

De overordnede mål med matematisk forskning.

Et personligt bud - inspireret af Timothy Gowers

Lisbeth Fajstrup
Aalborg Universitet

Matematiklærerforeningens møde i Herning
Februar 2011.

Hvorfor dette emne?

- I AT indgår overvejelser om fagenes “natur.”
- Matematik som videnskab er meget andet end dens anvendelser.
- Nogle (også elever) fascineres af anvendeligheden - og fascinationen afhænger for mange af anvendelsen. Men andre kan fanges af matematikken i sig selv.
- At fascineres af faginterne spørgsmål er både tilladt og nyttigt (!)
- Store uløste problemer er drivkraft på makroniveau, men ikke på mikroniveau.

- Princeton Companion to Mathematics. *Editor: Timothy Gowers. Associate Editors June Barrow-Green og Imre Leader.* Princeton University Press. 2008.
- Tinne Hoff Kjeldsen. *Hvad er matematik.* Akademisk Forlag 2011.
- Timothy Gowers. *A Very Short Introduction to Mathematics.* Oxford University Press. 2002.
- Min egen forskning.

Bertrand Russel, The principles of mathematics.

Definition af ren matematik:

Pure Mathematics is the class of all propositions of the form "p implies q," where p and q are propositions containing one or more variables, the same in the two propositions, and neither p nor q contains any constants except logical constants. And logical constants are all notions definable in terms of the following: Implication, the relation of a term to a class of which it is a member, the notion of such that, the notion of relation, and such further notions as may be involved in the general notion of propositions of the above form. In addition to these, mathematics uses a notion which is not a constituent of the propositions which it considers, namely the notion of truth.

Timothy Gowers: The Princeton Companion to mathematics could be said to be about everything that Russel's definition leaves out.

THE LATTICE OF D-STRUCTURES

Abstract. The set of d-structures on a topological space form a lattice and in fact a locale. There is a Galois connection between the lattice of subsets of the space and the lattice of d-structures. Variation of the d-structures induces change in the spaces of directed paths. Hence variation of d-structures and variation of the “forbidden area” may be considered together via for instance (co)homology and homotopy sequences.

Er der en anvendelse? Hvor kommer spørgsmålene fra? Svar: Muligvis. Og fra datalogi - sådan da.

THE LATTICE OF D-STRUCTURES

Abstract. The set of d-structures on a topological space form a lattice and in fact a locale. There is a Galois connection between the lattice of subsets of the space and the lattice of d-structures. Variation of the d-structures induces change in the spaces of directed paths. Hence variation of d-structures and variation of the “forbidden area” may be considered together via for instance (co)homology and homotopy sequences.

Er der en anvendelse? Hvor kommer spørgsmålene fra? Svar: Muligvis. Og fra datalogi - sådan da.

Algebraic topology and concurrency

Lisbeth Fajstrup, Martin Raussen and Eric Goubault

We show in this article that some concepts from homotopy theory, in algebraic topology, are relevant for studying concurrent programs. We exhibit a natural semantics of semaphore programs, based on partially ordered topological spaces, which are studied up to “elastic deformation” or homotopy, giving information about important properties of the program, such as deadlocks, unreachables, serializability, essential schedules, etc. In fact, it is not quite ordinary homotopy that has to be used, but rather a “directed homotopy” that does not reverse the flow of time. We show some of the essential differences between ordinary and directed homotopy through examples. We also relate the topological view to a combinatorial view of concurrent programs closer to transition systems, through the notion of a cubical set. Finally we apply some of these concepts to the proof of the safeness of a two-phase protocol well known and used in concurrent



Emner - ikke i rækkefølge

- Hvorfor dner Russells definition ikke?
- Hvilke objekter studeres?
- Hvilke strukturer studeres?
- Hvilke spørgsmål stilles, og hvor kommer de fra?
- Abstraktion, klassifikation, algoritmer.
- Eksperimenter

Der kommer masser af ny matematik - hele tiden

MathReviews

Der er 2.200.000 artikler i Math Reviews. (2.643.814 registrerede emner - artikler, bøger, proceedings.) 1900 aktive tidsskrifter. 577.618 forfattere.

