

# Matematik i almen studieforberedelse

Matematiklærerforeningen  
Februar 2007

## Forord.

Dette materiale er resultatet af et udviklingsprojekt søgt af Matematiklærerforeningen og gennemført med deltagelse af 10 matematiklærere med forskellige fagkombinationer.

*Formålet med udviklingsprojektet var at undersøge og beskrive hvilke centrale dele af matematikfagets teori og metode der mest hensigtsmæssigt inddrages i et helt 3-årigt forløb, herunder at overveje en progression i et sådant forløb og udarbejde mindst et eksemplarisk forløb. Dette eksemplariske forløb skal indeholde detaljeret beskrevne delforløb. Disse delforløb skal indeholde beskrivelser af hvilke andre fag der indgår, den overordnede problemstilling sat i forhold til vejledningens krav om arbejde med "betydningsfulde natur- og kulturfænomener, almenmenneskelige spørgsmål, vigtige problemstillinger og centrale forestillinger fra fortid og nutid", beskrivelser af den matematiske teori og metode der inddrages og overvejelser over delforløbets placering i det samlede forløb. Endvidere skal projektet indeholde overvejelser over hvilken betydning niveauet for matematikfaget i studieretningen har for fagets deltagelse i Almen sTudieforberedelse.*

I mellemtiden er vejledningen for Almen sTudieforberedelse kommet og i denne vejledning er der en beskrivelse af de AT-faglige mål og progressionen i dem i løbet af de tre år (Skema 5A side 34). Vi har derfor valgt at sætte de 11 forløb som vi har udarbejdet i relation til denne beskrivelse af målene. Og vi har også valgt ikke at beskrive et eksemplarisk forløb, da det samlede forløb til AT på det enkelte hold må afhænge af de lokale samarbejdsmuligheder fagene imellem. Da vores udgangspunkt var matematikken er det faglige indhold og de faglige mål for matematikfaget selvsagt mest velbeskrevet.

Det er vores håb at de generelle overvejelser og de 11 forløb kan virke inspirerende for matematiklærerne i forhold til undervisningen i AT. Vi er meget interesserede i at høre om og være med til at udbrede erfaringer med at bruge materialet og i at se hvorledes forløbene kan udfoldes i de andre fag. Erfaringer med at anvende materialet bedes derfor sendt til [marianne.kesselhahn@skolekom.dk](mailto:marianne.kesselhahn@skolekom.dk).

På AT-gruppens vegne  
Marianne Kesselhahn  
Formand for Matematiklærerforeningen

## AT-gruppens medlemmer:

Morten Gjeddebæk, Svendborg Gymnasium, matematik, fysik, dansk og filosofi  
Lisbeth Jakobsen, Roskilde Amtsgymnasium, matematik, naturgeografi og erhvervsøkonomi  
Ulla Stampe Jakobsen, Herlev Gymnasium, matematik og idræt  
Jacob Jalving, Rosborg Gymnasium, matematik og fysik  
Flemming Johansen, Struer Gymnasium, matematik, geografi og samfundsfag  
Marianne Kesselhahn, Stenløse Gymnasium og HF, matematik og samfundsfag  
Lene Lecker, Ordrup Gymnasium, matematik og dansk  
Charlotte Østergaard Linderøth, Tørring Gymnasium, matematik og fysik  
Dorthe Nielsen, Vesthimmerland Gymnasium, matematik og historie  
Tina Smedegaard, Sønderborg Statskole, matematik og russisk  
Mikkel Willum Johansen, KU og Helsingør Gymnasium, matematik og filosofi

## Generelle overvejelser.

### **Rammer for matematik i AT.**

Matematik afleverer ligesom alle andre fag 10 % af undervisningstiden til AT og det giver følgende timetal på de forskellige niveauer:

12,5 time C-niveau

25 timer B-niveau

37,5 time A-niveau

Erfaringerne viser at matematik typisk indgår i to forløb om året (eller pr. niveau-trin) med 6-7 timer pr. forløb.

Elevtiden er typisk 5 timer pr. forløb til involverede fag tilsammen.

For at opfylde kravene til almen studieforbereelse om at arbejde med ”betydningsfulde natur- og kulturfænomener, almenmenneskelige spørgsmål, vigtige problemstillinger og centrale forestillinger fra fortid og nutid” bør man i alle fag overveje hvorledes netop dette fag kan bidrage til opfyldelsen af kravene.

Vi har i AT-gruppen diskuteret os frem til at matematik kan bidrage med nedenstående 6 forhold:

- Anvendelse af matematik – hvor kvantificeringen/modelleringen giver mere klarhed over en given problemstilling (beskrivelseskraften)
- Anvendelse af matematik – hvor der er grund til at diskutere modellens anvendelighed (modelkritik)
- Matematikkens udvikling – hvor udviklingen ikke kunne være sket uden matematikken (matematikken som produktivkraft)
- Matematikkens udvikling – forklaret ud fra en religiøs/filosofisk/erkendelsesteoretisk synsvinkel (matematikken som redskab til samtidens naturbeskrivelse)
- Matematisk argumentation, (logik – indre struktur)
- Matematikkens evne til at indfange og beskrive fællestræk ved forskellige naturfænomener og samfundsskabte fænomener (f.eks. forskellige former for vækst).

Det er måske ikke overraskende at punkterne falder inden for de tre hovedområder som tidligere udgjordes af aspekterne (anvendelser, historie og matematikkens indre struktur).

I det følgende beskrives 11 forløb som hver for sig dækker dele af de 6 punkter. I oversigten nedenfor er de sat i relation til vejledningens skema 5A, som omhandler progressionen i de faglige mål for almen studieforbereelse.

