Store Uløste Problemer i Matematikken.

Lisbeth Fajstrup, Aalborg Universitet

Matematiklærerforeningen. November 08

Billederne fra foredraget er fjernet af hensyn til copyright. De kan genfindes på

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/

Oversigt

- Hvad er et stort problem i matematik?
- Eksempler – fra 1900 og fra 2000
- Problemer om tal – perfekte tal, primtal.
- Riemannhypotesen
- Et nyt resultat om primtal.
- Mindre uløste problemer…

Matematik er et enormt område

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
MathSciNet Mathematical Reviews on the Web

Matches: 1987241

Publications results for "Publication Type=(Journals)"

Facts and Figures: 511,957 authors indexed,
2363263 total publications

Matematikken vokser!

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
MathSciNet Mathematical Reviews on the Web

Matches: 74605

Publications results for "(Publication Type=(Journals)) AND pubyear=2006 "
(Der var 70085 i 2005)

Matematik er mange emner

- Der er mere end 6000 emner i ”Math Subject Classification” Eks: 11Axx er elementær talteori. 11A41 er primtal.
- Ingen har overblik over det hele
- Noget er fælles: Resultater og uløste problemer. De store problemer.
- Opgaver, vi alle sammen kender – af navn.

Høje tinder i matematikkens landskab

- Store uløste problemer giver fælles langsigtede mål
- Synlige toppe og andre gemt i skyerne
- Matematiske værktøjer bygges til bestigning af toppene
- Fra toppen kan man se nye toppe og overskue dalene.

Hvad er et *Stort uløst problem*?

- Formodet af store matematikere
- Forsøgt løst af mange
- Gammelt problem
- Med en god historie bag
- (Med vigtige anvendelser)
- Anledning til ny matematik.

Fermats store sætning: Ingen *hele tal* x, y, z opfylder ligningen

$$x^n + y^n = z^n$$

For n $\geq$ 3

Forståeligt på gymnasieniveau!

Pierre de Fermat 1601-1665

Vist i 1995 af Andrew Wiles – *Beviset* er fuldstændig utilgængeligt.

Hilbert problemerne

- 23 stk.
- 10 af dem fremsat af David Hilbert ved Verdenskongressen i Paris 8/8-1900, resten senere på tryk.
- En blanding af præcise ”hjemmeopgaver” og overordnede problemområder

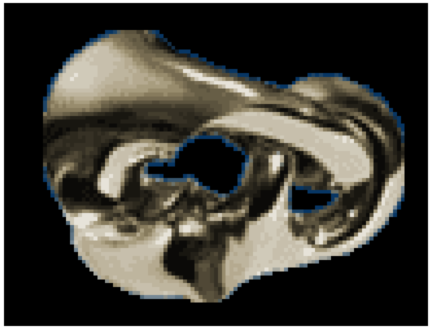
David Hilbert 1862-1943

Hilberts problemer, eksempler.

- Nummer 3,7,10,14 samt 17-23 er løst
- 6,8,12 og 16 er uløst.
- Nogen er delvist løst.
- Nogen er løst, alt efter, hvordan man fortolker Hilberts formulering.
- 1. Kontinuumshypotesen. Bevist, at man *hverken kan bevise eller modbevise* den indenfor de aksiomer for mængdelære, vi bruger. Den er uafhængig.

Hilberts problemer

- Aksiomatiser fysikken. (Problem 6)
- Riemann Hypotesen. (Problem 8)
- Mange væsentlige dele af 1900-tallets matematik, men slet ikke det hele. Eksempel: Algebraisk topologi, Morseteori (og selvfølgelig computernes indtog…)
- De er et billede af matematikken set fra år 1900



Clay Mathematics Institute

Dedicated to increasing and disseminating mathematical knowledge

nature

25 May 2000 Volume 405 Issue no 6785

Values of the abstract

A new set of prizes is an apt celebration of the significance and wonder to be found in pure mathematics.

- 7 stk.
- 1 million dollars for hver løsning
- Vanskelige at forstå!

Clay-problemerne

- Riemannhypotesen, Den mest berømte. Mere senere

Clay-problemerne

- Riemannhypotesen
- Poincaré formodningen (Er bevist!) Om at genkende en 3-dimensional kugleflade: Er en kompakt 3-dimensional mangfoldighed, hvori alle løkker er kontraktible, nødvendigvis en kugleflade?

