VEJLEDENDE EKSEMPLER PÅ

EKSAMENSOPGAVER I MATEMATIK

STX B-NIVEAU

Forord

Matematik B i stx er beskrevet gennem henholdsvis læreplan, undervisningsvejledning og de to vejledende eksamenssæt. De faglige mål for undervisningen og bedømmelseskriterierne ved de afsluttende eksamener findes beskrevet i læreplanen.

Om specielt den skriftlige prøve hedder det i læreplanen: *Det skriftlige eksamenssæt består af opgaver stillet inden for kernestoffet og skal evaluere de tilsvarende faglige mål*. I undervisningsvejledningens hovedafsnit 2 er der gennem en lang række eksempler redegjort nærmere for, hvad dette betyder.

Med de vejledende eksamenssæt illustreres dels omfang og opbygning af et sådant sæt, dels hvorledes den konkrete udformning af forskellige spørgsmål kunne være.

De vejledende eksamenssæt er udarbejdet af en vejledende opgavekommission. I forarbejdet blev der produceret betydeligt flere opgaver, end der blev anvendt. Disse velegnede, men overskydende opgaver har opgavekommissionen stillet til rådighed for Matematiklærerforeningen med henblik på en udgivelse. Denne udgivelse af vejledende eksamensopgaver kan ikke træde i stedet for læreplan og undervisningsvejledning, men skal alene ses som et yderligere materiale til støtte for undervisningen frem mod den skriftlige eksamen. Antallet af opgaver inden for et bestemt emne er ikke udtryk for en vægtning af pågældende emne.

Specielt gøres opmærksom på, at alle opgaver, der kan stilles til B-niveau, også kan stilles til A-niveau.

Opbygning af eksamenssættene

Til den skriftlige prøve på B-niveau gives der 4 timer. Den første del af sættet, delprøve 1, skal besvares uden hjælpemidler. Til denne del af prøven gives der 1 time, hvorefter besvarelsen afleveres. Under den anden del af prøven, delprøve 2, må eksaminanden benytte alle hjælpemidler, bortset fra kommunikation med omverdenen. Opgaverne til denne del af prøven udarbejdes ud fra den forudsætning, at eksaminanden råder over et CAS-værktøj, der kan udføre symbolmanipulation. De nærmere krav er beskrevet i undervisningsvejledningens afsnit 3.3.

Delprøven med hjælpemidler kan indeholde valgfrie opgaver. Er dette tilfældet vil det tydeligt fremgå, hvor mange af de valgfrie opgaver der må afleveres til bedømmelse.

Hvert spørgsmål i et eksamenssæt repræsenterer 5 point. Et spørgsmål kan indeholde delspørgsmål. En fuldstændig besvarelse giver 100 point. I hvert sæt vil et antal point være reserveret til en bedømmelse af helhedsindtrykket af opgavebesvarelsen.

Formulering af eksamensopgaverne

Af undervisningsvejledning og følgebrevet til de vejledende eksamenssæt fremgår:

Ved beregninger af enhver art arbejdes der inden for mængden af reelle tal eller delmængder heraf. Komplekse tal vil derfor aldrig høre med til en ønsket løsningsmængde.

I en opgavetekst vil det ofte forekomme, at grundmængden for en ligning ikke direkte er nævnt. Det er da altid underforstået, at grundmængden skal vælges så omfattende som muligt inden for de reelle tal.

Ligeledes vil det ofte forekomme, at definitionsmængden for en givet reel funktion ikke udtrykkeligt er angivet i opgaveteksten. I sådanne tilfælde er det altid underforstået, at definitionsmængden er den mest omfattende delmængde af de reelle tal, inden for hvilken den angivne forskrift har mening. En modelsituation kan lægge begrænsninger på variationen af de variable ud over de rent matematiske begrænsninger. Er dette ikke eksplicit angivet i opgaveformuleringen, er det en del af besvarelsen at redegøre for, hvilke intervaller der arbejdes indenfor.

Brug af ord som ’skitse’ og ’tegn’ er ikke udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde. Det er en del af undervisningen, at eleverne opnår indsigt i, hvilke detaljer der bør medtages i en skitse eller modeltegning. En skitse af et grafisk forløb eller en modeltegning af en geometrisk situation skal vise de karakteristiske egenskaber eller fænomener, som er væsentlige for opgavens besvarelse. Eksempelvis tegnes spidse vinkler som spidse og modeller af trekanter tegnes ikke som retvinklede, hvis dette ikke fremgår af oplysningerne. For et grafisk forløb kan skæringspunkter med akserne, beliggenhed af lokale ekstrema, monotoniforhold eller asymptotisk forløb hver for sig være væsentlige at tage med i en skitse, alt afhængig af opgaven.

Brug af formuleringer som ’løs ligningen’, ’bestem nulpunkter’ eller ’beregn skæringspunkter mellem to grafer’ er ikke udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde. Det er en del af undervisningen, at eleverne opnår indsigt i styrke og svagheder ved symbolske over for numeriske metoder til at løse ligninger og andre matematiske problemer. Dette vil sætte eleverne i stand til at vurdere hensigtsmæssigheden i en given løsningsmetode samt at finde andre veje frem, hvis en bestemt løsningsstrategi slår fejl. I opgaver, hvor der ønskes en begrundelse for antallet af løsninger eller for, at den samlede løsningsmængde er bestemt, vil dette fremgå af opgaveteksten.

I opgaver, hvor der skal argumenteres for, at den samlede løsningsmængde er bestemt, eller hvor der skal bestemmes lokale ekstrema, vil der ofte være forskellige veje til målet, og der foreskrives ikke nogen bestemt metode. Det er en del af undervisningen, at eleverne opnår indsigt i dette, herunder hvorledes man kan argumentere ved hjælp af $f'(x)$.

I opgaver inden for integralregning vil det altid fremgå af opgaveteksten, hvis man ønsker angivelse af en stamfunktion eller et ubestemt integral. Når ubestemte integraler bestemmes ved hjælp af et CAS-værktøj, forventes det ikke, at eleverne kan omskrive et svar, hvori der indgår funktioner, som ikke er en del af kernestoffet.

I delprøven med hjælpemidler kan der i modelsituationer optræde funktionsudtryk, som ikke direkte er nævnt i kernestoffet. Sådanne udtryk forventes eksaminanderne at kunne differentiere og integrere med brug af et CAS-værktøj, jf vejledningens afsnit 2d.

I en modelopgave kan eksaminanderne få et datamateriale for sammenhængen mellem variable samt oplysninger om, hvilken matematisk modeltype der kan beskrive materialet. Eksaminanderne skal kunne opstille og håndtere denne model, herunder stille spørgsmål til og besvare spørgsmål vedrørende modellen, men de forventes ikke ved den skriftlige eksamen at kunne begrunde én bestemt model frem for andre. Det forventes, at eksaminanderne kan udføre lineær, eksponentiel og potensregression.