### 5A. Progression i de faglige mål

Kategorier:	1.g	2.g	3.g
Viden	– demonstrere kendskab til, hvorledes der med udgangspunkt i et givet emne kan stilles	– anvende viden fra forskellige fag og faglige hovedområder	– opnå viden om et emne ved at kombinere flere forskellige fag og faglige hovedområder
Metoder	spørgsmål til forskellige Fag	– anvende relevante metoder fra forskellige fag og faglige Hovedområder – demonstrere kendskab til de enkelte fags Muligheder og Begrænsninger	– anvende forskellige metoder til at belyse et komplekst problem – vurdere forskellige fags og faglige metoders muligheder og begrænsninger
Sammenhæng Overblik	– demonstrere kendskab til, hvorledes forskellige fag kan bidrage til at belyse et givet emne	– påpege, hvorledes et givet emne indgår i større historiske og/eller Nutidige sammenhænge	– forstå enkeltfaglig viden som bidrag til en sammenhængende verdensforståelse – vurdere, hvorledes et givet emne indgår i større historiske og/eller nutidige sammenhænge
Videnskabelig Teori Videnskabsteori	– demonstrere kendskab til grundlæggende forståelsesformer inden for flere hovedområder	– redegøre for nogle Betydningsfulde videnskabelige teorier Samt kunstneriske, videnskabelige og teknologiske nybrud – demonstrere forståelse af videnskabelig Tankegang	– anvende indsigt i elementær videnskabsteori og videnskabelige ræsonnementer til at formulere og reflektere over problemstillinger af enkeltfaglig, flerfaglig og fællesfaglig karakter
Formidling	– formidle resultatet af Arbejdet	– strukturere og Formidle et fagligt stof.	–udvælge, strukturere og formidle et fagligt stof
”taksonomi”	”demonstrere kendskab”	”anvende viden”, ”redegøre”, ”demonstrere forståelse”, ”påpege”	”vurdere”, ”opnå viden”, ”anvende indsigt”, ”reflektere”

## Matematik i AT – oversigt over beskrevne forløb.

### Anvendelser:

1. [Storbyliv](#), 1g..... side 8  
Dækker mål inden for kategorien viden og metoder.  
Formidling mundtlig eller skriftlig.
2. [Vækst](#), 1g ..... side 10  
Dækker mål inden for kategorien sammenhæng/overblik.  
Mundtlig formidling på baggrund af synopsis.
3. [Vækst](#), 3g ..... side 14  
Dækker mål inden for kategorien metoder.  
Mundtlig formidling/ synopsis
4. [Velfærdsstaten](#), 1g..... side 19  
Dækker mål inden for kategorien viden og metoder.  
Skriftlig formidling (rapport)
5. [Den gode stemning](#), 1g/2g. .... side 22  
Dækker mål inden for kategorien sammenhæng/overblik.  
Synopsis med givet problemformulering/-stillinger.

### Historie:

6. [Skabt til at skabe](#), 1g/2g. .... side 25  
Dækker mål inden for kategorierne viden og metoder og sammenhæng og overblik.  
Powerpoint, skriftlig rapport.
7. [De store opdagelser](#), 1g/2g..... side 52  
Dækker mål inden for kategorierne viden og metoder, sammenhæng og overblik og videnskabelig teori (tekn. nybrud).  
Mdt. fremlæggelse på baggrund af synopsis.
8. [Galilei](#), 1g..... side 55  
Dækker mål inden for kategorierne videnskabsteori og sammenhæng/overblik.

### Videnskabsteori:

9. [Logik og argumentation](#) 2g/3g..... side 60  
Dækker mål inden for kategorien videnskabelig teori/videnskabsteori.  
Skriftlig/mundtlig formidling.
10. [Sikker viden](#) 2g. .... side 67  
Dækker mål inden for kategorien videnskabelig teori/videnskabsteori.  
Grupperapport.
11. [Statistik som naturvidenskab](#) 1g/2g/3g ..... side 69
  - a. [Er du normal?](#) 2g.  
Dækker mål inden for kategorien viden og metoder

- b. [Meningsmålinger](#) 1g.  
Dækker mål inden for kategorierne viden og metoder og sammenhæng og overblik
- c. [Beslutninger](#) 2g/3g.  
Dækker mål inden for kategorierne metoder, sammenhæng/overblik
- d. [Alting har en pris](#) 2g/3g.  
Dækker mål inden for kategorien metoder, videnskabelig teori.

# 1. Storbyliv

Forløbet er tænkt som et 1g forløb om de vilkår som mennesker i storbyen lever under. Emnet er velegnet til at belyse forskelle mellem forskellige belysningsmetoder. Såvel litterære, kunstneriske, samfundsfaglige som statistiske metoder kan bruges.

## **AT-faglige mål:**

- demonstrere kendskab til hvorledes der med udgangspunkt i et givet emne kan stilles spørgsmål til forskellige fag.

## **Mål: Metodiske**

Eleverne skal oparbejde kompetencer i at

- Samarbejde med hinanden
- formulere faglige problemstillinger
- planlægge undersøgelser
- formidle resultater hensigtsmæssigt
- benytte matematikken til at behandle problemstillinger i samarbejde med andre hovedområder, her det samfundsvidenskabelige og humanistiske hovedområde.

## **Mål: Faglige**

Eleverne skal

- opstille en række delspørgsmål (problemstillinger)
- planlægge en undersøgelse
- indsamle data
- benytte passende beregninger til sammenligning af dataserier

## **Tidsforbrug**

5 timer.

## **Forudsætninger**

Deskriptiv statistik, procentregning, indekstal

## **Materialer**

Statistisk materiale nettet:

Al mulig statistik – blandt andet opdelt på regioner:

[www.statistikbanken.dk](http://www.statistikbanken.dk)

Statistik om København:

<http://www.sk.kk.dk/>

## **Arbejdsformer**

Projektorganiseret.

Læreren formulerer det overordnede problem:

På hvilken måde adskiller livet i storbyen sig fra livet i en mindre by (f.eks. elevernes egen by)?

Og hvorledes kan man beskrive denne forskel?

Eleverne formulerer en række delspørgsmål (problemstillinger), planlægger en undersøgelse og formidler resultatet til resten af klassen. Dette kan ske skriftligt eller mundtligt ud fra et talepapir.

### **Plan over forløb**

De humanistiske fag lægger ud med at give et billede på hvorledes storbyen opleves.

I samfundsfag formuleres en række spørgsmål som kan undersøges teoretisk (samfundsfag) og empirisk (matematik).

