html (Kvindelige matematikere)
- http://www.matematiksider.dk/kvinder/germain_note.pdf (*Note om Sophie Germain*(1,22 Mb))
- Louis L Bucciarelli og Nancy Dworsky: Sophie Germain

Bilag 1 – Litteratur

Den følgende litteraturliste på 45 referencer (og en enkelt netside) kan i sagens natur ikke være udtømmende. Men der skulle være tilstrækkeligt mange referencer til at man dels kan søge videre i litteraturhenvisningerne fra de nævnte værker, dels kan være sikker på at man kan finde et meget bredt inspirationsmateriale til studieretningsprojekter om historiske matematik dækkende et bedt udvalg af perioder og emner. Listen kan også tjene som inspiration og udgangspunkt for opbygningen af en historisk afdeling på skolerne matematikbiblioteker.

Generelle oversigtsværker over matematikkens historie

1. Katz, V. J.; ***A History of Mathematics – An Introduction***, second edition, Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., 1998.
   Bogen er kronologisk opbygget. Indenfor hver periode er materialet opdelt i emner hvilket giver mulighed for at læse om et bestemt emne i forskellige perioder, f.eks. ligningsløsning på langs. Indenfor hver periode diskuteres de kildetekster som er vigtige for forståelse af matematikken i perioden. Bogen indeholder et omfattende materiale og behandling af andre kulturers matematik, ikke mindst kinesisk, indisk og islamisk matematik. Bogen indeholder biografier af mange matematikere inklusiv flere kvindelige matematikere. Bogen dækker følgende emner: Ligningsløsning, regnemetoder, geometri, trigonometri, astronomi, kombinatorik, sandsynlighed, statistik, lineær algebra, talteori og moderne algebra. Den udmærker sig desuden ved at indeholde fyldige opgaveafsnit til de enkelte perioder.

2. Kline, Morris: **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**, Oxford University Press, 1972.
   Bogen er en kronologisk opbygget matematikhistorie, der belyser alle de væsentlige sider af matematikkens historie uden at vige tilbage for tekniske detaljer. Bogen rummer bl.a. mange læseværdige afsnit om analysens historie. Der er biografier af væsentlige matematikere og gode afsnit om den historiske udvikling af væsentlige matematiske begreber, fx funktioner. Specielt afsnittene om den moderne matematiks historie er mange steder skrevet på Universitetsniveau.

3. Swetz, Frank J. (ed.): **From Five Fingers to Infinity – A Journey through the History of Mathematics**, Open Court, 1995.
   Bogen er en kronologisk fremstilling af matematikhistorien sat ind i en social og kulturel sammenhæng, opbygget som en collage af over 100 uafhængige artikler skrevet af forskellige forfattere. Bogen er tiltænkt et alment publikum og er derfor let tilgængelig på gymnasieniveau. Der lægges stor vægt på andre kulturers bidrag til matematikken.

4. Kline, M.: ***Mathematics – The loss of certainty***, Oxford 1982.
   Bogen følger et bestemt aspekt af matematikkens udvikling fra Pythagoræerne til i dag: Matematikken som bærer af den sikre sande viden. Bogen behandler de fundamentale/dramatiske ændringer der er sket i vores opfattelse af matematikken som garant for sikker viden. Matematikken blev anset som toppunktet for eksakt viden som kunne forklare naturens opbygning, men vi ved i dag af matematikken desværre ikke besidder de kvaliteter som tidligere nød universelt respekt og beundring.

Samlinger af kildetekster

5. Fauvel, m.fl.: ***The history of mathematics – a reader***, The open university 1987.

Målet med bogen har været at samle betydende eksempler på matematisk praksis gennem tiderne. Teksterne i bogen er udvalgt fra et bredt udsnit af kilder for at vise matematikkens oprindelse og udvikling fra de tidligste tider til det tyvende århundrede. Bogen viser matematiske aktiviteter i de relevante sammenhænge, og den inkluderer ikke blot de "offentlige" matematiske tekster og diskussioner, men også breve udvekslet mellem matematikere, uddrag fra dagbøger og biografiske beskrivelser. Bogen inkluderer desuden et antal digte og uddrag fra skuespil og noveller som belyser opfattelsen af matematikken og matematikere i forskellige perioder.

