

# Kapitel 5

## Rumtid og hyperbolske funktioner

### 5.1 Trigonometriske funktioner

Inden vi kaster os ud i de hyperbolske funktioner, er det en god ide at repetere nogle facts om de mest almindelige trigonometriske funktioner,  $\sin(\theta)$ ,  $\cos(\theta)$  og  $\tan(\theta)$ .

Som bekendt afbilder funktionerne  $\sin(\theta)$  og  $\cos(\theta)$  enhedscirklen - vist med blå i figur 5.1 - idet

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \quad (5.1)$$

På figuren er vinklen  $\theta$  indtegnet sammen med de tilhørende værdier for  $\sin(\theta)$  og  $\cos(\theta)$ . Vinklen  $\theta$  antager værdier i intervallet fra 0 til  $2\pi$  (modulo  $2\pi$ ), idet størrelsen er givet som cirkeludsnittets længde (tegnet med rødt). Alternativt kan man måle vinklen med en normal vinkelmåler (grader eller radianer ifht.  $x$ -aksen) eller sætte vinklen lig med 2 gange arealet mellem  $x$ -aksen, cirkelbuen og vinkelpilen. Desuden er  $\tan(\theta)$  -  $y$ -afstanden fra  $x$ -aksens  $(1,0)$  til forlængelsen af vinkelpilen - indtegnet med lys blå - og det ses at efterhånden som  $\theta$  går mod  $\pi/2$ , går  $\tan(\theta)$  mod  $\infty$ .

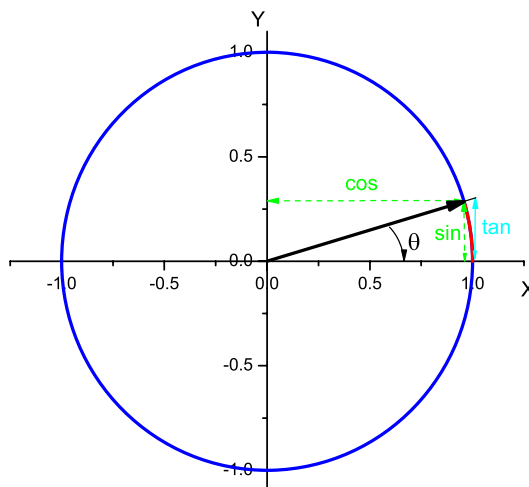
En rotation af koordinatsystemet fremkommer ved at benytte

$$x' = x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \quad (5.2)$$

$$y' = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \quad (5.3)$$

og cirkelns ligning

$$r^2 = x^2 + y^2 = 1 \quad (5.4)$$



Figur 5.1: Trigonometriske funktioner afbildet på enhedscirklen.

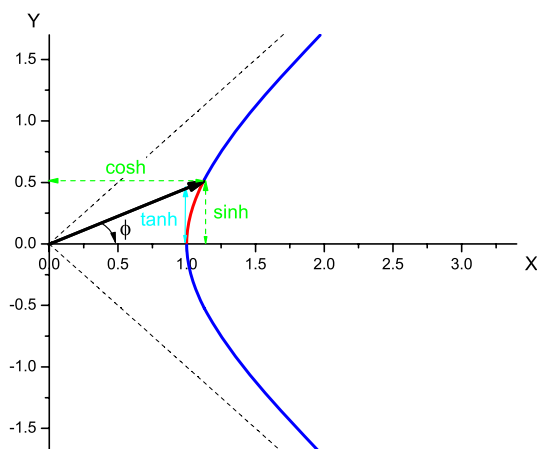
fastlægger afstanden fra centrum til ethvert punkt på cirkelbuen til at være 1.

## 5.2 Hyperbolske funktioner

På næsten samme måde kan vi nu se på de mest almindelige hyperbolske funktioner,  $\sinh(\theta_h)$ ,  $\cosh(\theta_h)$  og  $\tanh(\theta_h)$ . Her afbilder funktionerne  $\sinh(\theta_h)$  og  $\cosh(\theta_h)$  hyperblen idet