Clay-problemerne

- Riemannhypotesen
- Poincaré formodningen (Er bevist!) Om at genkende en 3-dimensional kugleflade: Er en kompakt 3-dimensional mangfoldighed, hvori alle løkker er kontraktible, nødvendigvis en kugleflade?
- Bevist af G.Perelmann – som del af et større program om 3-mangfoldigheder, Thurstons geometriserings-formodning.

Clay-problemerne

- Riemannhypotesen
- Poincaré formodningen (Er bevist!)
- Birch og Swinnerton-Dyer formodningen – om at finde antallet af heltalsløsninger til visse ligninger

Clay-problemerne

- Riemannhypotesen
- Poincaré formodningen (Er bevist!)
- Birch og Swinnerton-Dyer formodningen
- Hodge formodningen. ”Genfind geometrien i en abstraktion fra geometri.” Algebraiske invarianter – cohomologiklasser - uddrages fra delmangfoldigheder (Poincare dualitet). Hvilke cohomologiklasser kommer fra delmangfoldigheder?

Clay-problemerne

- Riemannhypotesen
- Poincaré formodningen (Er bevist!)
- Birch og Swinnerton-Dyer formodningen
- Hodge formodningen
- Navier-Stokes ligninger. Forstå de partielle differentialligninger bag strømning og turbulens: Eksistens og entydighed af løsninger.

Clay-problemerne

- Riemannhypotesen
- Poincaré formodningen (Er bevist!)
- Birch og Swinnerton-Dyer formodningen
- Hodge formodningen
- Navier-Stokes ligninger
- Yang Mills teori og massegab. Giv matematisk fundament til kvanteYang-Mills teori.

Clay-problemerne

- Riemannhypotesen
- Poincaré formodningen (Er bevist!)
- Birch og Swinnerton-Dyer formodningen
- Hodge formodningen
- Navier-Stokes ligninger
- Yang Mills teori og massegab

P vs NP: Sammenlign de problemer, man kan *løse* effektivt i en computer med dem, hvor man kan *checke en løsning* effektivt. Effektivt: Antal skridt i løsningsalgoritmen er et polynomium af størrelsen af input.

Problemer om de hele tal

- Det må da være nemmere?
- Fermat's problem!
- Generelt: Diophantiske ligninger – find hele tal, der opfylder…
- Eksempel: Hilberts problem 10 – om at finde en algoritme, der afgør, om et polynomium med heltalskoefficienter har heltalsrødder.
- Løst af Julia Robinson og Y. Matiyasevich: Der findes ikke sådan en algoritme.
- Men heltalsproblemer er *nemmere at forklare.*

~~Perfekte tal~~ Fuldkomne tal

- 6=1+2+3
- 28=1+2+4+7+14
- 486=1+2+4+8+16+31+62+124+248
- 8128=1+2+4+8+16+32+64+127+254+508 +1016+2032+4064
- 33.550.336
- 8.589.869.056

~~Perfekte~~ Fuldkomne tal

- Euklid(300 f.kr.) Et lige tal er perfekt, hvis det er på formen

$$2^{p-1}\left(2^{p}-1\right)$$

- Hvor p og $2^{p}-1$ er primtal

~~Perfekte~~ Fuldkomne tal

- 6=1+2+3 p=2
- 28=1+2+4+7+14 p=3
- 486=1+2+4+8+16+31+62+124+248 p=5
- 8128=1+2+3+…+125+126+127 p=7
- 33550336 p=13
- 8.589.869.056 p=17

$$2^{p-1}(2^p-1)$$

~~Perfekte~~ Fuldkomne tal

- Euler (1707-1783): Alle *lige* perfekte tal har den form.
- Er der uendelig mange?
- Findes der *ulige* perfekte tal?
- Vi ved det ikke.

~~Perfekte~~ Fuldkomne tal

- Euler (1707-1783): Alle *lige* perfekte tal har den form. (Bevis på gym-niveau.)
- Er der uendelig mange?
- Findes der *ulige* perfekte tal?
- Vi ved det ikke.
- Hvis ulige perfekte tal findes, er de større end 10^{300}

Hvorfor er det ikke godt nok?

- Hvorfor er det ikke nok at vide, der ikke er perfekte tal under 10^{300} ?
- Erfaring: Nogen ting går først galt for MEGET store tal.

Om primtal.

- Det er *svært* at primfaktorisere store tal
- Sikkerhed i netbank, databaser,… afhænger af, at det er *svært* at primfaktorisere. Svært i moderne forstand!
- Men vi ved ikke, om det er *svært nok*. Måske kan nogen finde en smart algoritme
- Og hvis P=NP er vi muligvis i problemer.