Nye artikler

- 2008: 84593
- 2007: 81007
- 2006: 76104
- 2005: 70704
- 2000: 58185; 1995: 49279; 1990: 43493; 1985: 37201; 1980: 35371; 1975: 32903; 1970: 21748; 1965: 15806;

Emner - Math Subject Classification MSC

- ca.6300 emner
- Eksempler: 11-XX Talteori. 11Axx: Elementær talteori. 11A41 Primtal. 11Nxx Multiplikativ talteori. 11Pxx Additiv talteori; partitioner.
- 68-XX Computer Science(For papers involving machine computations and programs in a specific mathematical area, see section-04 in that area)
- 70-XX Mechanics of particles and systems.

Et bud på en opdeling- fra Companion to..

- 1 Løsning af ligninger
- 2 Klassifikation
- 3 Generalisering
- 4 At opdage mønstre.
- 5 Forklare tilsyneladende tilfældige sammentræf.
- 6 At tælle og måle
- 7 Bestemme om forskellige matematiske egenskaber er sammenlignelige
- 8 Arbejde med argumenter, som ikke er helt præcise (rigorous)
- 9 At finde eksplicitte beviser og algoritmer
- 10 Definitioner, sætninger, lemmaer, formodninger, propositioner, beviser,

Løsning af ligninger

- Mange typer ligninger:
 - Lineære ligninger, $A\vec{x} = \vec{b}$
 - Polynomieligninger $x^3 + y^3 + z^3 = 3x^2y + 3y^2z + 6xyz$
 - Diofantiske ligninger - heltalsløsninger. Ex. $x^3 + y^3 = z^3$
 - Differentialligninger. $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$
- Spørgsmål: Eksistens af løsninger, entydighed, struktur af løsninger, løsningsrum.
- Direkte spørgsmål: $f(x) = y$. Givet x , find y
- Indirekte spørgsmål: $f(x) = y$. Givet y , find x .

Eksempler

“Løsning til $x^2 = 2$ er $x = \pm\sqrt{2}$ ”

- Løsningen til $x^2 = 2$ er “det tal, som opløftet i anden giver 2”...
- Fra mellemværdisætningen ved vi, der *findes* en positiv løsning ($0^2 = 0$, $2^2 = 4$ og $f(x) = x^2$ er kontinuert). Denne kaldes $\sqrt{2}$.
- Eksistens og egenskaber ved løsninger er ofte nok.
- Løsning af andengradsligninger - formel, men resultatet involverer (ofte) \sqrt{r} , hvor r ikke er et kvadrattal.
- Højere ordens ligninger - Abel og Galois: Der findes ikke en formel for løsning af femtegradsligninger. Værktøj - gruppeteori - symmetri.
- Algebraens fundamentalsætning: Der findes n komplekse rødder i $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, talt med multiplicitet.

Eksempler

“Løsning til $x^2 = 2$ er $x = \pm\sqrt{2}$ ”

- Løsningen til $x^2 = 2$ er “det tal, som opløftet i anden giver 2”...
- Fra mellemværdisætningen ved vi, der findes en positiv løsning ($0^2 = 0$, $2^2 = 4$ og $f(x) = x^2$ er kontinuert). Denne kaldes $\sqrt{2}$.
- Eksistens og egenskaber ved løsninger er ofte nok.
- Løsning af andengradsligninger - formel, men resultatet involverer (ofte) \sqrt{r} , hvor r ikke er et kvadrattal.
- Højere ordens ligninger - Abel og Galois: Der findes ikke en formel for løsning af femtegradsligninger. Værktøj - gruppeteori - symmetri.
- Algebraens fundamentalsætning: Der findes n komplekse rødder i $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, talt med multiplicitet.