6. Lützen, J. og Ramskov, K.: ***Kilder til matematikkens historie***, 2. udgave 1999, Matematisk Afdeling, Københavns Universitet.
   Korte uddrag af matematiske kildetekster spredt over tidsperioden fra ca. 1800 f.Kr. til omkring 1872, hvoraf mange foreligger i en dansk oversættelse, mens resten er på engelsk. Der er en kort introduktion til hver af teksterne, der bl.a. nævner forfatteren samt hvorfra teksten er taget. Til hver tekst er der en række spørgsmål, hvis formål det er at lede læseren på sporet af tekstens betydning i matematikkens historie. Teksterne sættes ikke ind i en historisk sammenhæng, så det vil være nødvendigt at supplere kildeteksterne med en generel viden om tekstens placering i matematikkens historie.

7. Hawking, Stephen: ***God created the integers***, Penguin 2005.
   En sammensætning af forfatterens personlige valg af tekster til belysning af de største matematiske resultater i historien over en periode på 2.500 år fra Euclids geometri til Newtons regnemetoder, fra Laplaces sandsynligheder til Booles logiske kalkuler. Bogen inkluderer originale matematiske tekster med beviser for centrale sætninger, heraf flere i nye oversættelser. Hver kilde indledes med en generel omtale af den pågældende matematiker og den tid han virkede i og sammenhængen med den tidligere udviklede matematik. Bogen giver således mulighed for at forstå udviklingen af matematikken op igennem historien og viser hvorledes hver af de skildrede matematikere bygger deres resultater på tidligere viste resultater i en lang kæde helt tilbage til Babylon og Grækenland.

8. Struik, D.J.: ***A source book in mathematics 1200-1800***, Princeton University Press1986.
   Udvalgte kildematerialer der dækker perioden hvor fundamentet for aritmetikken, algebraen, den analytiske geometri og differentialregningen blev lagt. Bogen inkluderer velkendte materialer som fx dele af Cardans "Ars Magna", Descartes' "Géométrie", Eulers "Methodus inveniendi" og grundlæggende tekster af Newton og Leibniz. Hvert uddrag indledes historiske og matematisk. Bogen giver gode muligheder for fordybelse i kildematerialer fra perioden 1200-1800.

9. Aaboe, Asger: ***Episoder fra matematikkens historie****, Borgen 1986.*
   En fyldig introduktion til udvalgte repræsentative tekster fra oldtidens matematik omhandlende babylonsk matematik (løsning af en andengradsligning, diagonalen i et kvadrat, arealet af et trapez), Euklid (konstruktion af den regulære femkant efter 'Elementer'), Arkimedes (vinklens tredeling, konstruktion af en regulær syvkant, kuglens overflade og rumfang efter 'Metoden') og Ptolemæus (konstruktion af en kordetabel efter 'Almagest'). Mange af kilderne gengives i en tillempet moderniseret version for at gøre teksterne nemmere tilgængelige.

10. Andersen, Kirsti: ***Kilder og kommentarer til ligningernes historie***, Trip 1986,
    Udvalgte tekster fra de babylonske lertavler til tiden omkring Descartes. Kinesisk og indisk kildemateriale er ikke inkluderet. Bogen bygget op efter kildetekster for at give en anderle-

des og direkte kontakt med materialet og bedre indblik i tidligere tiders stil og tankegang. Bogen giver gode muligheder for at knytte kilderne til et historisk perspektiv: den almindelige sociale, økonomiske og kulturelle udvikling, behov for uddannelse af matematikere, de enkelte matematikeres muligheder og interesser etc.

11. Andersen, Kirsti; Bos, Henk; Lützen, Jesper: **Tekster til analysens historie**, Matematiklærerforeningen, Kursusmateriale 1987
Meget omfattende samling af primære kildetekster og sekundær litteratur til analysens historie udvalgt som supplement til forelæsninger og til brug for gruppearbejdet på kurset "Analysens tidlige historie", Vejle 22.-25. februar 1987, arrangeret af det faglige udvalg for matematik. Kildeteksterne spænder fra Descartes 'La Geometrie' til Cauchys 'Cours d'Analyse'. Den sekundære litteratur rummer udvalgte artikler af matematikhistorikere om de tilsvarende emner: Den analytiske geometri, funktionsbegrebets historie og den tidlige analyse (differentialregning). De fleste tekster er på dansk eller engelsk, men enkelte tekster er på fransk, tysk og latin.