Spørgsmål om primtal

- Primtalspar: (3,5) (11,13) (17,19) (29,31) (41,43)
- Er der uendelig mange primtalspar?
- Goldbachs formodning: Ethvert lige tal kan skrives som en sum af to primtal.
- Et primtal p er et Sophie Germain primtal, hvis 2p+1 også er et primtal Eks.: 2,3,5,11,23,29,41,53. Er der er uendelig mange?

Spørgsmål om primtal

- Er der uendelig mange Mersenne primtal? (Primtal på formen $2^p - 1$)

Spørgsmål om primtal

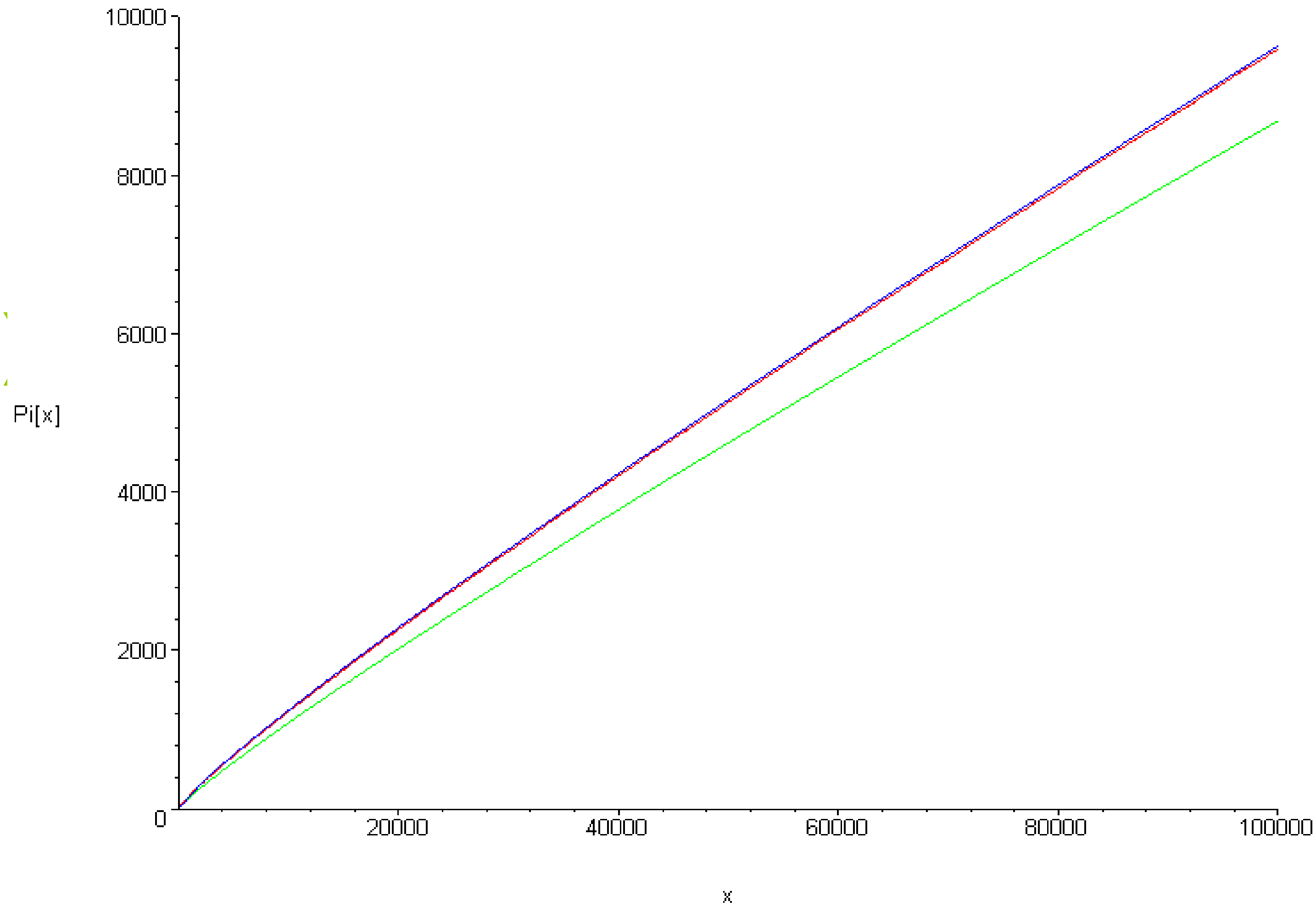
- Er der uendelig mange Mersenne primtal? (Primtal på formen $2^p - 1$)
- Husk, perfekte lige tal skrives $2^{p-1}(2^p - 1)$
- Der er fundet 46. Det seneste 6/9-2008 (af Hans Michael Elvenich, ejer af www.primzahlen.de) I GIMPS projektet
- p=37.156.667. Det har 11.185.272 cifre.