$$\cosh^2(\theta_h) - \sinh^2(\theta_h) = 1 \quad (5.5)$$

hvor vinklen  $\phi$  er indtegnet i figur 5.2 sammen med de tilhørende værdier for  $\sinh(\theta_h)$  og  $\cosh(\theta_h)$ . Argumentet, den hyperbolske vinkel  $\theta_h$  - som *ikke* er lig  $\phi$  - antager værdier i intervallet fra 0 til  $\infty$ , idet størrelsen er givet som hyperbeludsnittets længde (tegnet med rødt). Desuden er  $\tanh(\theta_h)$  -  $y$ -afstanden fra  $x$ -aksens  $(1,0)$  til vinkelpilen indtegnet med lys blå - og det ses at efterhånden som  $\theta_h$  går mod  $\infty$ , går  $\tanh(\theta_h)$  mod 1. Som i cirkeltilfældet kan man alternativt sætte vinklen lig med 2 gange arealet mellem  $x$ -aksen, hyperbelbuen og vinkelpilen. Men læg mærke til at den hyperbolske



Figur 5.2: Hyperbolske funktioner afbildet på en hyperbel.

vinkel  $\theta_h$  *ikke* kan måles med en normal vinkelmåler. Derimod, den vinkel man *kan* måle med en vinkelmåler  $\phi$  er givet som  $\tan(\phi) = \tanh(\theta_h)$ , idet jo netop  $\tanh(\theta_h)$  er højden ved  $x = 1$ , dvs. stigningen.

I den specielle relativitetsteori er der faktisk en vigtig størrelse der ligner venstresiden i ligning (5.5), nemlig definitionen af rumtids-intervallet (her sat til 1 i lighed med enhedscirklen ovenfor)

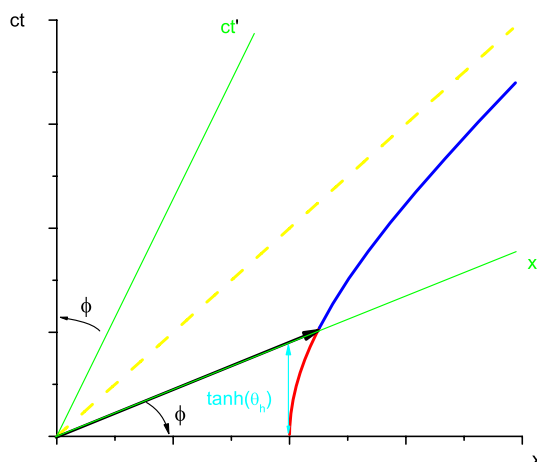
$$s^2 = x^2 - c^2t^2 = 1 \quad (5.6)$$

der samtidig er invariant, ligesom højresiden i ligning (5.5). Der er ligeledes en størrelse der går mod 1 når energien går mod  $\infty$ , nemlig  $\beta = v/c$  og en besnærende lighed mellem skiftet af fortegn på andet led i *både* ligning (5.5) ifht. ligning (5.1) og ligning (5.6) ifht. ligning (5.4). Det er derfor nærliggende, at relativistiske fænomener kan beskrives med hyperbolske funktioner.

Men først benytter vi Lorentz-transformationen til at finde ud af hvordan akserne i  $S'$  er orienteret ifht. akserne i  $S$ , se figur 5.3

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x - \beta ct) \quad (5.7)$$

så vi finder  $ct'$ -aksens retning i  $S$  ved at sætte  $x' = 0$  (som jo gælder alle punkter på  $ct'$ -aksen), dvs.  $x = \beta ct$ , der er en linie med hældning  $\beta$  i forhold



Figur 5.3: En Lorentz-transformation til et system  $S'$  der bevæger sig med den relative hastighed  $\beta = v/c = \tanh(\theta_h) = \tan(\phi)$ .

til  $ct$ -aksen i et  $(x, ct)$ -diagram. Tilsvarende finder vi ved at sætte  $ct' = 0$  (alle punkter på  $x'$ -aksen) ind i

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(ct - \beta x) \quad (5.8)$$

at  $\beta x = ct$ , dvs. en linie med hældning  $\beta$  i forhold til  $x$ -aksen i det samme diagram. Men det er jo tangens til vinklen  $\phi$  fra før! Faktisk kan vi sætte