I matematik indsamles materiale og bearbejdes:

- der laves beregninger af udviklingstendenser (procentregning og indekstal)
- forskellene mellem data for storbyen og en mindre by sammenlignes med statistiske deskriptorer (kvartilsæt, gennemsnit, typetal, maximum og minimum)
- de fundne forskelle illustreres grafisk på en passende måde (boxplot, histogrammer, osv.).

### **Krav til eleverne**

1) I skal planlægge en undersøgelse – finde talmateriale og bearbejde materialet.

Forslag til undersøgelser:

Hvilke forskelle er der på levestandarden og livsstilen i storbyen og i en mindre by:

- a) Indkomstfordeling
- b) Aldersfordeling
- c) Kriminalitet
- d) Uddannelsesbaggrund
- e) National baggrund
- f) Kulturforbrug

## 2. Vækst befolkning og energi, begynder version

Forløbet er tænkt som et 1.g-forløb om en af de store problemstillinger i vores tid, nemlig befolkning/energi/drivhuseffekt-problematikken. Forløbet lægger op til, at eleverne introduceres til model-begrebet, for så bagefter selv at skulle prøve at forholde sig til deres anvendelsesmuligheder. Forløbet ligger også fint senere i gymnasieforløbet; der er lavet et forslag til en videregående version.

### AT-mål:

- Demonstrere kendskab til, hvorledes forskellige fag kan bidrage til at belyse et emne.
- Lave en mundtlig formidling på baggrund af en (lille) synopsis

### Mål, metodiske:

- At lave prognoser for fremtiden vha. matematik
- At argumentere ud fra matematiske resultater

### Mål, faglige:

- Regression på CAS / Excel
- De forskellige væksttyper: lineær, eksponentiel, logistisk, mm.
- Modellering og prognoser
- Fysiks bidrag: Drivhuseffekten, alternative energiformer, brint, vind, ethanol, osv.
- Samfundsfags bidrag: Energipolitik, Kyotoaftale, Melle møstems rolle, CO<sub>2</sub>-kvoter

### Deltagende fag

Matematik, samfundsfag og fysik:

### Tidsforbrug:

- 5-8 timer til ren matematik

### Faglige forudsætninger i matematik:

- Kendskab til lineære og eksponentielle udviklinger.

### Materiale i matematik:

- Materiale om regression, f.eks. TI-89-hæftet af Knud Nissen
- Materiale om den logistiske kurve og dens karakteristika.
- Hjemmeside fra **International Institute for Applied Systems Analysis (iiasa)**, se sidst i dokumentet.

### Arbejdsformer:

- Lærerstyret introduktion
- Opgaveløsning i grupper, f.eks. løsning af opgaven sidst i dokumentet.
- Projektarbejde i grupper om en mere bred opgaveformulering.

### **Plan over et muligt forløb:**

- Lærerens introduktion: ca. 2 timer til matematik-delen og desuden nogle timer til de andre fag.
- Evt. løsning af fagspecifikke opgaver, ikke kun matematik: 2-4 timer
- Gruppearbejde
- Se f.eks. nedenstående oplæg.

### **Oplæg til elever:**

#### *Indledning:*

Dette forløb i almen studieforbereelse er et samarbejde mellem matematik, fysik og samfundsfag. Temaet for forløbet er forholdet mellem økonomisk vækst, befolkningsvækst og ressourceforbrug med særlig fokus på energiformer. I relation til denne sammenhæng inddrages forskellige ideologiske synspunkter på problemstillingen, mulige økonomiske styringsredskaber (herunder også tanker om alternative energiressourcer) og overvejelser omkring prognoser for fremtiden. Diskuter nødvendigheden af udnyttelse af vedvarende energikilder set i et fremtidigt perspektiv.

#### *Arbejdsopgave:*

Der ønskes en problematisering af forholdet mellem vækst og ressourceforbrug med særlig fokus på energi. I skal overveje, hvorledes de tre fag kan anvendes til at belyse problemstillingen. Endvidere skal I opstille spørgsmål, hvorudfra I vil belyse problemstillingen. Husk inddragelse af de taksonomiske niveauer (redegørelse, analyse og diskussion/vurdering).

#### *Produktkrav:*

I skal udarbejde en udbygget disposition (en lille synopsis - se evt. primus 1 s. 122), som forholder sig til jeres opstillede problemformulering. Den udbyggede disposition skal præsentere den overordnede problemstilling og hovedpointer i besvarelsen af de opstillede spørgsmål. 'Synopsen' skal have et omfang af ca. 1-2 sider.

AT-forløbet afsluttes med fremlæggelser og diskussion af den overordnede problematik i matrixgrupper. Gruppens medlemmer skal alle kunne indgå i matrixgrupper, og således være i stand til at fremlægge gruppens konklusioner for de andre i gruppen. Desuden skal hvert gruppemedlem være i stand til at forholde sig konstruktivt til de andre fremlæggelser.

---

Nedenfor følger 2 dokumenter, der kan bruges i matematik, til særligt at belyse emnet befolkningsvækst:

- Vejledning til iiasa's hjemmeside

### **International Institute for Applied Systems Analysis (iiasa)**

[http://www.iiasa.ac.at/cgi-bin/ecs/book\\_dyn/bookcent.py](http://www.iiasa.ac.at/cgi-bin/ecs/book_dyn/bookcent.py)

- Opgave med tal fra IIASA, 1g version

Et andet meget illustrativt link:

<http://www.gapminder.org/index.html>

## Vejledning til IIASA's hjemmeside

Gå ind på siden fra **International Institute for Applied Systems Analysis (iiasa)**

[http://www.iiasa.ac.at/cgi-bin/ecs/book\\_dyn/bookcnt.py](http://www.iiasa.ac.at/cgi-bin/ecs/book_dyn/bookcnt.py)

1. Start med at klikke på **introduktionen**, og læs om, hvad det er for en side, I er kommet ind på. (kort)
2. Klik på **definitioner**, og se på regioner og scenarier; det kan være en fordel at notere scenarierne ned.
3. Klik derefter **parametre** og **population**: Hvor mange mener iiasa, at vi bliver på Jorden i 2100? Og hvilke regioner ser ud til at vokse mest?
4. Klik **Primary energy** og **by fuel**, og find ud af hvor meget energi iiasa regner med, at verden kommer til at bruge i fremtiden. Her er det vigtigt at vælge forskellige scenarier – se opg. 2
5. Klik selv rundt, se om I kan finde ud af, hvor meget CO<sub>2</sub> der udledes f.eks. og se om I kan finde ud af, hvor i Verden energiforbruget ventes at stige mest.
6. Prøv selv at stille og besvare nogle relevante spørgsmål vha. iiasa's side.