Matematisk notation og matematiske symboler vil i alle tilfælde, hvor der ikke foreligger entydige internationale regler, blive anvendt ud fra det sigte at gøre opgaveteksten læsevenlig for eksaminanden. I prøven uden hjælpemidler vil funktionsudtryk som $\sqrt[c]{x^b}$ altid være omskrevet på formen x^a.

Ligesom e^{kx}, a^x, $\frac{1}{x}$ og $\sqrt{x}$ både kan betegne funktionen og en funktionsværdi, således kan det også generelt forekomme, at symbolet $f(x)$ anvendes til både at betegne en funktion og en funktionsværdi.

Konteksten vil afgøre, om det er hensigtsmæssigt eller ej at anvende parenteser i udtryk som $\ln(x)$ og $\ln x$ osv. Kan det misforstås, vil man altid sætte parenteser, som i $\ln(a \cdot b)$.

Der anvendes som standard dansk komma: 1,53 og ikke 1.53. Ved angivelse af koordinater kan der dog blive anvendt decimalpunktum, hvis det danske komma kan give anledning til misforståelser: Vi vil tillade os at skrive: (1.5 , 4) i stedet for (1,5 , 4). Hvis et udklip benytter decimalpunktum, vil denne notation ikke blive ændret i gengivelsen.

Punkter i et koordinatsystem kan både blive angivet på formen $P(2,3)$, $P = (2,3)$ og alene med koordinatsættet (2,3). Den samme notation vil blive anvendt ved beskrivelse af punkter på en graf.

Delprøven uden hjælpemidler
Af undervisningsvejledningen og følgebrevet til de vejledende eksamenssæt fremgår, at det forventes eksaminanderne kan:

- opstille enkle formler ud fra en sproglig beskrivelse
- anvende nulreglen og løse simple første og andengradsligninger
- anvende kvadratsætningerne og reducere udtryk, der ikke er meget komplicerede
- sætte tal ind i forskrifter
- anvende Pythagoras læresætning
- foretage beregninger i ensvinklede trekanter
- håndtere eksponentiel notation og anvende potensreglerne
- isolere ukendte størrelser
- redegøre for andengradspolynomiers grafer
- bestemme regneforskrifter for lineære, eksponentielle og potensfunktioner
- differentiere polynomier, potensfunktioner, e^{kx} og $\ln(x)$
- anvende de regneregler for differentiation, som er beskrevet i kernestoffet
- bestemme en tangentligning
- anvende viden om sammenhængen mellem afledet funktion og monotoniforhold
- aflæse væksthastighed grafisk
- bestemme stamfunktioner til polynomier, potensfunktioner, e^{kx} samt funktionen $\frac{1}{x}$
- anvende viden om sammenhængen mellem stamfunktion, bestemt integral og areal.

Bedømmelse af opgavebesvarelsen
I læreplanens afsnit 4.3 er opridset de bedømmelseskriterier, der lægges til grund for bedømmelsen af såvel skriftlige som mundtlige præstationer. Det vil altid afhænge af det konkrete eksamensspørgsmål, hvilke af de omtalte kriterier der er i spil i den givne situation. I nedenstående citat er således udeladt nogle punkter, der ikke vedrører skriftlig eksamen:

Bedømmelsen er en helhedsvurdering af, i hvilket omfang eksaminandens præstation lever op til de faglige mål, som er angivet i 2.1.
Der lægges vægt på, om eksaminanden:
1. har grundlæggende matematiske færdigheder, herunder
   - kan håndtere matematisk symbolsprog og matematiske begreber
   - har kendskab til matematiske metoder og kan anvende dem korrekt
   - er i stand til at bruge it-værktøjer hensigtsmæssigt
2. kan anvende matematik på foreliggende problemer, herunder
   - kan vælge hensigtsmæssige metoder til løsning af forelagte problemer
   - kan præsentere et matematisk emne eller en fremgangsmåde ved løsning af et matematisk problem på en klar og overskuelig måde
   - kan redegøre for foreliggende matematiske modeller og diskutere deres rækkevidde

3. har overblik over og kan perspektivere matematik, herunder:

- …
- kan bevæge sig mellem fagets teoretiske og praktiske sider i forbindelse med modellering og problembehandling
- …

I undervisningsvejledningens afsnit 4.g hedder det specielt om bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt, at der i bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart, herunder om der i opgavebesvarelsen er:

- en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på
- en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik
- en dokumentation ved et passende antal mellemregninger
- en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde, herunder den eventuelle brug af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder
- en brug af figurer og illustrationer
- en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer
- en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden
- en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og med brug af almindelig matematisk notation.

Mange spørgsmål har en sådan udformning, at der kan være flere veje til en fuldt tilfredsstillende besvarelse. Alle spørgsmål kan besvares til fuldt pointtal på grundlag af kernestoffet. Men har eksaminanderne en yderligere indsigt, som de forstår at udnytte, vil dette blive belønnet i helhedsindtrykket.

Bjørn Grøn,
fagkonsulent

1. OPGAVER UDEN HJÆLPEMIDLER

1.001 a) Forkort brøken

$$\frac{x^2+2x}{4x+8}.$$

1.002 a) Reducér

$$\frac{8a^3\cdot b\cdot a^{-2}}{(2b)^2}.$$

1.003 a) Omskriv $4x^2-12x+9$ til formen $(ax+b)^2$.

1.004 a) Undersøg om $\frac{1}{2}$ er løsning til ligningen $8x^3+2x^2+x-\frac{3}{2}=0$.

1.005 a) Bestem *k*, så -2 er rod i polynomiet $p(x)=x^3+kx^2-3x+6$.

1.006 a) Løs ligningen $(x-1)(x^2-4)=0$.

1.007 a) Bestem en forskrift for den lineære funktion *f*, hvis graf går gennem punkterne (2, 10) og (- 3, 0), og løs ligningen $f(x)=3$.

1.008 a) Bestem rødderne i andengradspolynomiet

$$f(x)=x^2-x-2,$$

og faktorisér polynomiet.

1.009 En parabel er bestemt ved ligningen

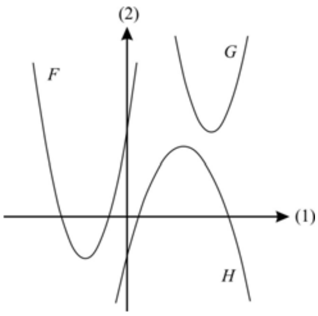
$$y = x^2 - x - 2 .$$

a) Bestem toppunktet for parablen, og skitsér parablen.