Artikelsamlinger om emner fra matematikkens historie

12. Eves, Howard: ***Great moments in mathematics before 1650***, Dolciani Mathematical Expositions 5, 1983.
Bogen diskuterer nogle af de største resultater indenfor matematik. Bogen er opbygget som 20 kronologisk ordnede tankevækkende essays om "matematikkens stjernestunder" fra tiden før 1650: Fra tællesystemer til opfindelsen af den analytiske geometri. Bogen er skrevet på gymnasieniveau. Hvert essay slutter med en lang række opgaver og bagerst i bogen er der kommentarer til udvalgte opgaver.

13. Eves, Howard: ***Great moments in mathematics after 1650***, Dolciani Mathematical Expositions 7, 1983.
Bogen diskuterer nogle af de største resultater indenfor matematik. Bogen er opbygget af yderligere 20 kronologisk ordnede tankevækkende essays om "matematikkens stjernestunder" fra tiden efter 1650: fra sandsynlighedsregningens fødsel til computerens rolle i beviset for firfarvesætningen. Hvert essay slutter med en lang række opgaver og bagerst i bogen er der kommentarer til udvalgte opgaver.

Matematikhistoriske værker om udvalgte emner/perioder

14. Gillings, R.J.: ***Mathematics in the time of the pharaohs***, Massachusetts 1972.
En omfattende gennemgang af udviklingen af Ægyptisk matematik – fra sin oprindelse i kommercielle og praktiske beregninger til løsningen af problemer beskrevet ved direkte og omvendte forhold; løsning af 1. gradsligninger, bestemmelsen af summen af aritmetiske og geometriske rækker; anvendelse af ufuldstændige trigonometriske funktioner til beskrivelse af pyramiders hældninger. Med udgangspunkt i eksisterende kildematerialer vises det at selvom antallet af antikke Ægyptiske matematiske beregningsmetoder var stærkt begrænset kunne de anvendes på mange forskelligartede sammenhænge.

15. Frandsen, Jesper: ***Ægyptisk matematik***, Systime 1996.
En gennemgang af udvalgte dele af ægyptisk matematik med udgangspunkt i korte originale tekster fra de vigtigste papyrustekster omhandlede matematiske problemstillinger, specielt Papyrus Rhind. Bl.a. gennemgås tabeller, ligninger, areal- og rumfangsbestemmelser, pyramidehældninger samt stambrøksteori. Desuden giver bogen forskellige fortolkninger af de samme opgavetekster. Bogen indeholder også en fyldig opgavesamling.

16. Lund, Jens: ***Regn med en skriver***, Munksgaard 1997.
En gennemgang af udvalgte dele af ægyptisk matematik med udgangspunkt i korte originale tekster fra de vigtigste papyrustekster omhandlede matematiske problemstillinger, specielt Papyrus Rhind. Bl.a. gennemgås regneregler, ligninger, geometri (herunder areal- og rumfangsbestemmelser samt pyramidehældninger) og diverse anvendelser. Bogen indeholder også en fyldig opgavesamling.

17. Høyrup, Jens: ***Algebra på lertavler***, Århus 1998.
En omfattende præsentation af den babyloniske matematik (Algebra) på gymnasieniveau. Denne "algebra" er den ældste form for "højere" matematik som vi kender til, og den behandles derfor i mange af de matematikhistoriske standardværker. I alle disse bygger fremstillingen imidlertid på oversættelser der blev foretaget i 1930'erne. Denne bog tager i modsætning hertil sit udgangspunkt i senere forskning. Formålet med bogen er at give indsigt i den "anderledes" tankegang, der ligger bag de babylonske resultater, og dermed at vise at matematik kan tænkes på flere måder.

18. Bunt, Lucas; Jones, Philip: **The historical roots of elementary mathematics,** Dover Publications 1976
Lettilgængelig historisk genemgang af emner fra den elementære matematik – aritmetikken, algebraen, geometrien og talteorien – med hovedvægten på den ægyptiske, babylonske og græske matematik. Bogen rummer også eksempler på læsning af kildetekster og hvert afsnit afrundes med opgaver.

19. Heath, Sir Thomas L.: ***A manual of Greek Mathematics,*** Dover 1963
Bogen er det klassiske omfattende standardværk om den græske matematik fra Thales til Diofant. Den rummer også masser af matematiske detaljer med typiske eksempler på sætninger og beviser fra den græske æra.