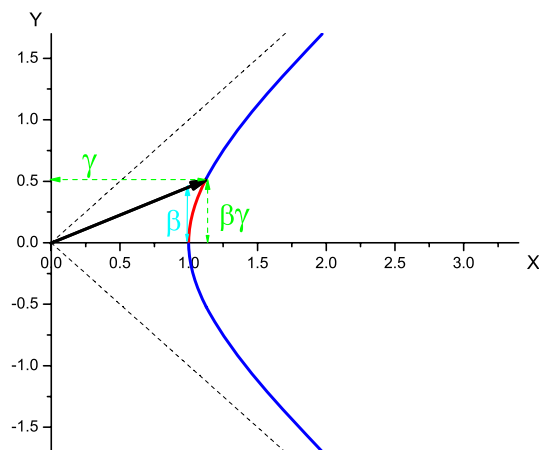
$$\beta = \frac{v}{c} = \tanh(\theta_h) = \tan(\phi) \quad (5.9)$$

så vi nu kan udtrykke hastigheden ved en (hyperbolsk) vinkel, og tegne den med vinklen  $\phi = \arctan(\beta)$ .

Resultatet er vist i figur 5.3, hvor de grønne akser er fra det mærkede system  $S'$  og de sorte er fra  $S$ . Med gult er vist en linie med hældning 1, dvs.  $v = c$ , altså lys. Så når det ene system nærmer sig lysets hastighed i forhold til det andet, klapper akserne sammen - begge med en (trigonometrisk) vinkel på  $\phi = \arctan(\beta)$  ifht. de umærkede akser. Rumtids-diagrammet kaldes ofte et Minkowski-diagram, opkaldt efter Hermann Minkowski, der introducerede

begrebet rumtid med: 'For fremtiden vil rum for sig selv og tid for sig selv være dømt til at fortone sig, og kun en form for forening mellem de to vil opretholde en uafhængig virkelighed'.

Det er dog ikke hele historien fordi aksernes inddeling ikke er den samme. Men det er ikke så svært at finde den rette inddeling i  $S'$  idet hyperblen er givet ved ligning (5.6) da den går igennem punktet  $(x = 1, ct = 0)$  i  $S$ . Det samme er gældende i det mærkede system eftersom venstresiden i ligning (5.6) er en invariant, så det punkt hyperblen skærer  $x'$ -aksen er 1. Med andre ord siger ligning (5.6) - som i cirkeltilfældet - at 'afstanden' (i dette tilfælde *rumtidsafstanden*) fra centrum til ethvert punkt på hyperblen er 1 - i alle koordinatsystemer. Selvom det ikke ser sådan ud på tegningen!



Figur 5.4: De relativistiske størrelser  $\gamma$ ,  $\beta$  og  $\beta\gamma$  afbildet på en hyperbel. De er henholdsvis proportionale med energien, hastigheden og impulsen.

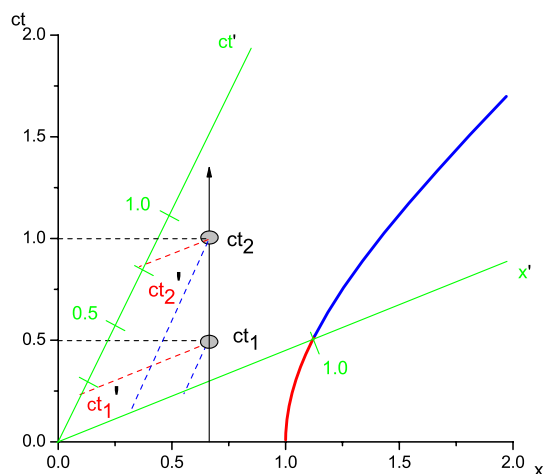
Og ifølge ligning (5.5) må ligning (5.6) være lig med  $\cosh^2(\theta_h) - \sinh^2(\theta_h)$ , ganske som i tilfældet med cirklen hvor  $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = x^2 + y^2 = 1$ . De hyperbolske koordinattransformationer, dvs. Lorentz-transformationerne, bliver derfor

$$ct' = ct \cosh(\theta_h) - x \sinh(\theta_h) \quad (5.10)$$

$$x' = -ct \sinh(\theta_h) + x \cosh(\theta_h) \quad (5.11)$$

Læg mærke til ligheden med ligning (5.3) der beskriver en trigonometrisk rotation, og specielt at forskellen fra trigonometriske til hyperbolske funktioner er forbundet med forskellen i fortegnet i ligning (5.6) sammenlignet med ligning (5.4). Ifølge ligning (5.9) har vi altså  $\beta = \frac{v}{c} = \tanh(\theta_h)$ , dvs. den hyperbolske vinkel kan findes ud fra hastigheden i enheder af lysets  $\theta_h = \operatorname{arctanh}(\beta)$ . Lorentz-faktoren  $\gamma$  kan findes på samme vis, idet  $\tanh^2(\theta_h) = 1 - 1/\cosh^2(\theta_h)$  så  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 1/\sqrt{1-\tanh^2(\theta_h)} = \cosh(\theta_h)$ .