1.010 På figuren ses grafen for tre forskellige andengradspolynomier

$$f(x) = ax^2 + bx + c .$$

Med *d* betegnes diskriminanten.



a) Bestem for hver af de tre andengradspolynomier fortegnet for *a* og *d*.

1.011 En funktion *f* er bestemt ved

$$f(x) = 7\ln x - 2x^2 .$$

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet *P*(1,*f*(1)).

1.012 En funktion *f* er bestemt ved

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x .$$

a) Bestem monotoniforholdene for funktionen *f* .

1.013 Om en funktion $f(x)$ oplyses det, at $f'(x) = x^2 - 12x$.

a) Bestem monotoniforholdene for $f(x)$.

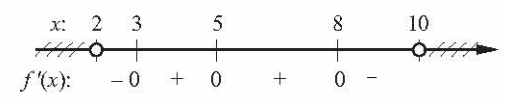
1.014 a) Tegn en mulig graf for en funktion *f*, der opfylder følgende:

f har definitionsmængde $]2;10[$

f har værdimængde $[-3;8]$

f er differentiabel

fortegn og nulpunkter for f' er som angivet på tallinjen:



1.015 a) Bestem hvert af integralerne $\int_0^2 x^3\,dx$ og $\int_0^2 x^{\frac{3}{4}}\,dx$.

1.016 a) Bestem integralet $\int_0^2 (4x - x^2)\,dx$, og giv en geometrisk fortolkning af resultatet.

OPGAVER MED HJÆLPEMIDLER

2. Geometri og vektorer

2.001 I en trekant ABC er $\angle C$ ret. Endvidere er siden $b = 3$, og vinkelhalveringslinjen $v_A = 4$.

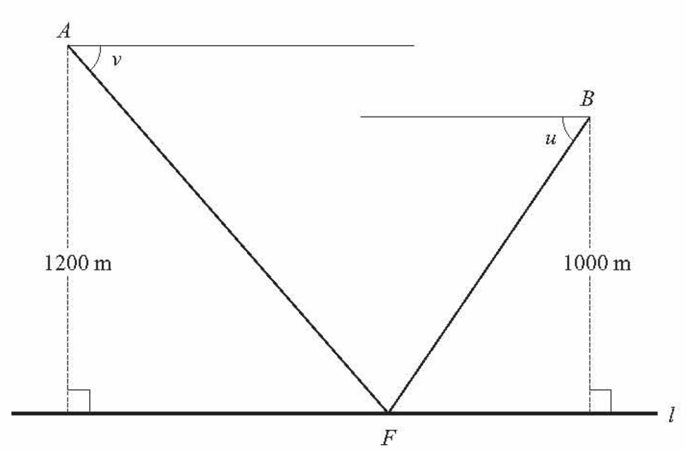
a) Tegn en model af situationen, og bestem de ukendte sider og vinkler i trekant ABC.

2.002 I trekant ABC gælder $|BC| = 2|AB|$ og $|AC| = \frac{5}{2}|AB|$.

a) Bestem $\cos C$.

b) Bestem arealet af trekant ABC udtrykt ved *c*.

2.003



To skibe *A* og *B* sejler med konstant hastighed parallelt med en kystlinje *l*. *A* sejler i afstanden 1200 meter fra *l*, mens B sejler i afstanden 1000 meter fra *l*. Klokken 12.00 er vinklen *v* mellem sejlretningen for *A* og sigtelinjen fra *A* til et fyrtårn *F* lig med 40°, mens det for *B* gælder, at den tilsvarende vinkel *u* er lig med 48°.

a) Beregn afstanden fra hvert af de to skibe til fyrtårnet.

b) Beregn afstanden mellem skibene.

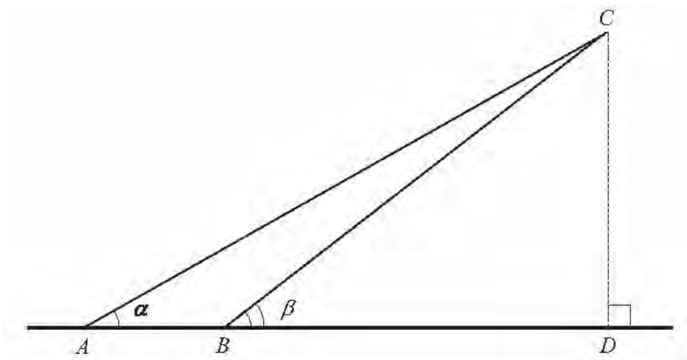
Et halvt minut senere er *v* = 42° og *u* = 51°.

c) Beregn det tidspunkt, hvor de to skibe passerer hinanden.

2.004 Det astronomiske fænomen »lysende sky« kan iagttages i Danmark i perioden juni til august.
En enkel metode til at bestemme afstanden fra jorden til en lysende natsky består i, at to observatører *A* og *B* måler vinklen mellem vandret og sigtelinjen til skyen *C*. De to observatører er anbragt, så punktet *D* ligger lodret under *C* og den vandrette linje gennem *A* og *B*.

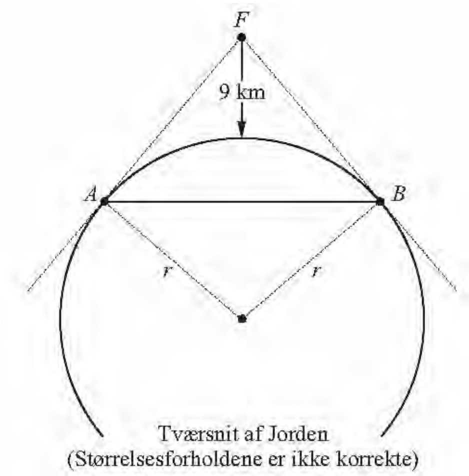
a) Beregn afstanden $|DC|$ fra jorden til skyen, når der foreligger følgende målinger:

$$\alpha = 27{,}2^\circ\,,\quad \beta = 37{,}6^\circ \text{ og } |AB| = 50\,\text{km}.$$



Kilde: Astronomisk Tidsskrift 1994/2

2.005 I NATO's varslingskæde indgår AWACS-fly, der er flyvende radarstationer. De flyvende radarstationer har den fordel i forhold til radarstationer på jorden, at de kan iagttage flyvemaskiner, som ellers ville være skjult på grund af jordkrumningen og uregelmæssigheder i terrænet.



Et AWACS-fly befinder sig i højden 9 km. På figuren tænkes flyet at befinde sig i punktet *F*. *A* og *B* angiver yderpunkter i det område, flyets radar kan dække.
Jordens radius *r* sættes til 6371 km.

a) Bestem længden af linjestykket *AB* samt længden af cirkelbuen *AB*.