20. Lützen, J.: ***Cirklens kvadratur – Vinklens tredeling – Terningens fordobling***, Systime 1985.
Med udgangspunkt i tre klassiske problemer giver bogen et overblik over matematikkens historie spændende fra de store flodkulturer og den græske geometri over den arabiske middelalder til renæssancens og den nyere tids algebra og differentialregning. Bogen, der er skrevet til brug for gymnasiet, indeholder desuden et bevis for at de to sidste af problemerne ikke kan løses med passer og lineal.

21. Gericke, Helmuth: ***Talbegrebets historie***, Matematiklærerforeningen, 1996.
Omfattende fremstilling af talbegrebets udvikling fra ægypterne og babylonerne over grækerne frem til opdagelsen af de komplekse tal og aksiomatiseringen af talbegrebet (de reelle tal: Cantor, Dedekind og Hilbert – de naturlige tal: Peano).

22. Weil, André: ***Number theory – An approach through history from Hammurapi to Legendre***, Birkhäuser 1984.
Omfattende introduktion til talteoriens historie med hovedvægten på Fermat, Euler, Lagrange og Legendre forfattet af en af vore dages store talteoretikere. Skønt skrevet til et alment publikum uden specielle matematiske forudsætninger kræver den dog en vis matematisk modenhed.

23. Andersen, Kirsti: ***The Geometry of an art – The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge,*** Springer Verlag 2005.
Bogen rummer Kirsti Andersens doktorafhandling fra 2004, som giver en meget omfattende

og dybtgående gennemgang af de fagligt matematiske aspekter af historien bag det geometriske perspektiv. Bogen er især koncentreret om to perioder: Først kunstnernes udvikling af det centrale perspektiv fra Brunelleschi og Alberti til Dürer og Vries, dernæst matematikernes udvikling af den matematiske teori bag perspektivet fra Guidobaldo og Stevin til Lambert og Monge.

24. Marcussen, Lars: ***Rummets arkitektur – arkitekturens rum,*** Arkitektens forlag 2. udgave 2006
Bogen giver en omfattende fremstilling af menneskets rumopfattelse og de rumlige idéers historiske udvikling fra de tidligste tider til nutiden set som en gensidig vekselvirkning mellem udviklingen af den geometriske rumopfattelse og arkitekturens rumopfattelse. Bogens detaljerede analyser af bygningsværker giver samtidigt mange fine eksempler på anvendelser af det matematiske formsprog.

25. Vestergaard, Erik: ***En revolution i regnekunsten – Logaritmernes oprindelse, beregning og brug,*** Abacus 1996.
Kortfattet fremstilling af logaritmernes historie og en gennemgang af deres betydning som regnetekniske hjælpemidler og de metoder, der er knyttet hertil med astronomisk navigation som et eksempel. Bogen tager udgangspunkt i prosthaphaerisiske regler (trigonometriske formler) til forenkling af multiplikationer og gennemgår derefter Napiers og Briggs opdagelse af den naturlige logaritme og titalslogaritmen. Der lægges vægt på brugen af differensteknikker til opstilling af logaritmetabeller.

26. Beckmann, Petr: **A history of π,** St. Martins Press 1971.
En klassisk fremstilling af historien bag tallet pi fra ægypternes og babylonernes brug af pi i geomtriske beregninger til de moderne computerberegninger af cifrene i tallet pi. Specielt i den sidste såkaldt moderne del er bogen dog allerede for gammel! Men ellers møder man alle koryfæerne fra matematikkens historie og hører i detaljer om den rolle de har spillet i udviklingen af vores forståelse for tallet pi.

27. Maor, Eli: ***e – The story of a number,*** Princeton University Press 1994.
En moderne fremstilling af historien bag tallet e fra Napiers opfindelse af den naturlige logaritme i 1614 til Hilberts udfordring i 1900 om at bevise at $e^{\sqrt{\pi}}$ *er et transcendent tal. Selv om historien om grundtallet for den naturlige logaritme ikke har same spændvidde som historien bag pi kan den stadigvæk bruges til at perspektivere mange emner i matematikkens historie.*

28. Nahin, Paul: ***An imaginary tale – The story of*** $\sqrt{-1}$ ***,*** Princeton University Press 1998.
En moderne fremstilling af den lange historie bag de negative kvadratrødder fra deres første rigtige anvendelse i løsningen af tredjegradsligningen til udviklingen af den komplekse analyse. Historien bag $\sqrt{-1}$ *egner sig fint til at perspektivere mange af de centrale historiske emner i matematikken.*

29. Lund, Jens: ***Tangentbestemmelse historisk set***, Matematiklærerforeningen 1992.
Bogen lægger ud med en beskrivelse af den klassiske græske tangentopfattelse. Herefter følger en præsentation af fire matematikere, René Descartes, Pierre de Fermat, Gottfried Wilhelm Leibniz og Isaac Newton, efterfulgt af en gennemgang af elementer af deres meto-

der til tangentbestemmelse. Bogen afsluttes med en kort gennemgang af differentialregningens historie i tiden efter Newton og Leibniz.