befolkning i milliarder	1990	2000	2010	2020	2030	2050	2070	2100
år efter 1990	0	10	20	30	40	60	80	110
<b>Industrialiserede</b>	0,859	0,916	0,957	0,986	1,007	1,005	0,997	1,004
<b>Reformerende lande</b>	0,413	0,434	0,46	0,484	0,506	0,536	0,553	0,566
<b>udviklingslandene</b>	3,99	4,817	5,632	6,448	7,239	8,515	9,376	10,082
<b>World</b>	5,262	6,168	7,049	7,919	8,751	10,055	10,926	11,652

energiforbrug prognose

TWh	1990	2000	2010	2020	2030	2050	2070	2100
<b>Industrialiserede</b>	49010.17	54105.92	58050.09	61483.17	64146.11	65541.99	66056.00	66921.81
<b>Reformerende lande</b>	20382.68	15645.97	17279.93	19479.72	22176.88	27869.53	33556.67	39144.76
<b>udviklingslandene</b>	35825.15	48763.06	62430.56	77904.57	95917.96	139055.54	194548.31	300555.80
<b>World</b>	105218.00	118514.96	137760.58	158867.46	182240.94	232467.05	294160.99	<u>406622</u>

1. I den øverste tabel ses IIASA's prognose for befolkningsudviklingen i Verden. Hvis vi ser på udviklingslandene, er der så tale om eksponentiel vækst, eller er det logistisk? Find ligningen vha. TI-89.
2. Hvad er den procentvise stigning i udviklingslandenes befolkning?
3. Hvad er den procentvise stigning i udviklingslandenes energiforbrug?

### 3. Vækst, befolkning og energi, videregående version

Forløbet er tænkt som et 3.g-forløb om en af de store problemstillinger i vores tid, nemlig befolkning/energi/drivhuseffekt-problematikken. Forløbet lægger op til, at eleverne introduceres til differentiallyigningsmodeller, for så bagefter selv at skulle prøve at anvende dem i en friere opgave. Forløbet kan også laves i en fagligt mildere grad i 2.g. mens der er lavet et separat begynderforslag til 1g. -behandling.

#### **AT-mål:**

- Anvende forskellige metoder til at belyse et komplekst problem
- Vurdere forskellige fags og faglige metoders mulighed og begrænsning
- Mundtlig formidling på baggrund af synopsis

#### **Mål, metodiske:**

- At lave prognoser for fremtiden vha. matematik
- At argumentere ud fra matematiske resultater

#### **Mål, faglige:**

- Regression på CAS / Excel
- De forskellige væksttyper: lineær, eksponentiel, potens, logistisk, mm.
- Modellering og prognoser
  
- Naturvidenskabs bidrag: Drivhuseffekten, klimaforandringer, alternative energiformer, brint, vind, ethanol, osv.
- Samfundsfags bidrag: Energipolitik, Kyotoaftale, Mellemostens rolle, CO<sub>2</sub>-kvoter, Copenhagen consensus

#### **Deltagende fag**

Matematik, samfundsfag og fysik/naturgeografi.

#### **Tidsforbrug:**

- Ca. 8 timer på det rent matematiske. Selve AT-forløbet vil vel vare 20-30 timer.

#### **Faglig forudsætning i matematik**

- Kendskab til differentialregning og de basale funktioner
- Lidt afhængigt af niveau: kendskab til begrebet differentiallyigninger og løsning af disse, men det kan man sno sig udenom.

#### **Materiale til matematik:**

- Mat B2, af Carstensen m.fl., kapitel 4, regression og vækst, behandler vækst uden at forudsætte kendskab til differentiallyignings-terminologien.
- Edwards & Penny, Differential equations, Pearson Education, 2004, Kapitel 2 fra side 77. Handler om populationsmodeller og hvordan man skal forstå parametrene i bl.a. den logistiske ligning.

- Hjemmeside fra **International Institute for Applied Systems Analysis (iiasa)**, se sidst i dokumentet.

### **Arbejdsformer:**

- Lærerstyret introduktion
- Opgaveløsning i grupper, f.eks. løsning af opgaven sidst i dokumentet.
- Projektarbejde i grupper om en mere bred opgaveformulering, opgaven sidst i dokumentet kan evt. placeres hér i stedet.

### **Plan over et muligt forløb:**

- Lærerens introduktion: ca. 2 timer til matematik-delen og desuden nogle timer til de andre fag.
- Evt. løsning af fagspecifikke opgaver, ikke kun matematik: 2-4 timer
- Problemformulering: 1 time
- Projektarbejde: to dage
- Fremlæggelse: synopsis-baseret oplæg for klassen: 2 timer

### **Produktkrav:**

- Først en problemformulering
  - Så en synopsis
  - Og til sidst et oplæg
- 

Nedenfor følger et par dokumenter, der kan bruges i matematik, til særligt at belyse emnet befolkningsvækst og energiforbrug:

1. Vejledning til IIASA hjemmeside

### **International Institute for Applied Systems Analysis (iiasa)**

[http://www.iiasa.ac.at/cgi-bin/ecs/book\\_dyn/bookcnt.py](http://www.iiasa.ac.at/cgi-bin/ecs/book_dyn/bookcnt.py)

2. Opgave med tal fra IIASA, 3g-version (A-niveau)

Et andet meget illustrativt link:

<http://www.gapminder.org/index.html>

## 1. Vejledning til IIASA's hjemmeside

Gå ind på siden fra **International Institute for Applied Systems Analysis (iiasa)**

[http://www.iiasa.ac.at/cgi-bin/ecs/book\\_dyn/bookcnt.py](http://www.iiasa.ac.at/cgi-bin/ecs/book_dyn/bookcnt.py)

7. Start med at klikke på **introduktionen**, og læs om, hvad det er for en side, I er kommet ind på. (kort)
8. Klik på **definitioner**, og se på regioner og scenarier; det kan være en fordel at notere scenarierne ned.
9. Klik derefter **parametre** og **population**: Hvor mange mener iiasa, at vi bliver på Jorden i 2100? Og hvilke regioner ser ud til at vokse mest?
10. Klik **Primary energy** og **by fuel**, og find ud af hvor meget energi iiasa regner med, at verden kommer til at bruge i fremtiden. Her er det vigtigt at vælge forskellige scenarier – se opg. 2
11. Klik selv rundt, se om I kan finde ud af, hvor meget CO<sub>2</sub> der udledes f.eks. og se om I kan finde ud af, hvor i Verden energiforbruget ventes at stige mest.
12. Prøv selv at stille og besvare nogle relevante spørgsmål vha. iiasa's side.