Eksempler

“Løsning til $x^2 = 2$ er $x = \pm\sqrt{2}$ ”

- Løsningen til $x^2 = 2$ er “det tal, som opløftet i anden giver 2”...
- Fra mellemværdisætningen ved vi, der *findes* en positiv løsning ($0^2 = 0$, $2^2 = 4$ og $f(x) = x^2$ er kontinuert). Denne kaldes $\sqrt{2}$.
- Eksistens og egenskaber ved løsninger er ofte nok.
- Løsning af andengradsligninger - formel, men resultatet involverer (ofte) \sqrt{r} , hvor r ikke er et kvadrattal.
- Højere ordens ligninger - Abel og Galois: Der findes ikke en formel for løsning af femtegradsligninger. Værktøj - gruppeteori - symmetri.
- Algebraens fundamentalsætning: Der findes n komplekse rødder i $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, talt med multiplicitet.

Polynomieligninger i flere variable

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3x^2y + 3y^2z + 6xyz$$

Geometrisk/topologisk synspunkt: En ligning, i.e., 2 frihedsgrader i løsningsmængden.

Singularitet i $(0, 0, 0)$.

Algebraisk geometri: Flere sammenhørende polynomieligninger - løsningsmængderne er varieteter.

Diofantiske ligninger

- Hilberts 10. problem: Er der en systematisk løsningsmetode til Diofantiske ligninger.
- Church, Turing: Systematisk tilgang = algoritme. Church og Turing gav to (forskellige, men faktisk ækvivalente) formaliseringer af algoritmebegrebet.
- Samt haltingproblemet. Der er ikke en systematisk måde, hvorpå man kan afgøre, om et givet programmeringssprog vil stoppe under et givet input - en streng - eller løbe for evigt. (Løst af Turing.)
- Moderne formulering af Hilberts problem: Man kan ikke lave et computerprogram, som tager en hvilken som helst Diofantisk ligning som input og giver JA som output, hvis den har en løsning, NEJ ellers. Julia Robinson, Martin Davis, Hilary Putnam, Yuri Matiyasevich. Oversætter til Haltingproblemet.

Så man må studere klasser af Diofantiske ligninger. E.g. 

- Eksistens- og entydighed
- Egenskaber - kvalitative, asymptotiske e.e. for tidsafhængige ligninger: Er løsningerne aftagende med tiden? Blæser op med tiden? Groft set det samme med tiden.
- Klasser af ligninger, der *kan* løses eksplicit.
- Approksimation af løsninger.

Givet en matematisk struktur, Hvilke eksempler findes der (som er væsensforskellige)? Eksempelvis endelige grupper, lav en liste, beskriv byggeblokkene.

Jo flere eksempler, man kender, jo bedre kan man tænke over strukturen: Få ideer til og teste hypoteser på (de mærkelige) eksempler, finde modeksempler,...

- Identificere byggeblokke og familier. Eksempel: Regulære Polytoper.
- Ækvivalens, ikke-ækvivalens og invarians. Eksempel: Eulerkarakteristik.

Ækvivalens, ikke-ækvivalens, invarians.

Eksempel: Hvis to trekanter er kongruente, har de samme areal. Heraf: hvis de *ikke* har samme areal, så er de *ikke* kongruente.

Areal er invariant under kongruens.

Eksempel: Eulerkarakteristik. $\chi = V - E + F$ V =antal hjørner.
 E = antal kanter. F =antal sideflader.

χ er invariant under kontinuert deformation.

En torus er ikke kontinuert deformerbar til en kugleflade. (Da torus har $\chi = 0$, sfæren har $\chi = 2$)

Invarianter skal være til at regne ud.

Invarianter skal skelne nok. Den konstante afbildning

$f(\text{objekt}) = 0$ er en invariant for hvad som helst...

$f(\text{objekt}) = \text{objekt}$ skelner godt, men hjælper ikke noget.

Svække hypotesen- forstærke konklusionen.

Hvorfor vise noget andet (mere), end der blev spurgt om?