30. Lund, Jens: ***Fra kvadratur til integration – Træk af arealberegningens historie***, Matematiklærerforeningen 2000.
Bogen belyser udvalgte dele af arealberegningens historie og dermed integralregningens for- og tilblivelseshistorie. Bogen giver en gennemgang af kilder med detaljerede beskrivelser af metoder, hvor det er tilstræbt at følge den oprindelige tankegang. Der lægges ud med en kort indledning om arealberegning i oldtiden efterfulgt af en skildring af indsatsen i antikken med Archimedes som den centrale skikkelse. Derefter følger eksempler fra Arabisk matematik i middelalderen samt en gennemgang af en række metoder, der i det 17. Århundrede gik forud for tilblivelsen af infinitesimalregning. Der afsluttes med en kort præsentation af Newton og Leibnitz metoder. Enkelte omhandlende matematikere præsenteres kort i biografiske skitser.

31. Dunham, William: ***Euler – The Master of us all***, Mathematical association of America 1999.
Efter en kort biografisk skitse gennemgås otte typiske arbejder af Euler indenfor forskellige emner af matematikken. Bogen er skrevet på et alment niveau for en dannet læser med en passende matematisk baggrund, hvilket ikke er for langt fra et gymnasieniveau. Den gengiver ikke direkte de originale kildetekster, men følger Eulers forlæg loyalt, og giver derved et fint indtryk af Eulers metoder. Mange af eksemplerne omhandler nogle af matematikkens mest berømte resultater, såsom Eulerlinjen i en trekant, Eulers formel for summen af de reciprokke kvadrattal og Eulers sammenkædning af den naturlige eksponentialfunktion og de trigonometriske funktioner via de komplekse tal.

32. Henderson, David; Taimina, Daina: ***Experiencing Geometry – Euclidean and Non-Euclidean with History,*** Pearson Prentice Hall 2005.
Bogen er en fremragende generel begrebsmæssig gennemgang af geometriens centrale begreber: rette linjer, trekanter, cirkler, paralleltransport osv. med eksempler fra de vigtigste geometrier, hvor fokus er på den euklidiske, elliptiske og hyperbolske geometri. Selvom bogen ikke primært er en historisk gennemgang (og fx er tematisk opbygget i stedet for kronologisk opbygget) vrimler det med korte interessante historiske udblik. Dertil kommer bogens præsentation af historiesynet med de fire spor som geometrien har udviklet sig af (hvoraf især det ene, der via Euklid førte til den aksiomatiske opbygning af matematikken har påkaldt sig særlig opmærksomhed).

Biografier

33. Ioan, James: ***Remarkable Mathematicians – from Euler to von Neumann***, Cambridge 2002.
Biografier af 60 indflydelsesrige matematikere (inklusive tre kvindelige matematikere: Germain, Kovalevskaya og Noether) i perioden fra 1700 til i dag. Bogen er kronologisk opbygget.

34. Bell, Eric Temple: **Men of Mathematics – The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré**, Touchstone books, 1986
Bogen er en klassiker med samme status som Grimbergs Verdenshistorie: Underholdende, velskrevet og let læst men må gerne suppleres med andre kilder for også at kunne få et mere moderne syn på sagen. På trods af titlen husker han også at inddrage kvindelige matematikere som Germain, Kovalevskaya og Noether.

Originale tekster:

35. Glunk, Claus; Strand, Hanne; Taisbak, Christian Marinus; Tortzen, Christian Gorm: ***QED – Platon og Euklid tegner og fortæller***, Gyldendal 2006
Bogen rummer to originale kildetekster i ny oversættelser hentet fra henholdsvis Platons dialog om Menon og Euklids elementer den første bog (fra den ligesidede trekant til Pythagoras sætning). Dertil kommer en række indsigtsfulde kommentarer, opgaver og forslag til læsestrategier. Bogen er skrevet som oplæg til et tværfagligt samarbejde mellem primært oldtidskundskab og matematik, men er også velegnet som udgangspunkt for et studieretningsprojekt i historie og matematik.