3. Formler og ligninger

3.001 Body-Mass-Index, BMI, er et mål for sammenhængen mellem en persons vægt og højde. For voksne over 20 år falder BMI i en af følgende 4 kategorier:

BMI	Vægt status
Under 18,5	Undervægt
18,5-24,9	Normalvægt
25,0-29,9	Overvægt
30,0 og derover	Svær overvægt

Kilde: Centers for Disease Control and Prevention,
1600 Clifton Rd, Atlanta, GA 30333, U.S.A

En persons BMI kan beregnes ved at dividere vægten i kg med kvadratet på højden målt i meter.

a) Indfør passende variable, og opstil en formel for BMI.

b) Undersøg, om en person med en vægt på 70 kg og en højde på 180 cm har normal vægt i henhold til skemaet ovenfor.

En kvinde er 165 cm høj.

c) Opstil en funktion, som beskriver BMI, som funktion af vægten for denne kvinde, og undersøg, hvilket vægtinterval denne kvindes vægt skal ligge indenfor, hvis hun ønsker at tilhøre kategorien ”Normalvægt”.

3.002 Når spinat blancheres, ændrer vitaminindholdet y sig (målt i bestemte enheder) efter forskriften

$$y = 31{,}5 \cdot 0{,}887^t ,$$

hvor *t* er tiden.

a) Bestem t for $y = 19$.

Nitratindholdet i spinat ændrer sig samtidig og følger forskriften

$$z = 20{,}3 + 61{,}4 \cdot 0{,}884^t ,$$

hvor *t* er tiden.

a) Bestem nitratindholdet, når vitaminindholdet er 15.

3.003 Det radioaktive stof strontium 90 henfalder, så der efter 1 år er forsvundet 2,45% af stoffet. Et laboratorium indkøber 7 g af stoffet i 2004.

a) Bestem, hvor mange gram der er tilbage efter 2 år.

b) Indfør passende betegnelser, og opskriv et matematisk udtryk, der beskriver, hvor mange gram radioaktivt stof, der vil være tilbage efter et givet antal år.

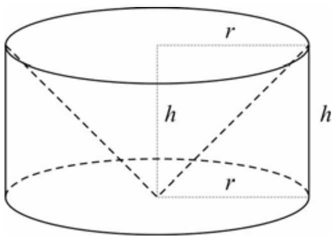
c) Bestem, hvor mange år der går, før der er mindre end 1 g tilbage af stoffet.

3.004 En trekants areal er bestemt ved dens højde og dens grundlinje, og en cirkels areal er bestemt ved dens radius. En trekant og en cirkel skal have samme areal.

a) Indfør passende variable, og opstil et udtryk, som beskriver denne sammenhæng.

b) Udtryk radius i cirklen ved trekantens højde og grundlinje.

3.005 En bestemt type glas har udvendig form som en cylinder med højden *h* og grundfladeradius *r*. Det indre af glasset har form som en kegle med højde *h* og grundfladeradius *r*. Glasset skal kunne rumme 1dm^3 .



a) Bestem *h* som funktion af *r*.

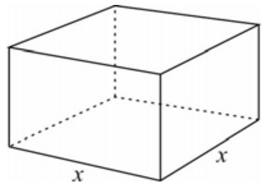
Glassets udvendige overflade *O* består af cylinderens krumme overflade og bund.

b) Bestem en forskrift for *O* som funktion af *r*.

3.006 Grafen for en funktion $f(x)$ er en parabel, som skærer akserne i punkterne $P(2,0)$, $Q(8,0)$ og R(0,4).

a) Bestem en forskrift for $f(x)$.

3.007 En kasse med kvadratisk bund har rumfang 125.



a) Angiv arealet af kassens samlede overflade som en funktion af sidelængden x i den kvadratiske bund.

3.008 Styrken af et jordskælv kan angives ved det såkaldte Richtertal. Sammenhængen mellem den energimængde E (målt i joule), et jordskælv frigiver, og Richtertallet m er givet ved følgende formel

$$\log E = 2{,}4m - 1{,}2\ .$$

a) Bestem den energimængde et jordskælv med Richtertallet 6,5 frigiver, og bestem Richtertallet for et jordskælv, der frigiver en energimængde på $8{,}0 \cdot 10^{13}$ joule.

I en model for antallet af jordskælv i det sydlige Californien kan sammenhængen mellem Richtertallet m og det gennemsnitlige årlige antal jordskælv y med mindst dette Richtertal angives ved følgende formel

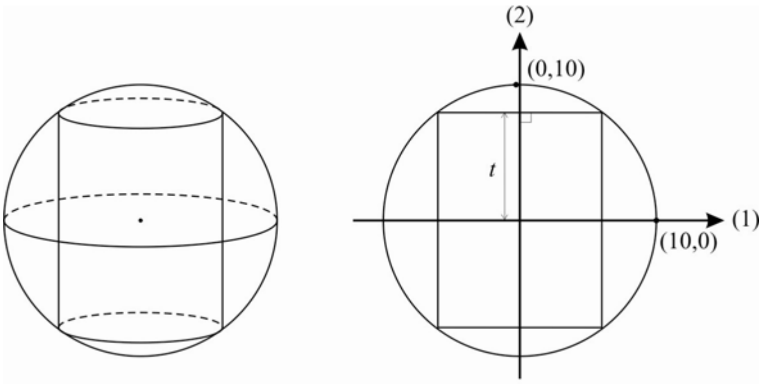
$$y = 1{,}4 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1288^m\ .$$

b) Bestem det gennemsnitlige antal årlige jordskælv i det sydlige Californien med Richtertal mindst 4,5. Bestem det Richtertal, der svarer til et gennemsnitligt antal årlige jordskælv på 10 med mindst dette Richtertal.

c) Opstil en ligning, der angiver sammenhængen mellem E og y.

Kilde: Ignacio Rodriguez-Iturbe, Andrea Rinaldo: *Fractal River Basins*: *Chance and Selforganization, Cambridge University Press*, 1997.

3.009



Figur 1 Figur 2

Af en kugle med radius 10 udskæres en cylinder (figur 1). På figur 2 ses et snit gennem cylinderens akse indlagt i et koordinatsystem.

a) Vis, at sammenhængen mellem cylinderens rumfang V og cylinderens halve højde t er bestemt ved

$$V = 200\pi t - 2\pi t^3 .$$

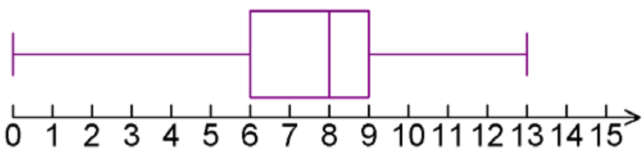
3.010 Arbejdsprocesser udføres ofte mere effektivt, efterhånden som udøveren af arbejdet får større erfaring.
I en model for arbejdsprocessers effektivitet gælder, at effektiviteten $f(t)$, som funktion af tiden t (uger) udøveren har været beskæftiget med arbejdet, er givet ved

$$f(t) = 1{,}00 - 0{,}60 \cdot 0{,}9^t , \ \ t \geq 0 .$$

a) Hvor længe skal udøveren have været beskæftiget med arbejdet, før effektiviteten er 0,95?