## 2. Opgave med tal fra IIASA

### Opgave om prognoser for fremtiden

befolkning i milliarder	1990	2000	2010	2020	2030	2050	2070	2100
år efter 1990	0	10	20	30	40	60	80	110
<b>Industrialiserede</b>	0,859	0,916	0,957	0,986	1,007	1,005	0,997	1,004
<b>Reformerende lande</b>	0,413	0,434	0,46	0,484	0,506	0,536	0,553	0,566
<b>udviklingslandene</b>	3,99	4,817	5,632	6,448	7,239	8,515	9,376	10,082
<b>World</b>	5,262	6,168	7,049	7,919	8,751	10,055	10,926	11,652

Tabel 1

Tabel 2

energiforbrug prognose

TWh	1990	2000	2010	2020	2030	2050	2070	2100
<b>Industrialiserede</b>	49010.17	54105.92	58050.09	61483.17	64146.11	65541.99	66056.00	66921.81
<b>Reformerende lande</b>	20382.68	15645.97	17279.93	19479.72	22176.88	27869.53	33556.67	39144.76
<b>udviklingslandene</b>	35825.15	48763.06	62430.56	77904.57	95917.96	139055.54	194548.31	300555.80
<b>World</b>	105218.00	118514.96	137760.58	158867.46	182240.94	232467.05	294160.99	<u>406622</u>

- I den øverste tabel ses IIASA's prognose for befolkningsudviklingen i Verden. Hvis vi ser på udviklingslandene, er der så tale om logistisk vækst? Find ligningen vha. TI-89.
- Find tilbage til den bagved liggende differentiaalligning. Kan du sige noget om, hvilke døds- og fødselsrater man opererer med? Her skal du bruge din viden om den logistiske differentiaalligning, se f.eks. Edwards & Penny, Differential equations, Pearson Education, 2004, kapitel 2 fra side 77 og frem.
- Hvor mange mennesker regner IIASA med, der ender med at være i udviklingslandene?
- Prøv at ændre på døds- og fødselsraterne; hvordan ser løsningskurverne nu ud?

Lad os se på tabel nr. 2, der viser det estimerede energiforbrug i forskellige dele af verden.

- Hvilken matematisk model har IIASA brugt til at lave prognoser for hhv. de industrialiserede landes og udviklingslandenes energiforbrug?
- Overvej om det er en rimelig model. Overvej hvad parametrene i den oprindelige differentiaalligning står for.

Du skal nu selv lave en ny tabel, der viser landegruppernes energiforbrug pr. million indbyggere.

- Sammenlign de forskellige landegrupper; kan du finde modeller, der laver rimelige prognoser? Hvor ender vi mht. energiforbrug? (Hvem bruger f.eks. mest?)

(Vær opmærksom på, at der er to slags logistisk regression på TI-89. En der hedder logistic 83 og én der hedder logistic. Logistic 83 giver den gammelkendte løsningsformel, mens logistic lægger en konstant til, så det må være logistic 83 vi skal bruge. Nogle gange returnerer TI89 så desværre, at der er en "singular matrix", og så kan den ikke lave regressionen. Her kan det være en fordel at bruge logistic i stedet, blot for at få en model. Eller det kan hjælpe ændre på dimensionerne af tallene i en liste, så f.eks. 6300000000 skrives som 6,3 i stedet. Så skal man selv påtage sig at huske, at vi regner i milliarder!).

## 4. Velfærdsstaten

Forløbet er tænkt som et 1.g-forløb om et emne, som optager os en del her i Danmark, nemlig ”ældrebyrden” og ”indvandring/integration” og trusler mod velfærdsstaten.

### AT-mål:

- Demonstrere kendskab til, hvorledes der med udgangspunkt i et givet emne kan stilles spørgsmål til forskellige fag.
- Skriftlig formidling i form af en rapport.

### Mål, metodiske:

- Samarbejde med hinanden
- Finde relevant datamateriale
- Opnå indsigt i, hvorledes matematik kan bidrage til at forstå og behandle problemer indenfor andre områder, her det samfundsfaglige
- Benytte tal og udregninger til at argumentere ud fra.

### Mål, faglige:

- Lave sumkurver, aflæse relevante oplysninger fra dem.
- Beregne ginikoefficienter og lave Lorenz-kurver og udnytte dem til at sammenligne lande.
- Anvende Excel.
  
- Samfundsfags bidrag: De tre velfærdsmodeller: Den universelle, den selektive og den residuale model, Trusler mod velfærden, ældrebyrden, uddannelsesniveau, diskussion af lighed/ulighed
- Danks eventuelle bidrag: Mediernes præsentation af problemstillingerne
- Histories eventuelle bidrag: Velfærdsstatens udvikling

### Deltagende fag

Matematik, Samfundsfag og evt. dansk/historie.

### Tidsforbrug:

- 5 timer til ren matematik, AT-forløbet er vel på 15-20 timer.

### Faglige forudsætninger i matematik:

- Deskriptiv statistik i et mindre omfang.

### Materiale til matematik:

- Carstensen m.fl. Mat C (eller B2), Systime, 2005, afsnittet om lorenz-diagrammer, står i statistikafsnittet
- Tal fra Statistikbanken eller fra samfundsstistik'ens CD, f.eks. kan man her finde prognoser for den danske befolknings alderssammensætning.
- Samfundsstatistikken fra 2000 har indkomst-decilerne for de europæiske lande listet op til brug ved lorenz-kurverne og ginikoefficienterne. Eller man kan lede i det regneark fra Verdensbanken, der ligger sammen med dette materiale.