36. Euklid: ***The thirteen books of Euclid's elements vol. 1–3***, Dover 1956
Dover udgaven med kommentarer af Sir Thomas L. Heath er standardudgaven af Euklids elementer. De første seks bøger af Euklids elementer findes også i en dansk ukommenteret oversættelse af Thyra Eibe.

37. Arkimedes: The ***works of Archimedes with the method of Archimedes,*** Dover 1953
Dover udgaven med kommentarer af Sir Thomas L. Heath er standardudgaven af Arkimedes samlede værker. Man skal være opmærksom på at 'Metoden' bygger på Heibergs afskrift af den originale palimpsest, som forsvandt mellem de to verdenskrige, men nu er dukket op igen og i disse år er genstand for en intensiv udforskning med de mest moderne videnskabelige teknikker. Palimpsesten rummer ikke blot 'Metoden' men også andre kommentarer af Arkimedes og giver en enestående chance for at få et førstehåndsindtryk af Arkimedes egen tankegang. Standard referencen til dette unikke globale matematisk-historiske projekt er websiden:
http://www.archimedespalimpsest.org/

38. Leon Battista Alberti: **Om billedkunsten – Della Pittura**, nyt nordisk forlag Arnold Busck 2000.
Bogen rummer den tidligste gennemgang af reglerne for perspektivtegning: Albertis berømte traktat om centralperspektivet. Bogen er uden illustrationer, men heldigvis er den forsynet med en omfattende indledning og mange kommentarer, der ikke blot sætter værket ind i et kunsthistorisk perspektiv men også hjælper godt med til at tydeliggøre traktatens mening for en moderne læser.

39. Dürer, Albrecht: ***Von menchlicher Proportion og Underweysung der Messung,*** Nurenberg 2003
Denne digitale bog på CD-rom rummer dels fascimileudgaver af de første to bøger om de menneskelige proportioner, dels den udvidede udgave af Underweysung. Den digitale gengivelse (adobe-pdf filer) er i høj opløsning. Den digitale bog rummer også komplette oversættelser til engelsk af Dürers to mesterværker, hvor især Underweysung er et hovedværk i matematikkens historie, når det drejer sig om matematik som et kulturbærende fag, fordi den giver en enestående indsigt i hvordan renæssancens matematiske viden blev videregivet til andre faggrupper – kunstnere, håndværkere og arkitekter. Illustreret af en af kunstens helt store mestre giver den rige fascinerende muligheder for at fordybe sig i en intuitiv billedskabende tilgang til matematikken.

40. Decartes, René: ***The Geometry of René Descartes,*** Dover 1954
Descartes originale tekst i såvel fransk original som engelsk oversættelse. Teksten handler om forholdet mellem geometri og algebra og er et vigtigt historisk dokument om forholdet mellem den tidlige algebra og den klassiske geometri. Teksten rummer ingen koordinatsy-

stemer og handler ikke direkte om den moderne analytisk geometri. Den er derfor i modsætning til 'Optikken' og 'Metereologien' ikke helt nem at læse på gymnasialt niveau.

41. Decartes, René: ***Discourse on Method, Optics, Geometry and Meteorology,*** Hackett 1965.
Fyldig indledning til Descartes hovedværk om metoden med hans tre eksempler på hvordan man kan anvende metoden. Specielt Optikken og Metereologien rummer mange fine eksempler på anvendelser af matematik til modellering af tekniske- og naturfænomener, herunder Descartes berømte diskussion af brydningsloven: Keglesnittene spiller således en afgørende rolle for konstruktionen af linser i optikken og Descartes gør sig stor umage for at forklare keglesnittene så de kan forstås af et alment publikum. Meteorologien rummer bl.a. Descartes berømte model for regnbuen med en systematisk gennemregning af de kritiske vinkler.

42. Galilei, Galileo: ***Dialogues concerning two new Sciences,*** Dover 1954.
Bogen er ikke blot et hovedværk indenfor den moderne naturvindeksab men indeholder også Galileis berømte dialog fra den fjerde dag om parablen som bane for et projektil i et lufttomt rum. Bogen er skrevet på et tidspunkt, hvor variabelsammenhænge og funktioner endnu ikke er kodificerede. Geometriske argumenter spiller en stor rolle. Dele af teksten er dog ikke helt nemme at forstå, bl.a. fordi Galilei ikke har et moderne begrebsapparatur til rådighed.