4. Statistik og sandsynlighedsregning

4.001



Ovenstående viser et boksplot over karaktererne ved en prøve.

a) Angiv kvartilsættet for datasættet.

4.002 På en skole med 700 elever ønsker en af de politiske ungdomsorganisationer at få mulighed for at stille et bord op, hvor eleverne i spisefrikvarteret kan hente materialer og få information. Da skolens ledelse siger nej, opfordrer organisationen alle elever til at tilkendegive, om de er for eller imod dette.
127 afgav deres stemme og heraf støttede 92 forslaget. Organisationen omdeler derefter løbesedler, hvor de skriver: ”Elevundersøgelse viser, at over 70 % støtter de politiske organisationers ret til at uddele materialer på skolen”.

a) Kommentér denne påstand med brug af statistiske begreber som stikprøve, population, systematiske fejl og skjulte variable.

4.003 Vil indtagelse af urtete styrke helbredet hos de ældre? Dette ønsker en gruppe studerende at undersøge. Over en periode på 6 måneder besøger de nogle tilfældigt udvalgte beboere på et plejehjem og serverer urtete for dem. Efter 6 måneder viser det sig, at de beboere, der fik serveret urtete, faktisk har færre sygedage, end de som ikke fik serveret noget. De studerende publicerer resultatet af deres undersøgelse under overskriften: ”Urtete styrker helbredet hos de ældre”.

a) Kommentér denne påstand ved at stille mindst tre kritiske spørgsmål til undersøgelsen.

4.004 I Hite-rapporten, der omhandler amerikanske kvinders seksuelle adfærd, er en af konklusionerne: ”Amerikanske kvinder er langt mere frigjorte, end hidtil antaget”. Undersøgelsen kom til veje gennem udsendelse af spørgeskemaer til 100.000 kvinder, hvoraf 4.500 svarede.

a) Kommentér påstanden med brug af statistiske begreber som stikprøve, population, systematiske fejl og skjulte variable.

4.005 For en bestemt gruppe på 15 læger blev det undersøgt, hvor ofte de havde udført et kirurgisk indgreb, der medførte fjernelse af livmoderen. Antallet af sådanne operative indgreb var for hver af de 15 læger henholdsvis:

27 50 33 25 86 25 85 31 37 44 20 36 59 34 28

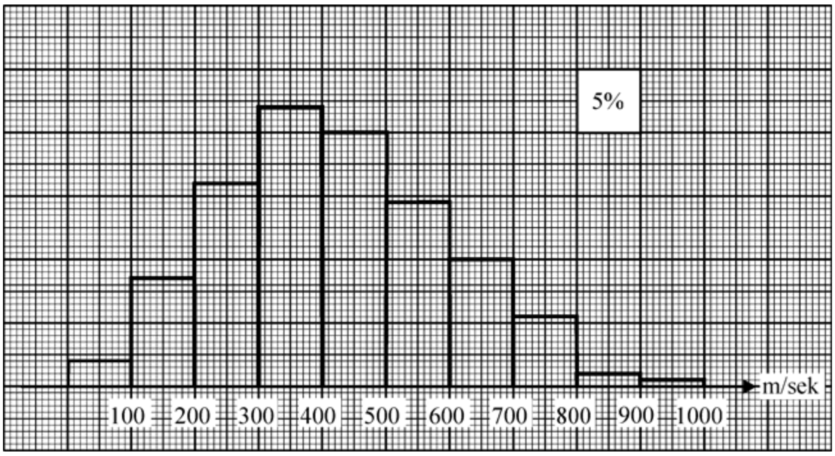
En tilsvarende undersøgelse blev foretaget i en gruppe på 10 kvindelige læger, og antallet af sådanne operative indgreb, som de havde udført var:

19 7 14 25 5 33 29 18 31 10

a) Lav på samme figur boksplot af hver af de to datasæt.

b) Kommentér undersøgelsen gennem en sammenligning af de to boksplot.

4.006 Figuren nedenfor viser et histogram, der beskriver fordelingen af iltmolekylers fart, målt i meter pr. sekund, ved en temperatur på 0°C.



a) Tegn sumkurven, og bestem medianen.

4.007 Nedenstående tabel viser fordelingen af nogle iltmolekylers fart ved en temperatur på 0°C.

iltmolekylers fart m/sek	0-200	200-400	400-600	600-800	800-1000
Procentdel	10,5	38	34,5	15,5	1,5

a) Tegn sumkurven, og bestem hvor stor en procentdel, der har en fart på over 750 m/sek.

5. Funktioner og grafer, modellering af variabelsammenhænge

5.001 Tabellen viser sammenhørende værdier af trykket P, målt i Pa, og temperaturen t målt i $^\circ\mathrm{C}$.

t	5,0	10,1	29,9	40,0	70,2	90,1
P	231,1	235,1	251,1	260,2	285,1	301,5

Det oplyses, at trykket, målt i Pa, med god tilnærmelse kan beskrives ved en lineær funktion g af t.

a) Bestem en forskrift for g.

Sammenhængen mellem temperaturen t, målt i $^\circ\mathrm{C}$, og temperaturen F, målt i grader fahrenheit, er givet ved

$$F = 1{,}8 \cdot t + 32 \,.$$

b) Bestem et udtryk for trykket som funktion af temperaturen målt i grader fahrenheit.

5.002 Tabellen viser for 3-slået polyester tovværk sammenhængen mellem tovværkets diameter (målt i mm) og tovets brudstyrke (målt i kg).

Diameter (mm)	4	5	6	8	10	14	16	20	24	26
Brudstyrke (kg)	250	400	600	1000	1550	3200	4000	6000	8600	10000

Det oplyses, at brudstyrken $f(x)$ (kg) som funktion af diameteren x (mm) er en potensfunktion.

a) Benyt tabellen til at bestemme $f(x)$.

b) Benyt den fundne forskrift for $f(x)$ til at bestemme, hvor mange gange så stor diameteren skal være, hvis brudstyrken skal fordobles.

5.003 Tabellen viser sammenhørende værdier af temperaturen T (målt i ºC) i en fryser og holdbarheden D (målt i døgn) af en rullepølse, der opbevares i en fryser.