Eksempel: Findes der et helt tal k , som kan skrives som en sum af kubiktal $k = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ på 10 forskellige måder? (Vi ved $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$)

Afsvækning af hypotesen: Givet en følge a_1, a_2, a_3, \dots af positive hele tal med en given egenskab. Findes der så et positivt helt tal, som kan skrives som en sum af fire elementer fra følgen på mindst 10 måder?

Antal kubiktal mindre end 1.000.000.000 er mere end 1000.

Svække hypotesen- forstærke konklusionen.

Hvorfor vise noget andet (mere), end der blev spurgt om?

Eksempel: Findes der et helt tal k , som kan skrives som en sum af kubiktal $k = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ på 10 forskellige måder? (Vi ved $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$)

Afsvækning af hypotesen: Givet en følge a_1, a_2, a_3, \dots af positive hele tal med en given egenskab. Findes der så et positivt helt tal, som kan skrives som en sum af fire elementer fra følgen på mindst 10 måder?

Antal kubiktal mindre end 1.000.000.000 er mere end 1000.

Svække hypotesen- forstærke konklusionen.

Hvorfor vise noget andet (mere), end der blev spurgt om?

Eksempel: Findes der et helt tal k , som kan skrives som en sum af kubiktal $k = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ på 10 forskellige måder? (Vi ved $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$)

Afsvækning af hypotesen: Givet en følge a_1, a_2, a_3, \dots af positive hele tal med en given egenskab. Findes der så et positivt helt tal, som kan skrives som en sum af fire elementer fra følgen på mindst 10 måder?

Antal kubiktal mindre end 1.000.000.000 er mere end 1000.

Generalisering - svække hypotesen - forstærke konklusionen

Lad a_1, a_2, \dots, \dots være en følge, hvor de første 1000 tal er mindre end 1.000.000.000. Så findes et tal, der kan skrives som en sum af fire elementer fra følgen på mindst 10 måder?

Der er $1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 997 / 24$ måder at vælge fire tal fra følgen $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$. Summen af fire sådanne er mindre end $4 \cdot 1.000.000.000$. Men

$1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 997 / 24 > 40 \cdot 1.000.000.000$.

De første 4.000.000.000 tal kan altså *i gennemsnit* skrives som en sådan sum på mindst 10 måder.

Altså må der findes tal, der kan skrives som en sådan sum på mindst 10 måder. Specielt gælder dette for kubiktal.

Generalisering - svække hypotesen - forstærke konklusionen

Lad a_1, a_2, \dots, \dots være en følge, hvor de første 1000 tal er mindre end 1.000.000.000. Så findes et tal, der kan skrives som en sum af fire elementer fra følgen på mindst 10 måder? Der er $1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 997/24$ måder at vælge fire tal fra følgen $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$. Summen af fire sådanne er mindre end $4 \cdot 1.000.000.000$. Men

$$1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 997/24 > 40 \cdot 1.000.000.000.$$

De første 4.000.000.000 tal kan altså *i gennemsnit* skrives som en sådan sum på mindst 10 måder.

Altså må der findes tal, der kan skrives som en sådan sum på mindst 10 måder. Specielt gælder dette for kubiktal.

Generalisering - svække hypotesen - forstærke konklusionen

Lad a_1, a_2, \dots, \dots være en følge, hvor de første 1000 tal er mindre end 1.000.000.000. Så findes et tal, der kan skrives som en sum af fire elementer fra følgen på mindst 10 måder? Der er $1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 997/24$ måder at vælge fire tal fra følgen $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$. Summen af fire sådanne er mindre end $4 \cdot 1.000.000.000$. Men

$$1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 997/24 > 40 \cdot 1.000.000.000.$$

De første 4.000.000.000 tal kan altså *i gennemsnit* skrives som en sådan sum på mindst 10 måder.

Altså må der findes tal, der kan skrives som en sådan sum på mindst 10 måder. *Specielt gælder dette for kubiktal.*

Generalisering - svække hypotesen - forstærke konklusionen

Lad a_1, a_2, \dots, \dots være en følge, hvor de første 1000 tal er mindre end 1.000.000.000. Så findes et tal, der kan skrives som en sum af fire elementer fra følgen på mindst 10 måder? Der er $1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 997/24$ måder at vælge fire tal fra følgen $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$. Summen af fire sådanne er mindre end $4 \cdot 1.000.000.000$. Men

$$1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 997/24 > 40 \cdot 1.000.000.000.$$

De første 4.000.000.000 tal kan altså *i gennemsnit* skrives som en sådan sum på mindst 10 måder.