$\pi(n)$= antal primtal mindre end n

- 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59, 61,67,71,73,79,83,89,97,101,103,107,113
- $\pi(3)=2$,
- $\pi(4)=2$,
- $\pi(5)=3$,
- $\pi(6)=3$,
- $\pi(7)=4= \pi(8)= \pi(9)= \pi(10)$
- $\pi(11)=5$
- En funktion, der vokser, men hvordan vokser den?

Primtalssætningen

- Π(x)
- Li(x)
- x/ln(x)



Primtalssætningen

- Gauss formodede i 1792 (15 år gammel)
- $\Pi(x) \sim x/\ln(x)$ på grafen før (den grønne).
- $\Pi(x)/(x/\ln(x))$ nærmer sig 1, når x går mod uendelig.

- I omegnen af N=10000 er cirka 1 ud af 9 tal et primtal
- Omkring N=1.000.000.000 er det 1 ud af 21.

C. F. Gauss, 1777-1855

Primtalssætningen

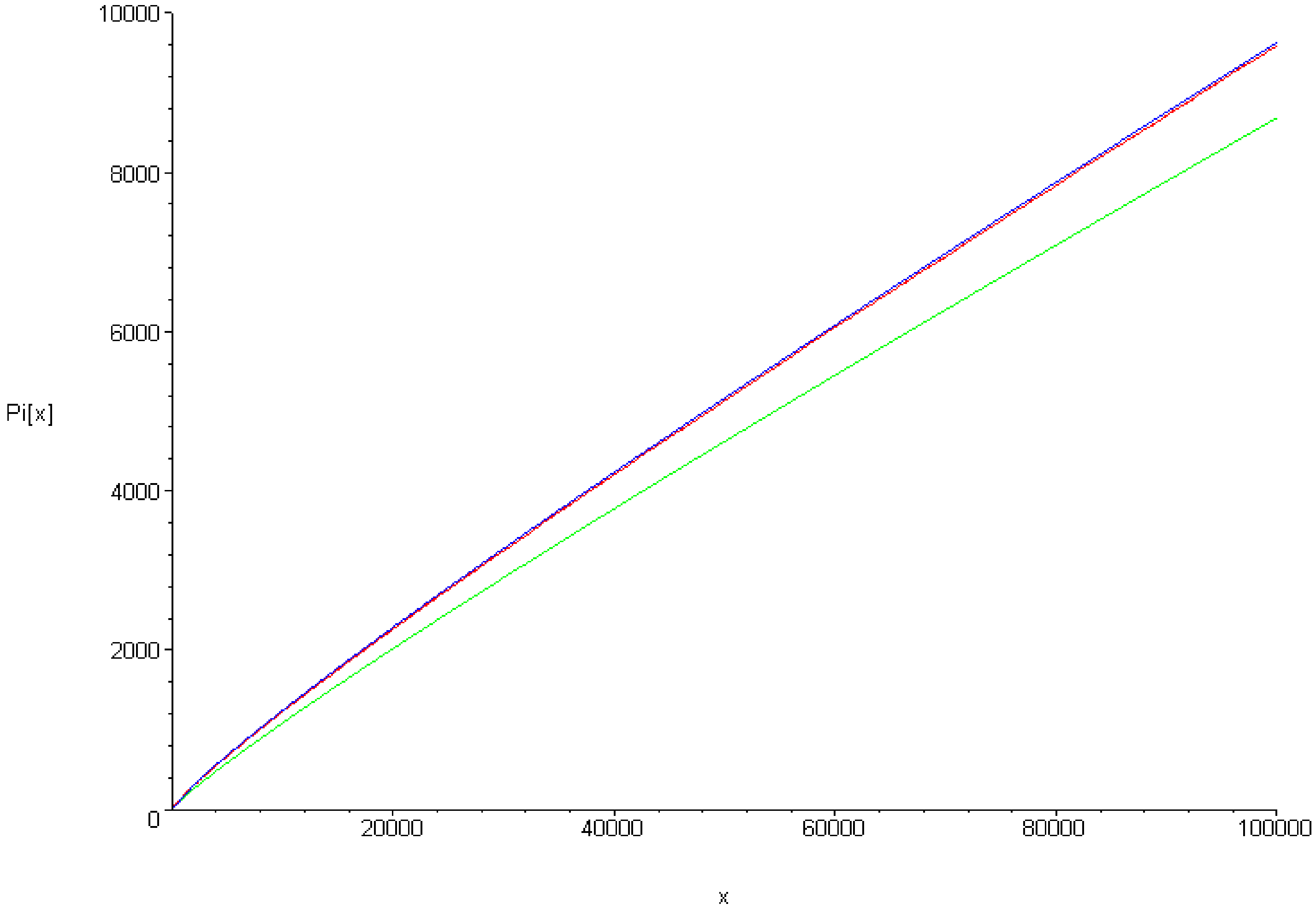
- Primtalssætningen: π(x) ~ Li(x) (den røde)