Temperatur T	-25	-20	-15	-10
Holdbarhed D	280	154	91	49

Det oplyses, at D med god tilnærmelse er en eksponentielt aftagende funktion af T.

a) Bestem en forskrift for denne funktion.

b) Bestem ved hjælp af den fundne forskrift holdbarheden ved en temperatur på –18ºC, og bestem temperaturen, hvis holdbarheden er 180 døgn.

c) Bestem ved hjælp af den fundne forskrift halveringskonstanten for holdbarheden, og bestem den procentvise ændring i holdbarheden, når temperaturen øges 2 ºC.

Kilde: Poul Erner Andersen og Jørgen Risum, Introduktion til Vore Levnedsmidler, Bind 6, *Polyteknisk Forlag* 1999, *ISBN* 87-502-0831-4.

5.004 Når en bestemt type gammastråler sendes gennem en blyvæg, er der følgende sammenhæng mellem intensiteten I_0 før passage gennem blyvæggen og intensiteten I efter passage:

$$I = I_0 e^{-0,0393x},$$

hvor x angiver blyvæggens tykkelse, målt i mm.

a) Beskriv, hvilken information funktionen giver om reduktion af gammastrålingens intensitet.

6. Differentialregning og modellering med f'

6.001 Der er givet funktionen

$$f(x) = \tfrac{1}{4}x^3 - x^2 - x + 4\,.$$

a) Tegn grafen for f, og bestem koordinatsættet til hvert af grafens skæringspunkter med førsteaksen.

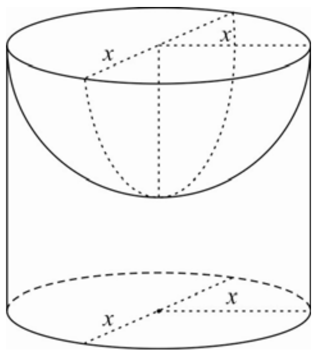
b) Bestem ligningen for den tangent t_1 til grafen for f, der går gennem det skæringspunkt P, der har den mindste førstekoordinat.

Grafen for f har en anden tangent t_2, som også går gennem P.

c) Bestem koordinatsættet til røringspunktet for denne tangent.

6.002 En bestemt type af beholdere, der skal rumme 20 dm^3, er sammensat af en cylinder med bund og en halvkugleflade, der har samme radius som bunden af cylinderen (se figuren). Det oplyses, at overfladen $O(x)$ (dm^2) for en sådan beholder som funktion af cylinderens radius x (dm) er givet ved

$$O(x) = \frac{13}{3}\pi x^2 + \frac{40}{x}\,.$$



a) Bestem overfladen, når radius i cylinderen er 2 dm, og bestem radius i den beholder, der har den mindste overflade.

6.003 En virksomhed fremstiller en vare. Omkostningerne $O(x)$ ved fremstilling af x tons pr. uge af denne vare er givet ved

$$O(x) = x^3 - 30x^2 + 500x + 30\,,$$

hvor $O(x)$ er udtrykt i en møntenhed, som er underordnet i denne forbindelse.
Den producerede varemængde kan sælges til en fast pris på 308 pr. ton.

a) Bestem det antal tons, som virksomheden skal fremstille pr. uge, hvis fortjenesten skal være maksimal.

6.004 Fra et dambrug udledes ved et uheld spildevand i et vandløb. Dette forårsager et iltunderskud i vandløbet. I en model beskrives iltunderskudet ved funktionen

$$f(t) = 97{,}5 \cdot t \cdot e^{-0.39t}\ , \quad t \geq 0\ ,$$

hvor $f(t)$ måles i mg pr. liter, og t er antal døgn efter udledningen.

a) På hvilket tidspunkt er iltunderskudet størst?

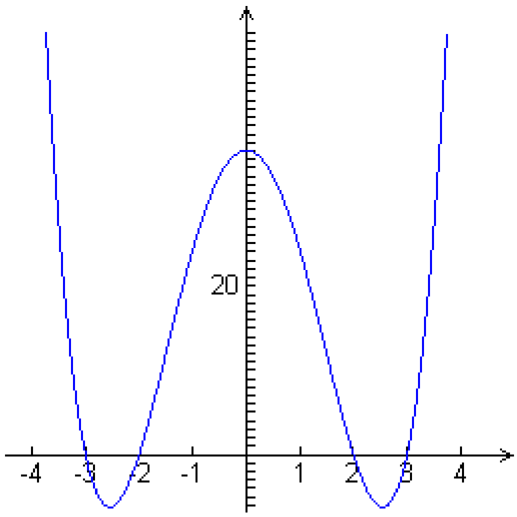
6.005 En partikel bevæger sig på en ret linje. Den strækning s (meter), partiklen har bevæget sig til tidspunktet t (sekunder), er givet ved

$$s(t) = 5t^{\frac{1}{2}}\ .$$

a) Bestem det tidspunkt, hvor partiklens hastighed er 2 m/s.

7. Integralregning

7.001 På figuren ses grafen for funktionen $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$. Grafen skærer førsteaksen i punkterne $S_1(-3,0)$, $S_2(-2,0)$, $S_3(2,0)$ og $S_4(3,0)$. I første og anden kvadrant afgrænser grafen for funktionen sammen med førsteaksen en punktmængde *M*, som har et areal.



a) Bestem arealet af *M*.

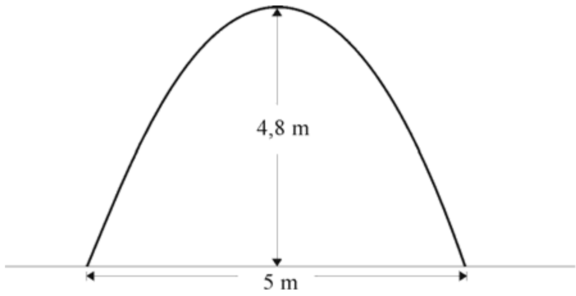
7.002 Grafen for $f(x) = x^3 - 9x$ afgrænser sammen med x-aksen i anden kvadrant en punktmængde, som har et areal.

a) Bestem arealet af denne punktmængde.

7.003 Parablen med ligningen $y = 9 - x^2$ og linjen med ligningen $y = x + 3$ afgrænser en punktmængde *M*, der har et areal.

a) Skitsér *M* i et koordinatsystem og bestem arealet af *M*.

7.004



Figuren viser gavlen af en parabelformet hal.

a) Indlæg på passende vis gavlen i et koordinatsystem, og angiv en forskrift for parablen.

b) Bestem arealet af gavlen.

8. Vejledende eksamensopgavesæt

Vejledende opgavesæt nr. 1
1. delprøve
prøven uden hjælpemidler

8.001

Opgave 1 Bestem en ligning for tangenten til grafen for funktionen $f(x) = 2x^3 + x^2$ i punktet $P(1, f(1))$.