Altså må der findes tal, der kan skrives som en sådan sum på mindst 10 måder. Specielt gælder dette for kubiktal.

Bevise et mere abstrakt resultat

Eksempelvis: Fermat's lille sætning; p et primtal, a ikke et multiplum af p . Da giver a^{p-1} rest 1 ved division med p .

Gruppeteori - ordenen af en undergruppe går op i gruppens orden. (Lagrange)

Ny indsigt, forbindelse mellem forskellige områder (talteori og gruppeteori)

Generalisering - identifikation af karakteristiske egenskaber

Eksempel: Udvidelse af \mathbb{R} med løsning til $x^2 = -1$, altså i .
Karakteristiske egenskaber skal holde - vi får $a + bi$ med. Og regneregler for komplekse tal.

$(1 + i)^2 = \dots = 2i$, så $\frac{i+1}{\sqrt{2}}$ er en kvadratrods af i .

Og vi bekymrer os ikke om *hvad* i er - kun dets egenskaber.

Tilsvarende: Definition af x^a generelt: $x^{a+b} = x^a x^b$, $x^1 = x$ samt kontinuitet af $f(t) = x^t$ (eller, at f er voksende).

Generalisering (Abstraktion) - klassifikation

“Abstrakt” betyder ofte matematik, hvor man beskæftiger sig med karakteristiske egenskaber ved et objekt. Mere end objektet selv.

Ultimativt; Givet et aksiomssystem - hvad er konsekvenserne.

Klassifikation: Givet et aksiomssystem - hvad er objekterne.

Fra abstraktion til konkret.

Abstraktion:(Konkrete eksempler) \rightarrow Abstrakt begreb

Klassifikation: Abstrakt begreb \rightarrow Alle eksempler.

Generalisering efter reformulering

Eksempel: Dimension - fra vektorrum til fraktaler.

Geometri \rightarrow (kommutativ) algebra \rightarrow ikke-kommutativ geometri.

Naturlige tal som produkter af primtal \rightarrow primidealer i ringteori.

Generalisering - højere dimension - flere variable.

Struktur i løsningsmængder

Høj symmetri svarer ofte til andre interessante egenskaber.

Forklare tilsyneladende tilfældige sammentræf.

Monstergruppen har

$$2^{46} 3^{20} 5^9 7^6 11^2 13^3 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$$

elementer.

Den er symmetrigruppe for en delmængde (et lattice) i 196883 dimensionalt rum.

I algebraisk talteori optræder j -funktionen. Den *elliptiske modulære funktion*

$$j(z) = e^{-2\pi iz} + 744 + 196884e^{2\pi iz} + 21493760e^{4\pi iz} + \dots$$

$196884 = 196883 + 1$. Tilfældighed??

Nej! Det er indikation af en dyb sammenhæng. - "Monstrous moonshine" - bevist i 1992. Af R. Borcherds.

At tælle og måle

- Eksakt optælling
- Estimerer. Eksempelvis $\pi(n) \sim \frac{n}{\ln(n)}$
- Gennemsnit. Eksempel: Lad n være et tilfældigt, stort positivt helt tal. $\omega(n)$ antal forskellige primfaktorer i n . For $m \leq n \leq 2m$, er $\omega(n)$ i gennemsnit ca. $\log(\log(n))$. Hardy og Ramanujan: standardafvigelse $\sqrt{\log(\log(n))}$.
- Ekstremumsproblemer: Variationsregning. Lineær programmering. Datalogiske spørgsmål: Hvad er det mindste antal step (som funktion af input), i.e., hvor god en algoritme findes der, til at løse et problem. Multiplikation af to $n \times n$ matricer - $n^{2.4}$ (ikke n^3 , som vi g[ø]r det i hånden.)