43. Dedekind, Richard: ***Essays on the theory of numbers,*** Dover 1963
Bogens første del 'Continuity and irrational numbers' rummer Dedekinds klassiske almene fremstilling af teorien for de reelle tal via snit i de rationale tal. Bogens anden del 'The Nature and meaning of numbers' rummer Dedekinds aksiomatiske opbygning af de naturlige tal. (Bogen kan fint suppleres og perspektiveres med en moderne fremstilling af grundlaget for tal, fx Knuths charmerende fortælling om surreal numbers.)

44. Cantor, Georg: ***Transfinite numbers,*** 1955
Bogen er forsynet med en fyldig introduktion ved Philip Jourdain og rummer derefter Cantors egne originaltekster, hvor de uendelige tal for første gang introduceres på et forsvarligt matematisk grundlag. (Bogen kan fint suppleres og perspektiveres med moderne fremstillinger af tallenes og det uendeliges rolle i matematikken, fx Sondheimer og Rogersons: Numbers and Infinity – A historical account of mathematical concepts, Cambridge University Press 1981).

45. Boole, George: ***The law of thoughts,*** Dover 1958.
Bogen er hovedværket om den Boolske algebra som en mekanisk kalkule for logiske ræsonnementer. Men bogen rummer også Booles tanker om hvordan man kan opbygge et nyt grundlag for sandsynlighedsregningen og endelig hans spekulationer om hvordan den menneskelige bevidsthed fungerer sat i forbindelse med udviklingen af den videnskabelige metode.

Webadresser

46. ***The MacTutor History of Mathematics archive***
http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/
Nettet vrimler med gode websider om emner af interesse for historisk matematik. Dette er en meget omfattende standardreference – en hovedportal – der kan tjene som udgangspunkt for en seriøs søgning på nettet om næsten et hvilken som helst historisk matematisk emne.

Supplerende litteratur

Fra fagkonsulenten Bjørn Grøn har vi netop modtaget følgende forslag til yderligere bøger, som også bør stå på litteraturlisten. Vi vedføjer den til inspiration og opfordrer kollegerne til at sende andre tilføjelser til os, så vi ved en senere lejlighed kan opdatere litteraturlisten til en mere komplet udgave af litteratur, der kan give inspiration til studieretningsprojekter i matematik og historie:

Historiske fremstillinger:

- Howard Eves: **An Introduction to the History of Mathematics**, Saunders
  Indeholder et væld af gode opgaver og ganske gode afsnit, der sætter matematik og historie i sammenhæng.

- Burton: **History of Mathematics**, Brown Publishers
  Indeholder rigtig gode historiske afsnit og også et stort antal opgaver.

- Boyer, Merzbach: **A history og Mathematics**, John Wiley
  Et værk der virkelig stræber efter at sætte matematikken ind i en historisk kontekst, og som afslutter hvert kapital med øvelser, der næsten umiddelbart kunne integreres i et SRP, f.eks. et par af dem til kapitlet om Fermat og Descartes: 1. What possible causes can you suggest for the French supremacy in mathematics in the middle third of the seventeenth century? ...3. Compare the influence of Descartes with that of Fermat in the development of Mathematics. ... 4. How do you account for the tact that the projective geometry of Desargues and Pascal met with so little response on the part of their contemporaries?... og der er naturligvis også en række specifikke matematikspørgsmål.

- Helmuth Gericke: **Mathematik in Antike und Orient + Mathematik im Abenland**, i en samlet udgave på Fourier Verlag
  Den er nok næsten på forskningsniveau og kan være svær at læse for elever, men rummer utrolig meget stof og har den store kvalitet at den er tro mod kilderne hele vejen.

- Zeuthen: **Matematikkens historie**, København 1983
  Jeg er ikke klar over om den er genoptrykt.

- Edna Kramer: **The Nature and Growth of Modern Mathematiucs**, Princeton
  Kapitler er tematiske og for hvert emne følger linjerne fra oprindelsen til det moderne. Den har måske mere oversigtskarakter, men er som sådan meget fyldig. Den gennemgår meget af matematikken, men har ikke så mange egentlige opgaver

- Wussing: **Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik**
  Jeg har i en udgave fra DDR-tiden, så jeg ved ikke om den er til at få fat i. Wussing blev af Lars Mejlbo opfattet som en af de allerstørste matematikhistorikere, og hans værk indeholder også en meget fin sammenkædning af matematik og historie.