### Arbejdsformer/ forløb:

- Særfaglig introduktion, 1-2 timer i matematik, lærerstyret
- Besvarelse af nedenstående opgave i grupper.

### Arbejdsopgave:

Gruppen skal besvare nedenstående arbejdsopgave omhandlende velfærdsstaten. Opgaven ligger i forlængelse af undervisningen i de to fag.

1. I skal beregne gini-koefficienten for tre lande, som tilhører hver deres velfærdsmodel. Herunder skal I reflektere over, hvorvidt forskellene i gini-koefficienterne kan forklares ud fra, at landene bygger på forskellige velfærdsprincipper.
2. I skal ud fra henholdsvis forsørgerbyrde og indvandring belyse, hvorvidt de udgør en trussel mod opretholdelsen af velfærdsstaten.
  - a) Forsørgerbyrden. Herunder skal I udarbejde sumkurver over aldersfordelingen i Danmark. Lav sumkurver over flere år (prognoser findes f.eks. på statistik-CD'en), sammenlign og kommenter.
  - b) Indvandring. Herunder skal I udarbejde en grafisk fremstilling af forskellene mellem etniske danskeres og indvandreteres/efterkommeres arbejdsløshedsprocent, beskæftigelsesfrekvens, erhvervsfrekvens og uddannelsesniveau). Materiale kan findes på: [http://www.inm.dk/publikationer/aarbog\\_udlaendinge\\_05/index.htm](http://www.inm.dk/publikationer/aarbog_udlaendinge_05/index.htm)
3. Diskuter i hvor høj grad regeringens velfærdsudspil løser de udfordringer, som I har behandlet under spørgsmål 2. Inddrag herunder overvejelser om, hvorvidt udspillet kan ses som et opgør med den universelle velfærdsmodel.

### Produktkrav:

I skal udarbejde én opgavebesvarelse pr. gruppe.

---

### Nedenfor følger et par ting, der kan bruges i matematik:

1. En lille træningsopgave til eleverne til at introducere gini-beregninger med.
2. Et regneark med data fra Verdensbanken: Det ligger som separat fil, da det er ret stort. Men man kan dér finde indkomst-decilerne for verdens lande i forskellige år.

Links:

[http://www.leksikon.org/sort\\_stat.php?id=97](http://www.leksikon.org/sort_stat.php?id=97)

Liste over ginikoefficienter (og andre størrelser) for verdens lande.

<http://www.aeraadet.dk/media/filebank/org/fordeling%202006.pdf>

rapport om ulighed fra Arbejderbevægelsens erhvervsråd. Bl.a. er der en graf, der viser hvordan ginikoefficienten i Danmark har varieret de sidste 10 år (side 33)

## Opgave om lorentzdiagrammer og ginikoefficienter.

Nedenfor ser I tre indkomstfordelinger; de er også at finde i et Excel regneark på agora.

- Tegn lorentzdiagrammet for hver af de tre fordelinger
- Beregn ginikoefficienten for de tre fordelinger.

% af befolkning	Fordeling 1 (%)	Fordeling 2 (%)	Fordeling 3(%)
0	0	0	0
10	2	0,5	7
20	4	2	14,5
30	9	4	22,3
40	15	7	30,9
50	22	12	40
60	32	18	51
70	45	26	62,5
80	59	36	74
90	75	47	86
100	100	100	100

### Om at tegne lorentz-kurver.

Marker 1 søjle, (dvs. den med % af befolkning), som er den søjle, der skal være på 1. akse. Hold control nede mens I markerer de søjler, som skal på y-aksen. Klik på guiden-diagram, og vælg XY-punkt. Af undertype vælger I den, der blot tegner en linie uden at sætte punkter, hvor støttepunkterne er. Fortsæt selv.

### Om at beregne ginikoefficienten.

Lad os sige at vi skal beregne ginikoefficienten for fordeling 1, og at den står i søjle B i Excel. Dvs. i celle b2 står der 0, i celle b3 står der 2 osv.

For at beregne arealet af den første trapetz skriver man (i en eller anden celle, hvor der er plads nedenunder)  $= (b_2 + b_3) / 2 * 10$ . Denne formel kopierer man så ned, indtil alle ti trapetzers areal er beregnet. Marker nu de ti tal og klik på autosum ( $\Sigma$ ), der lægger dem alle sammen. Nu har I tallet, der svarer til arealet under kurven. Fortsæt selv med at beregne "arealet af bananen osv." Se evt. Mat C af Carstensen m.fl., side 165 – 167.

## 5. Jagten på den gode stemning (Lyd og kultur)

Hvad er egentlig lyd? Lydoplevelse bygger på sansernes opfattelse af faktorer som f. eks bølger og frekvenser, som fysikken kan måle og matematikken regne på, samt musikalske begreber som toner, intervaller og harmonier. Formålet med dette forløb er således at belyse lyd med to forskellige fakulteters empiri og metode for på den måde at skaffe en dybere indsigt i, hvad lyd egentlig er.

### Deltagende fag:

Fy, Mu, Ma

### Metodemæssige mål:

Eleverne skal

- Være i stand til at udforme en synopsis (der bl.a. kan udformes gruppevis i projekttimerne – se krav til eleverne)
- arbejde sammen i grupper.
- udføre eksperimenter og behandle data med en hensigtsmæssig metode.
- benytte matematikken til at behandle problemstillinger i samarbejde med andre hovedområder, her f.eks. det humanistiske fakultet. Her skal matematiske begreber anvendes i forbindelse med en generel beskrivelse af, hvad lyd er og hvordan lyd kan udtrykkes.