Bestemme, hvorvidt forskellige matematiske egenskaber er kompatible

Lokalisere *gode* egenskaber:

Eksempel: Endeligt frembragte grupper:

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

Frembragt af

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Kompatible egenskaber - grupper

Orden af et element a . Mindste k , så $a^k = e$ (e er neutralelementet).

Abelske grupper $ab = ba$ for alle $a, b \in G$

Lad G være en gruppe, hvor alle elementer opfylder $a^2 = e$.
 $a^2 = e \Rightarrow a = a^{-1}$.

$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ (generelt - for alle grupper).

Men $(ab)^{-1} = ab$ og $b^{-1}a^{-1} = ba$, så G er Abelsk.

Hvis ydermere G er endeligt frembragt, så er G endelig. Hvad hvis $x^n = e$ for alle $x \in G$ og et fast n . Og endeligt frembragt.

Er G så endelig? Burnside: Ja, hvis $n = 3$. Adian og Novikov i 1968: Nej, hvis $n \geq 4381$

1992 Ivanov: Nej for $n \geq 13$

Hvis G har to frembringere og $n = 5$, ved vi ikke, om G er endelig.

Kompatible egenskaber - grupper

Orden af et element a . Mindste k , så $a^k = e$ (e er neutralelementet).

Abelske grupper $ab = ba$ for alle $a, b \in G$

Lad G være en gruppe, hvor alle elementer opfylder $a^2 = e$.

$a^2 = e \Rightarrow a = a^{-1}$.

$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ (generelt - for alle grupper).

Men $(ab)^{-1} = ab$ og $b^{-1}a^{-1} = ba$, så G er Abelsk.

Hvis ydermere G er endeligt frembragt, så er G endelig. Hvad hvis $x^n = e$ for alle $x \in G$ og et fast n . Og endeligt frembragt.

Er G så endelig? Burnside: Ja, hvis $n = 3$. Adian og Novikov i 1968: Nej, hvis $n \geq 4381$

1992 Ivanov: Nej for $n \geq 13$

Hvis G har to frembringere og $n = 5$, ved vi ikke, om G er endelig.

Kompatible egenskaber - grupper

Orden af et element a . Mindste k , så $a^k = e$ (e er neutralelementet).

Abelske grupper $ab = ba$ for alle $a, b \in G$

Lad G være en gruppe, hvor alle elementer opfylder $a^2 = e$.

$a^2 = e \Rightarrow a = a^{-1}$.

$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ (generelt - for alle grupper).

Men $(ab)^{-1} = ab$ og $b^{-1}a^{-1} = ba$, så G er Abelsk.

Hvis ydermere G er endeligt frembragt, så er G endelig. Hvad hvis $x^n = e$ for alle $x \in G$ og et fast n . Og endeligt frembragt.

Er G så endelig? Burnside: Ja, hvis $n = 3$. Adian og Novikov i 1968: Nej, hvis $n \geq 4381$

1992 Ivanov: Nej for $n \geq 13$

Hvis G har to frembringere og $n = 5$, ved vi ikke, om G er endelig.

Kompatible egenskaber - grupper

Orden af et element a . Mindste k , så $a^k = e$ (e er neutralelementet).

Abelske grupper $ab = ba$ for alle $a, b \in G$

Lad G være en gruppe, hvor alle elementer opfylder $a^2 = e$.

$$a^2 = e \Rightarrow a = a^{-1}.$$

$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ (generelt - for alle grupper).

Men $(ab)^{-1} = ab$ og $b^{-1}a^{-1} = ba$, så G er Abelsk.

Hvis ydermere G er endeligt frembragt, så er G endelig. Hvad hvis $x^n = e$ for alle $x \in G$ og et fast n . Og endeligt frembragt.

Er G så endelig? Burnside: Ja, hvis $n = 3$. Adian og Novikov i 1968: Nej, hvis $n \geq 4381$

1992 Ivanov: Nej for $n \geq 13$

Hvis G har to frembringere og $n = 5$, ved vi ikke, om G er endelig.