$$Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\, dt$$

- Bevist i 1896 af Hadamard og de la Vallée Poussin. Og i 1949 af Selberg og Erdös

Primtalssætningen

- $\Pi(x)$
- $Li(x)$
- $x/\ln(x)$



Hvad med Li(x) - π(x)?

- Gauss, Riemann,…: Det er nok altid positivt.
- Littlewood(1914). Skifter fortegn uendeligt ofte.
- Første gang omkring 10^{300}
- Vi har ikke fundet noget x, hvor det er negativt.
- Lehmann (1966): fortegn skifter mindst 10^500 gange for tal med 1166 eller 1167 cifre

Mere om Li(x) -π(x)

π(x)/Li(x) nærmer sig 1, når x går mod uendelig (de la Vallee Poussin,Hadamard)

- Men hvad med differensen?
- Eks:

$$f(x) = x^8 + x^7, g(x) = x^8$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{1}{x}$$

$$f(x) - g(x) = x^7$$

Hvor hurtigt går $|\mathrm{Li}(x)-\pi(x)|$?

- Mulige svar på den slags spørgsmål:
- Polynomielt (langsomt)
- Logaritmisk (langsommere)
- Eksponentielt (hurtigt)
- Diverse kombinationer.
- Den type spørgsmål er væsentlige i datalogi.

Riemannhypotesen (1859)

$$\left|\pi(n) - Li(n)\right| \leq c\sqrt{n}\,\ln(n)$$

For en (stor nok)

konstant c.

G.F.B. Riemann,

1826-1866

Riemannhypotesen

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

- Har alle rødder for den analytiske fortsættelse af zetafunktionen realdel ½? (bortset fra rødderne -2,-4,…)
- Det indgik i de første beviser for Primtalssætningen, at rødder $x+iy$ opfylder $0<x<1$, er i det kritiske bånd. (Meget bedre grænser kendes nu)

Riemannhypotesen

- Hilbert problem OG Clay problem.
- Siger noget om fordelingen af primtallene
- Giver ikke en primfaktoriseringsalgoritme
- Måske vil beviset give en algoritme?
- Numb3rs afsnit 1-05: Lille pige bortføres, fordi hendes far har bevis for Riemann hypotesen med indlagt primfaktorisering. Krav: Bryd ind i centralbanken i USA.
- Problem: beviset er forkert…

Harald Bohr og Hardy

Harald Bohr 1887-1951

G. H. Hardy 1877-1947

Mere om primtal og deres fordeling

- Terence Tao (f. 1975) og Ben Green (f.1977): der findes vilkårligt lange *differensrækker* af primtal

Terence Tao, 1975 -

Differensrækker

- 2
- 2,3
- 3,5,7
- 5,11,17,23
- 5,11,17,23,29
- 7,37,67,97,127,157
- 7,157,307,457,607,757
- 5749146448311+26004868890xn (n=1,2,..20)

Tao og Green viste

- For ethvert n, findes et primtal p og en skridtlængde k, så
- p, p+k, p+2k,…, p+nk alle er primtal
- Ingen opskrift på at *finde* p og k
- Beviset bruger bl.a. sandsynlighedsteori.

Afrunding

- Der er masser af uudforskede områder i matematikken; der udkommer 200 artikler om dagen.
- Store problemer er ofte meget gamle og overlever generationers angreb.
- Visse uløste problemer egner sig til gymnasieundervisning, mange gør ikke!

Reklame

- Se matematik i anvendelse i Numb3rs på Kanal 5, onsdag klokken 20.
- Og i min blog http://numb3rs.math.aau.dk
- Ideer til Studieretningsprojekter og tvær/fler-faglige emner.
- Numb3rs DVD kan bl.a. købes på laserdisken.dk eller cdon.dk (de danske). Priserne kan variere meget.