### Faglige mål:

Eleverne skal

- Have kendskab til de trigonometriske funktioner, herunder radiantal, enhedscirkel.
- Kunne beskrive de trigonometriske funktioners karakteristiske egenskaber, herunder grafer, perioder, omløbstal.
- Kunne bruge TI-89 til at karakterisere funktionsfamilien  $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$
- Kunne beskrive harmoniske svingninger og betydningen af størrelserne  $A, \varphi$  og  $\omega$  i udtrykket  $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$
- Have en induktiv forståelse af addition af sinusfunktioner vha. grafregner

### Fællesfaglige mål:

Eleverne skal kunne

- Arbejde med to forskellige fakulteters empiri, metode og teorier på samme ”sag” – altså skal eleverne opnå konkret indblik i forskelle/ligheder mellem to af fakulteterne.

**Tidsforbrug: 5 timer.**

### Forudsætninger:

Indledende funktionsteori og beskrivelse af sammenhænge mellem variable.

### Materiale:

Passende uddrag fra

Carstensen og Frandsen: MAT 1. Systime 1997 s. 176-177+256-265.

Carstens og Frandsen: MAT1 – opgavebog – opgave 1209

Flemming Clausen Poul Printz, Gert Schomacker : Analytisk geometri og funktioner s. 51-59

Interaktive opgaver fra:

<http://home3.inet.tele.dk/pmh/uvprojekt/har.htm>

<http://home3.inet.tele.dk/pmh/uvprojekt/harmoni-net.pdf>

**Arbejdsformer:**

Emnearbejde med en kombination af foredrag (ved introduktion til matematiske begreber), eksperimenter (i fysik og musik) og gruppearbejde (i forbindelse med behandling af måleresultater og synopsis)

**Produktkrav:**

Synopsis som rettes og kommenteres af de involverede lærere.

**Forløbsplan:**

- Lærergennemgang af trigonometriske funktioners egenskaber, herunder radiantal, enhedscirkel, graf, periodicitet, omløbstal (2 timer)
- Harmoniske svingninger og betydningen af størrelserne  $A$ ,  $\varphi$  og  $\omega$  i udtrykket
- $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$  - opgave 1209 (2 timer inkl. opsamling + hjemmearbejde)
- Addition af sinusfunktioner vha. grafregner. (1 time)

**Krav til eleverne:**

- I skal overveje sammenhængen mellem gennemgangen af sinus-funktionens egenskaber og resonans, samt emnets sammenhæng med musik.
- **Eleverne får udleveret**
  - problemformulering: Hvad er lyd og hvordan kan lyden udtrykkes (og evt. bruges til)
  - væsentlige problemstillinger: se fil (synopsis: LYD)

**Eleverne skal så selv formulere**

1. væsentlige delkonklusioner til hver af listens problemstillinger
2. oversigt over metoder, der er relevante i arbejdet med problemstillingerne, dvs. hvad gjorde de i de tre fag/de to fakulteter.
3. samlet konklusion
4. Spørgsmål til videre arbejde
5. Kommenteret litteraturliste.

## Jagten på den gode stemning (Lyd og kultur)

### **Problemformulering : *Jagten på den gode stemning.***

Når man hører et instrument, en stemme eller et stykke musik, kan man i løbet af få sekunder placere det. Der er mange faktorer, som gør at vi næsten øjeblikkeligt genkender denne lyd/sound ... eller skal man kalde det klang?

Men hvad er klang - og hvad er en hård/blød klang? En god klang? Er en dårlig klang? Hvordan hænger det sammen med stemning af instrumenter og rene/falske toner.

Opfattelse af god klang hænger sammen med både tid og sted. Klang er hverken universel eller eviggyldig, men er noget som kan beskrives såvel subjektivt som objektivt.

Lydoplevelse bygger på sansernes opfattelse af faktorer som f. eks bølger og frekvenser, som fysikken kan måle og matematikken regne på, samt musikalske begreber som toner, intervaller og harmonier.

### **Væsentlige problemstillinger:**

- (1) Lyd – hvad forstår vi ved lyd?
- (2) Hvordan kan man se og høre forskel på lyd?
- (3) Hvad mener vi med at lyd kan lyde falsk – eller være støj? Eller hvad forstår vi med en harmonisk lyd? Er der forskel på disse rent matematisk?
- (4) Hvordan kan det være at for eksempel træblæsere kan lyde så forskelligt.
- (5) Hvordan har opfattelsen af en god klang ændret sig i den vesteuropæiske musiktradition?
- (6) Hvorfor lyder forskellige landes musik så forskelligt?
- (7) Hvorfor indførte man funktionsharmonikken (Dur/mol) og hvilke konsekvenser havde det?
- (8) Hvilken sammenhæng er der mellem harmoniske svingninger og resonans?

### **Elevernes opgave:**

- (1) Lav de væsentligste delkonklusioner.
- (2) Lav en oversigt over relevante metoder og empiri i arbejdet med problemstillingerne.
- (3) Lav en samlet konklusion/status på *Jagten på den gode stemning*.
- (4) En oversigt over spørgsmål til videre arbejde med temaet.
- (5) Lav en kommenteret litteraturliste med det anvendte materiale. Hermed forstås, at I på nogle få linjer skal skrive, hvad materialet kan bruges til i forbindelse med problemformuleringen.

## 6. ”Skabt til at Skabe”: billedanalyse af renæssancebilleder.

I den tidlige renæssance opstod i Italien et økonomisk overskud blandt borgerskabet og fyrsterne. Det økonomiske overskud blev bla.a. brugt til at vise sin stilling og anseelse i samfundet. Det kunne opnås ved at ansætte en anerkendt maler, som fremstillede et kristent eller mytologisk motiv, gerne med mæcenen placeret i maleriet.

Det epokegørende i perioden var malernes anvendelse af perspektiv og ofte det gyldne snit. Malerne var kun i få tilfælde matematikere, men de lærte sig perspektivets regler og anvendte dem i praksis. Her er altså et eksempel på, hvordan matematikken inddrages i malerkunsten med det formål at angive naturtro motiver.

Forløbets formål er at opkvalificere billedanalysen af renæssancebilleder ved at bruge to fakulteters empiri og metode. Et progressionstema kunne være individ i forhold til autoriteter. I perioden ændres synet på mennesket radikalt: fra at være et menneske underlagt Guds vilje, til at være et menneske med egen fri vilje og mulighed for at nå egne mål (at være Skabt til at Skabe).