Arbejde med ikke helt præcise argumenter

- Betingede resultater- Riemann hypotesen: Artikler med “Hvis Riemannhypotesen holder, så...”
- P vs NP
- Numerisk evidens: Goldbach: Ethvert lige tal er sum af to primtal. OK for $n \leq 10^{14}$. Forventet at holde, hvis primtallene er tilstrækkeligt tilfældige. Der er mange måder at skrive $n = a + b$ og nok primtal til, at man bør ramme dem - hvis de er tilfældigt fordelt.
- “Ulovlige” beregningsmetoder: Fysikere (!!)

Eksplicitte beviser og algoritmer

- Eksistens; Konstruktion/beskrivelse. Indirekte ved modstrid.
- Et spektrum: Formler - beviser, der giver algoritmer til at finde objekterne - Eksistensbevis.
- Forskellige indsigter.

Eksempel: Transcendente tal

Et reelt tal er transcendent, hvis det ikke er rod i noget polynomium med heltalskoefficienter. (Ellers er det algebraisk)
Liouville (1844): En bestemt betingelse \Rightarrow transcendent
Og π og e opfylder betingelsen.

Cantor: Algebraiske tal er tællelige. Det er de reelle ikke.
Der er altså mange flere transcendente end algebraiske.
Konstruktion - Liouville. Eksistens, i.e., reelle tal er typisk transcendent - Cantor.

Eksempel: Transcendente tal

Et reelt tal er transcendent, hvis det ikke er rod i noget polynomium med heltalskoefficienter. (Ellers er det algebraisk)

Liouville (1844): En bestemt betingelse \Rightarrow transcendent

Og π og e opfylder betingelsen.

Cantor: Algebraiske tal er tællelige. Det er de reelle ikke.

Der er altså mange flere transcendente end algebraiske.

Konstruktion - Liouville. Eksistens, i.e., reelle tal er typisk

transcendente - Cantor.

Eksempel: Transcendente tal

Et reelt tal er transcendent, hvis det ikke er rod i noget polynomium med heltalskoefficienter. (Ellers er det algebraisk)

Liouville (1844): En bestemt betingelse \Rightarrow transcendent

Og π og e opfylder betingelsen.

Cantor: Algebraiske tal er tællelige. Det er de reelle ikke.

Der er altså mange flere transcendente end algebraiske.

Konstruktion - Liouville. Eksistens, i.e., reelle tal er typisk

transcendente - Cantor.

Hvordan arbejder forskningsmatematikere?

- Skriver artikler ?
- Definition, Lemma, Sætning, Bevis, Proposition, Corollar, Eksempel.??
- Hvor kommer ideerne fra?
- Fra fysik, biologi, kemi, økonomi, datalogi?
- “Indefra” Nysgerrighed.
- Eksperimenteren med begreberne, eksempler, modeksempler, intuition,...
- Formodninger - Conjectures.

Gode og dårlige spørgsmål

Giver de anledning til ny indsigt i noget andet?

Nye redskaber?

Generaliserbar? (Ex. bevist for $\sqrt{2}$ irrationel kan bruges til $\sqrt{3}$.)

Eksempel: Palindromiske primtal. -Ikke et godt begreb:

Et primtal er palindromisk, hvis dets repræsentation i 10-talssystemet er symmetrisk. Eksempel: 11, 101, 131, 151, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929, 10301.

Er der uendeligt mange palindromiske primtal?

Det tror vi nok. Men det er ikke noget, nogen rigtig undersøger.

Primtal er interessante, men palindromer er ikke.

“Recreational” problemer.

Palindromisk er en unaturlig egenskab - 131 i 3-talssystemet er 11212, som ikke er palindromisk.

Lisbeth Fajstrup

Institut for Matematiske Fag

Fredrik Bajers Vej 7G2-117

fajstrup@math.aau.dk

<http://people.math.aau.dk/~fajstrup>

<http://numb3rs.math.aau.dk/>