8.002

Opgave 2 Reducér udtrykket $3(p+q)^2 - 6p(q-p)$.

8.003

Opgave 3 Om en eksponentielt voksende funktion $f(x)$ oplyses det, at $f(2) = 1$ og $f(4) = 9$.

Bestem en forskrift for $f(x)$.

8.004

Opgave 4 Om et 2. gradspolynomium oplyses, at det har rødderne 5 og 9, samt at punktet $(7, 4)$ ligger på dets graf.

Opskriv en forskrift for polynomiet.

8.005

Opgave 5 I en retvinklet trekant er den længste katete 3 gange så lang som den korteste katete, og hypotenusen er 3 enheder længere end den korteste katete.

Bestem længden af den korteste katete.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Vejledende opgavesæt nr. 1
2. delprøve
prøven med hjælpemidler

8.006

Opgave 1 a) Bestem c så ligningen $x^2 + 4x + c = 0$ har netop én løsning.

8.007

Opgave 2 a) Bestem løsningen til ligningssystemet

$$3x + 4y = 10$$
$$4x - 3y = 5 \quad .$$

8.008

Opgave 3 Tabellen viser sammenhængen mellem tryk P, målt i Pa, og temperatur t målt i °C.

t	5,0	10,1	29,9	40,0	70,2	90,1
P	231,1	235,1	251,1	260,2	285,1	301,5

Det oplyses, at P med god tilnærmelse er en lineær funktion af t.

a) Bestem en forskrift for P som funktion af t, og beskriv betydningen af de konstanter, der indgår i forskriften.

8.009

Opgave 4 a) Bestem minimum for funktionen $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}, \quad x > 0$.

8.010

Opgave 5 En funktion $f(x)$ er bestemt ved

$$f(x) = -x^2 + 4x \,.$$

En ret linje l skærer grafen for $f(x)$ i punkterne $S_1(1,3)$ og $S_2(4,0)$. Grafen for $f(x)$ afgrænser sammen med linjen l en punktmængde M, som har et areal.

a) Bestem arealet af M.

8.011

Opgave 6

I tabellen nedenfor ses karakterfordelingen for to hold elever, Hold 1 og Hold 2, ved samme matematikprøve:

Karakter	03	5	6	7	8	9	10	11
Hold 1	5	7	5	12	3	10	5	3
Hold 2	4	6	8	10	16	10	6	0

For Hold 1 oplyses følgende statistiske deskriptorer:

Deskriptor	Hold 1
Middelværdi	7,22
Median	7
Nedre kvartil	6
Øvre kvartil	9

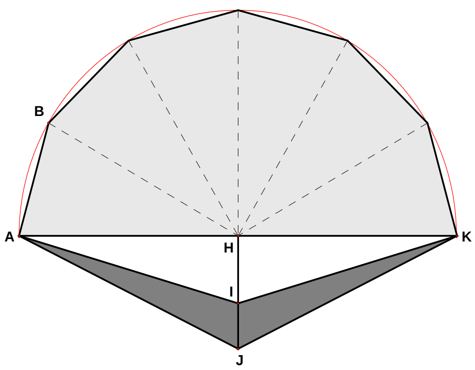
a) Bestem de tilsvarende deskriptorer for Hold 2, og beskriv forskellen mellem de to holds præstationer ved hjælp af de nævnte deskriptorer.

8.012

Opgave 7

På figuren ses en vifte, der består af seks ens ligebenede trekanter samt et håndtag. Viften er symmetrisk omkring linien gennem H, I og J, og $|AH| = |BH| = 10,0$.

De seks trekanter danner tilsammen en figur, som kan indskrives i en halvcirkel med centrum i H .



a) Bestem vinkel $\angle AHB$ samt længden af viftekanten AB .

Viftens håndtag $AJKI$, der er skraveret på figuren, er sammensat af to ens trekanter. I trekant AIJ er $|AI| = 11,2$ og $|IJ| = 2,0$.

b) Bestem håndtagets samlede areal, når. $\angle AIJ = 116,8^{\circ}$

8.013
Opgave 8

Udviklingen i verdens befolkningstal havde i 1960 en årlig vækstrate på 2 %, mens den årlige vækstrate i 2004 var 1 %.

a) Bestem fordoblingstiden for væksten i verdens befolkningstal, hvis vækstraten havde fortsat med at være 2 % om året efter 1960.

I 2004 var der 6 milliarder mennesker i verden.

b) Hvor mange mennesker vil der være i verden i 2050, hvis væksten fortsætter med at være 1 % om året efter 2004?

I en model for udviklingen i verdens befolkningstal antages det, at der er en lineær sammenhæng mellem vækstraten og tiden (målt i antal år efter 1960).

c) Hvornår er vækstraten ifølge modellen nået ned på 0,1 %?

8.014
Opgave 9

Om en differentiabel funktion *f* oplyses, at

$$f\,'(x) = (x+3)(x+1)^2(x-1)\ .$$

a) Bestem monotoniforholdene for *f*.

En anden funktion *g* er bestemt ved

$$g(x) = 3x - \mathrm{e}^x\ .$$

Grafen for *g* har en tangent *t*, der er parallel med tangenten til grafen for *f* i punktet $P(-2, f(-2))$.

b) Bestem koordinatsættet til røringspunktet for *t*.

8.015
Opgave 10

Temperaturen (målt i ˚C) i en speciel ovn til brandprøvning udvikler sig som en funktion af tiden *t* (målt i antal minutter efter at ovnen er tændt). Det oplyses, at temperaturen som funktion af tiden kan beskrives ved funktionen

$$f(t) = 20 + 150\ln(8t+1)\ ,$$

hvor $f(t)$ er temperaturen, og *t* er tiden.

a) Giv en beskrivelse af den information funktionen giver om temperaturudviklingen i ovnen, og inddrag heri en fortolkning af $f\,'(2)$ og $f\,'(20)$.

Kilde: DS 1051.1 Brandprøvning. Bygningsdeles modstandsevne mod brand, 1979.

Vejledende opgavesæt nr. 2
1. delprøve
prøven uden hjælpemidler

8.016
Opgave 1 Løs ligningen $2x^2 - 6x + 4 = 0$.

8.017
Opgave 2 Om en variabel N oplyses, at den er omvendt proportional med kvadratet på en variabel d.

Bestem N udtrykt ved d.