- Morris Kline: **Mathematics in Western Culture**
  Har gode fortællinger om oprindelsen til de forskellige områder af matematikken. Jeg har selv haft glæde af at bruge kapitler herfra i et samarbejde med engelsklærere, da de skulle læse faction.

- George Gheverghese Joseph: **The Crest of the Peacock (non-european roots of mathematics)**, Penguin
  Indeholder en del kinesisk og indisk matematik, foruden ægyptisk og babylonsk - og også lidt maya og andet. Meget interessant, og måske kunne det give anledning til sammenligninger og forsøg på at forklare forskelle.

Andet:

- Karl Menninger: **Number Words and Number Symbols, A Cultural History of Numbers**, Dover
  Er en meget spændende og meget omfattende fremstilling af alle verdens talsystemers oprindelse. Man skal nok passe på det ikke bare bliver fortælling her, men der kan laves gode opgaver i dette.

- Olaf Pedersen: **Matematik og naturbeskrivelse i oldtiden**, Akademisk forlag
  Sætter græsk og ægyptisk matematik ind i en god sammenhæng

- Peter Wolf: **Højdepunkter i matematikken**, Steen Hasselbalchs forlag
  Indeholder kommenterede kildetekster (Euklid, Lobachevski, Descartes, Arkimedes, Dedekind, Russel, Euler, Laplace, Boole - nogle er uddrag på dansk af det I har med på engelsk)

- Klaus Thomsen, Asger Spangsberg: **Differentialregningen i historisk perspektiv**, Århus universitetsforlag
  Taler for sig selv

- Donald Gillies (red): **Revolutions in Mathematics**
  Diskuterer en række større gennembrud i historien ud fra Kuhns teori - meget spændende, men den er om matematik og skal kombineres med rigtig matematik

- Cardanos: **Ars Magna**, Dover

- Flemming Clausen og Jørgen Falkesgaard: **Tal og tanke**, Munksgård
  Om pythagoræerne.

- David Smith har udgivet en kildesamling, **A Sourcebook in Mathematics**, der er genoptrykt på Dover (125 kilder)

Bilag 2 – Uddrag fra læreplan

2.1 Faglige mål – matematik A	**2.1 Faglige mål – historie A**
Eleverne skal kunne: – håndtere formler, herunder kunne oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog, og selvstændigt kunne anvende symbolholdigt sprog til at beskrive variabelsammenhænge og til at løse problemer med matematisk indhold – anvende simple statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale eller fænomener fra andre fagområder, kunne stille spørgsmål ud fra modeller, have blik for hvilke svar, der kan forventes, samt være i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog – anvende funktionsudtryk og afledet funktion i opstilling af matematiske modeller på baggrund af datamateriale eller viden fra andre fagområder, kunne forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modellerne, kunne analysere givne matematiske modeller og foretage simuleringer og fremskrivninger – anvende forskellige fortolkninger af stamfunktion og forskellige metoder til løsning af differentialligninger – opstille geometriske modeller og løse geometriske problemer på grundlag af trekantsberegninger samt kunne give en analytisk beskrivelse af geometriske figurer i koordinatsystemer og udnytte dette til at svare på givne teoretiske og praktiske spørgsmål – redegøre for matematiske ræsonnementer og beviser samt deduktive sider ved opbygningen af matematisk teori – demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling – demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling – anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer.	Eleverne skal kunne: – dokumentere viden om centrale udviklingslinjer og begivenheder i Danmarks historie, Europas historie og verdenshistorie, herunder sammenhænge mellem den nationale, regionale, europæiske og globale udvikling – dokumentere viden om forskellige samfundsformer – formulere historiske problemstillinger og relatere disse til deres egen tid – analysere samspillet mellem mennesker, naturgrundlag og samfund gennem tiderne – analysere eksempler på samspil mellem materielle forhold og mentalitet i tid og rum – forklare samfundsmæssige forandringer og diskutere periodiseringsprincipper – forklare måder at forme og styre samfund på og se konsekvenserne heraf for individets vilkår – reflektere over mennesket som historieskabt og historieskabende – indsamle og systematisere informationer om og fra fortiden – bearbejde forskelligartet historisk materiale og forholde sig metodisk-kritisk dokumenterende til eksempler på brug af fortiden.