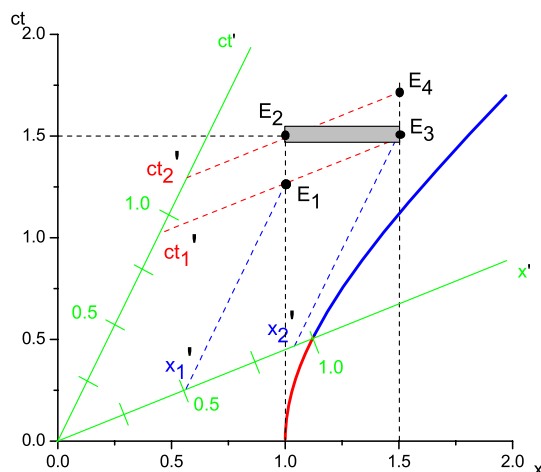
Som vist i figur 5.4, øges  $\cosh(\theta_h)$ , dvs.  $\gamma$ , efterhånden som  $\theta_h$ , dvs.  $\beta$ , bliver større - helt som ventet. På tilsvarende vis fås at  $\sinh(\theta_h) = \cosh(\theta_h) \tanh(\theta_h) = \beta\gamma$ .



Figur 5.5: Tidsudvidelse, set i Minkowski-rummet.

Som et eksempel, vist i figur 5.5, kan vi se på tidsudvidelse, altså det faktum at et tidsrum ser længere ud fra et system i bevægelse. I figuren er vist to begivenheder der foregår i samme punkt i systemet  $S$ , men til forskellige tider,  $t_1$  og  $t_2$ , der er adskilt af  $ct = 0.5$  som indikeret med de vandrette stiplede linier. For at finde det tilsvarende tidsrum i  $S'$  kalibreres først  $x'$ -aksen ved at afsætte 1 i det punkt hvor hyperblen krydser akserne, og derefter tegnes linier parallelt med  $x'$ -aksen hen til  $ct'$ -aksen (stiplet,

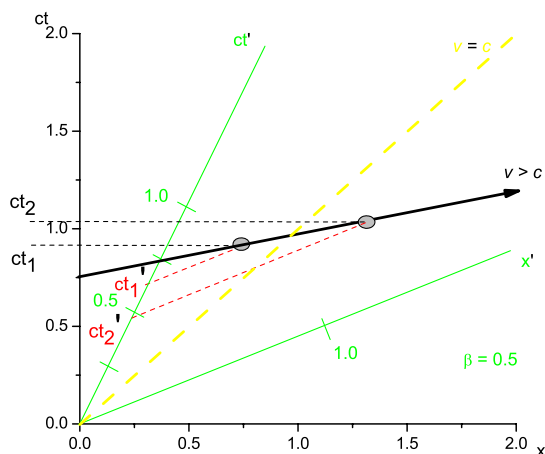
rød). Tidsrummet i  $S'$  kan nu ses direkte at være længere end tidsrummet i  $S$  ( $ct' \simeq 0.6$  sammenlignet med  $ct = 0.5$  i dette tilfælde hvor  $\beta = 0.5$ ). Yderligere kan man, ved at trække linier parallelt med  $ct'$ -aksen ned til  $x'$ -aksen (stiplet, blå) se, at de to begivenheder der foregår samme sted i  $S$ , ikke foregår samme sted i  $S'$ .



Figur 5.6: Længdeforkortning, set i Minkowski-rummet.