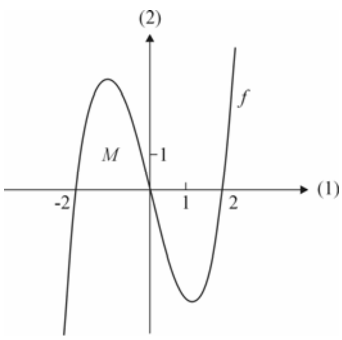
8.018
Opgave 3 En funktion $f(x)$ er givet ved $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$.

Bestem monotoniforholdene for $f(x)$.

8.019
Opgave 4 En ret linie har hældningskoefficienten -2 og skærer koordinatsystemets førsteakse i punktet $P(3,0)$.

Bestem en forskrift for den funktion f, der har denne rette linie som graf.

8.020
Opgave 5 Funktionen $f(x)$ er bestemt ved $f(x) = x^3 - 4x$.
På figuren ses en skitse af grafen for $f(x)$. Grafen skærer førsteaksen i punkterne $P(-2,0)$, $O(0,0)$ og $Q(2,0)$. Sammen med førsteaksen afgrænser grafen i anden kvadrant en punktmængde M, som har et areal.



Bestem arealet af denne punktmængde.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Vejledende opgavesæt nr. 2
2. delprøve
prøven med hjælpemidler

Kun én af opgaverne 12a og 12b må afleveres til bedømmelse

8.021

Opgave 1 En parabel er graf for funktionen $f(x) = -2x^2 + 6x + 1$.

a) Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt.

8.022

Opgave 2 En eksponentielt aftagende funktion er givet ved $f(t) = 100 \cdot e^{-0.2 \cdot t}$.

a) Bestem halveringskonstanten.

8.023

Opgave 3 Dugongs, også kaldet Søkøer, er havdyr, som kan blive omkring 3 meter lange, og som har en levetid på 50-60 år. Tabellen viser sammenhængen mellem søkøers længde (målt i meter) og deres alder (målt i år).

Alder	1,5	2,5	5,0	7,0	9,5	10,0	13,0	17,0	22,5	29,0
Længde	1,97	2,02	2,15	2,35	2,39	2,41	2,47	2,56	2,70	2,72

Kilde: Marsh, H. R. (1980). *Age determination of the dugong in Northern Australia and its biological implications.*

I det følgende antages, at søkøers længde som funktion af alderen med tilnærmelse er en funktion af typen $f(x) = b \cdot x^a$, hvor x er alderen, og $f(x)$ er længden.

a) Bestem tallene a og b, og opskriv en forskrift for funktionen f.

b) Bestem ved hjælp af *f*, længden af en søko, der er 8 år gammel, og bestem alderen på en søko, som har en længde på 2,25 meter.

8.024

Opgave 4 a) Bestem nulpunkter for funktionen $f(x) = x^3 - 12x$.

8.025

Opgave 5 a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for funktionen

$$f(x) = -\ln x + e^x \text{ i punktet } P(2, f(2)).$$

8.026

Opgave 6 I en bestemt type lukket kasse skal længden være 2 gange bredden, og højden skal være 0,4 gange bredden.

a) Bestem kassens overfladeareal udtrykt ved bredden.

8.027

Opgave 7 Holdbarheden af dybfrosne varer afhænger af temperaturen i fryseren. For en bestemt type pølse er holdbarheden D (målt i døgn) som funktion af temperaturen T (målt i ºC) i fryseren givet ved $D(T) = 15,71 \cdot 0,8913^T$.

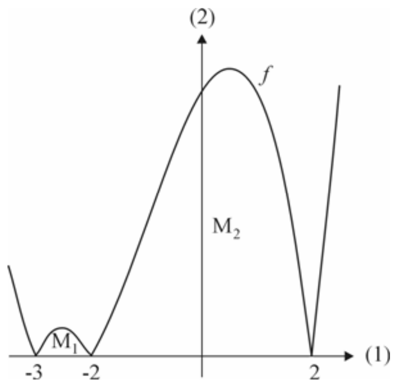
a) Beskriv hvilken information funktionen giver om pølsens holdbarhed, og inddrag i beskrivelsen en fortolkning af de konstanter, der indgår i forskriften.

Kilde: Poul Erner Andersen og Jørgen Risum, Introduktion til Vore Levnedsmidler, Bind 6, Polyteknisk Forlag 1999, *ISBN 87-502-0831-4.*

8.028

Opgave 8 På figuren ses grafen for en funktion, der har nulpunkterne $-3,\ -2$ og 2. Sammen med førsteaksen afgrænser grafen to punktmængder M_1 og M_2. Det oplyses, at arealerne af punktmængderne er henholdsvis $\frac{3}{4}$ og 32.

a) Bestem $\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx$ og $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$.



8.029

Opgave 9 I en model for den fremtidige udvikling af atmosfærens kuldioxid-indhold *Q* (målt i mia. tons) antages det, at væksthastigheden for kuldioxid-indholdet er givet ved $\frac{dQ}{dt} = -3 + 5 \cdot 1,02^t$, hvor *t* er tiden målt i år efter 1984.

a) Hvornår er væksthastigheden tre gange så stor som i 1984?

8.030

Opgave 10 I en ligebenet trekant ABC er AC og BC de lige lange sider, og siden AB er 2 enheder længere end BC .

a) Bestem *a*, således at $\angle C = 90^\circ$.

8.031

Opgave 11 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 3x^2 - 21x + 30 .$$

a) Bestem den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet $P(2,42)$.

8.032

Opgave 12a Figuren viser grafen for funktionen

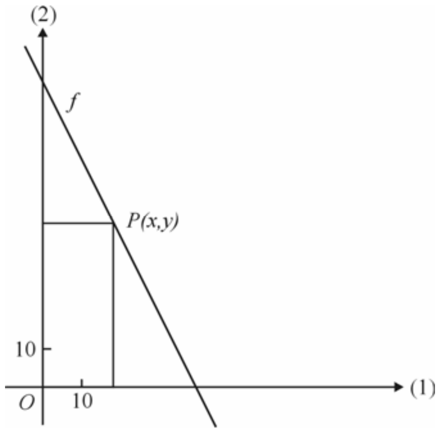
$$f(x) = 80 - 2x$$

sammen med et rektangel i koordinatsystemets første kvadrant.

Rektanglet har et hjørne i koordinatsystemets begyndelsespunkt $O(0,0)$, og det modstående hjørne $P(x,y)$ ligger på grafen for *f*.

a) Angiv arealet af rektanglet som en funktion af x.

b) Bestem det størst mulige areal af rektanglet.



8.033

Opgave 12b En funktion *f*, er givet ved $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + x^3 - 3x^2 + 3$.

a) Bestem de lokale ekstrema for $f(x)$.

b) Bestem for enhver værdi af c antallet af løsninger til ligningen $f(x) = c$.

Kun én af opgaverne 12a og 12b må afleveres til bedømmelse