Længdeforkortning kan vises på tilsvarende vis: En stang er i hvile i systemet  $S$ , som vist i figur 5.6. Stangen i hvile bevæger sig altså ud ad tidsaksen  $ct$ , men ikke ud ad rumaksen  $x$ , så man skal forestille sig at dens 'verdenslinie' er mellem de to lodrette stiplede linier. Observatøren i  $S$  finder hvilelængden ved *samtidigt* at måle positionerne af hhv. venstre og højre ende af stangen. I det viste tilfælde er svaret forskellen mellem positioner målt ved  $E_2$  og  $E_3$  der er *samtidige*: 0.5. Observatøren i systemet  $S'$  hvori stangen er i bevægelse finder ligeledes længden ved *samtidigt* at måle positionerne af hhv. venstre og højre ende af stangen, men i dette tilfælde (da de ikke kan blive enige om *samtidighed*) er det begivenhederne  $E_1$  og  $E_3$  eller ( $E_2$  og  $E_4$ ), der er *samtidige* iflg. de røde stiplede linier - stangen bevæger sig jo opad mellem de lodrette stiplede linier efterhånden som tiden går. Så for  $S'$  findes længden ved at indtegne linier parallelt med  $ct'$ -aksen ned til  $x'$ -aksen fra  $E_1$  og  $E_3$  der er *samtidige* i dette system. I det mærkede system hvori stan-

gen er i bevægelse findes længden derfor til at være  $x'_2 - x'_1$  der er *mindre* end 0.5 - længdeforkortning! Det ses altså næsten direkte, at længdeforkortning 'skyldes' mangel på en universel samtidighed, se også bemærkningerne i Sartori s. 86 nederst.



Figur 5.7: En partikel med overlyshastighed til to tidspunkter i hhv.  $S$  og  $S'$ .

For at runde emnet af, kan vi se på en *hypotetisk* overlyspartikel, altså en såkaldt 'tachyon' der bevæger sig med en hastighed større end lysets, se figur 5.7. Til tiden  $t_1$  i  $S$  - indikeret med den vandrette stiplede linie - er partiklen i et bestemt punkt, og til et *senere* tidspunkt  $t_2$  har den bevæget sig mod højre med overlyshastighed (udenfor lyskeglen). Set fra systemet  $S'$  der bevæger sig med en hastighed  $\beta = 0.5$  i forhold til  $S$ , er partiklen først i punkt 2, dernæst i punkt 1, da  $t'_2 < t'_1$ . De to observatører kan således ikke blive enige om tidens retning for partiklen, og virkning kan komme før årsag! Der er dog - rent teoretiske - løsninger på dette dilemma, som beskrevet i Sartori s. 237.

## 5.3 Rapiditet

Den hyperbolske vinkel - som altså er et udtryk for hastigheden - er nyttig idet den er additiv, og i den forbindelse kaldes vinklen for *rapiditet*. Betragt Lorentz-transformationerne som angivet i ligning (5.10) og (5.11) og omskriv dem til matrix-form

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta_h) & -\sinh(\theta_h) \\ -\sinh(\theta_h) & \cosh(\theta_h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = L(\theta_h) \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

To på hinanden følgende Lorentz-transformationer med hastighederne  $v_1$  og  $v_2$  må altså (idet  $\beta_i = \frac{v_i}{c} = \tanh(\theta_{hi})$ ) være givet fra  $L(\theta_{h12}) = L(\theta_{h1}) \cdot L(\theta_{h2})$ . Udfører man matrix-multiplikationen får man at

$$L(\theta_{h1}) \cdot L(\theta_{h2}) = L(\theta_{h1} + \theta_{h2}) \quad (5.12)$$

idet additionsformlerne for de hyperbolske funktioner er

$$\cosh(\theta_{h1} + \theta_{h2}) = \cosh(\theta_{h1}) \cosh(\theta_{h2}) + \sinh(\theta_{h1}) \sinh(\theta_{h2}) \quad (5.13)$$

$$\sinh(\theta_{h1} + \theta_{h2}) = \cosh(\theta_{h1}) \sinh(\theta_{h2}) + \sinh(\theta_{h1}) \cosh(\theta_{h2}) \quad (5.14)$$

Så man kan altså udføre en Lorentz-transformation til et system med  $v_1$  fulgt af en Lorentz-transformation til et system med  $v_2$  ved at udføre Lorentz-transformationen bestemt ved *summen* af rapiditeterne. På en måde - idet buelængden på hyperblen er et udtryk for den hyperbolske vinkel som igen er lig rapiditeten - lægger man buelængder sammen, når man laver to på hinanden følgende Lorentz-transformationer.