**Fag:** Ma, da (eller hi, billedkunst)

### **Mål: Metodiske**

Eleverne skal oparbejde kompetencer i at

- Samarbejde med hinanden i grupper
- formulere faglige problemstillinger
- planlægge et arbejdsforløb med tilhørende produkt
- formidle resultater hensigtsmæssigt vha. PowerPoint.
- Lytte til oplæg og give konstruktiv kritik vha. opponentgrupper
- benytte matematikken til at behandle problemstillinger i samarbejde med andre hovedområder, her f.eks. det humanistiske fakultet.

### **Mål: Faglige**

Eleverne skal

- have kendskab til perspektivets grundlæggende læresætninger
- kunne anvende perspektivets læresætninger i forbindelse med billedanalyse
- have kendskab til centrale egenskaber ved det gyldne snit og dets betydning i forbindelse med billeders opbygning.
- kunne argumentere for nogle af sætningerne indenfor de to delemner og dermed opøve evnen til logisk og abstrakt tankegang.
- Kunne løse andengradsligninger (kun på A-niveau)

### **Mål: Fællesfaglige**

Eleverne skal kunne

- Lave en kvalificeret billedanalyse med to akser: konstruktionsanalysen og fortolkningsanalysen.
- Arbejde med to forskellige fakulteters empiri, metode og teorier på samme ”sag” – altså skal eleverne opnå konkret indblik i forskelle/ligheder mellem to af fakulteterne.

### **Tidsforbrug**

7-10 timer.

## Forudsætninger

Brøkgregning, kvadratsætninger, ”gange over kors-reglen”, solve-funktionen på TI-89 (eller et tilsvarende værktøj). Flere af disse forudsætninger kan naturligvis erstattes med viden om brug af Ti-89 – alt efter hvornår man afholder forløbet.

## Materialer

Forslag til materiale	Matematik på A-niveau:	Matematik på B-niveau:	Matematik på C-niveau:
	<p>Uddrag af Bjørn Grøns noter om Det gyldne snit s. 1-6 fra emu.dk Flemming Clausen: Perpektivtegning1. Fra emu.dk s. 1-9 (<a href="http://www.ci.kk.dk/skoler/ng/teachers/FC/perspAnalyse/perpsetiv1Update.doc">http://www.ci.kk.dk/skoler/ng/teachers/FC/perspAnalyse/perpsetiv1Update.doc</a>) Noter fra Peter Væversted Petersen: Centralperspektivet. S. 1-14</p> <p><b>Grundbogsstof:</b> Knud Erik Nielsen og Esper Fogh: "Vejen til Matematik AB1". Forlaget HAX 2005 s.24-25+43,45 mf-45. (eller en anden bog om 2. grads ligning)</p>	<p>Uddrag af Bjørn Grøns noter om Det gyldne snit s. 1-3 fra emu.dk Flemming Clausen: Perpektivtegning1. Fra emu.dk s. 1-9 (<a href="http://www.ci.kk.dk/skoler/ng/teachers/FC/perspAnalyse/perpsetiv1Update.doc">http://www.ci.kk.dk/skoler/ng/teachers/FC/perspAnalyse/perpsetiv1Update.doc</a>) Noter fra Peter Væversted Petersen: Centralperspektivet. S. 1-14.</p> <p>Vejledning til anvendelse af solveren i forbindelse med 2. gradsligningen. Ligeledes kan nogle af de øvrige reduktioner foretages på lommeregner.</p>	<p>Uddrag af Bjørn Grøns noter om Det gyldne snit s. 1-6 fra emu.dk Noter fra Peter Væversted Petersen: Centralperspektivet. S. 1-14.</p> <p>Opgaverne i Bjørn Grøns noter løses ved indsættelse i ligningerne og lave kontrol. Det kræver, at der arbejdes med regneregler for brøker inden forløbet – eller i forløbet. Brug egen grundbog til dette.</p>

## Billedsamling:

Følgende billeder findes i elektronisk udgave ved en googlesøgning:

*Sandro Botticelli (1445-1510) ”Bebudelsen” (ca. 1489)*

*Filippo Lippi (1406-1469) “Madonna og barn*

*Pietro Perugino (ca. 1448-1523) “Pietà” (ca. 1493)*

*Ghirlandaio (1449-1494) “Den sidste nadver” (1480)*

*Masaccio (1401-1428). ”Treenigheden” (ca. 1425)*

*Sandro Botticelli (1445-1510) ”Kongernes tilbedelse” (ca. 1475)*

## Arbejdsformer

En kombination af klasseundervisning og gruppearbejde.  
Arbejdet med det fællesfaglige stof foregår i grupper.

## Produktkrav

Eleverne udarbejder en PowerPoint præsentation indeholdende en billedanalyse og indtegning af det gyldne snit og de perspektiviske linjer (se de to filer med krav til disse)  
Dertil afleveres på skrift en detaljeret gennemgang af såvel billedanalysen som konstruktionsanalysen.

### **Plan over forløbet**

- 1) Introduktion til arbejdet i grupper, produktkrav, indholdet i matematik. (1 t)
- 2) Gruppearbejde om Det gyldne snit ud fra Bjørn Grøns noter (2-3 t – alt efter niveau og krav til ræssonement).
- 3) Klasseundervisning og summegrupper/grupper om Perspektivregning (3 t)
  - i) Lav små øvelser om perspektiv (f. eks Clausens opgaver og de små opgaver i Peter Væverstedts noter)
- 4) Fællesfaglige timer (4-5 t)
  - i) Lav konstruktionsanalysen til gruppens billede
  - ii) Lav fortolkningsanalysen til gruppens billede
  - iii) Formidling osv. Jf. metodemæssige mål.

### **Krav til eleverne**

I skal udarbejde følgende:

- Et skriftligt oplæg, hvor billedanalysens 11 punkter gennemgås.(en analysemodel er vedlagt)
- Et PowerPoint oplæg, hvor hovedpunkterne i denne analyse visualiseres og præsenteres.
- Lede og fordele arbejdet i grupperne
- Udarbejde en matematikrapport med udgangspunkt i arbejdet med det gyldne snit (eksempel vedlagt)

# CENTRALPERSPEKTIVET

## Afsnit 1. Lidt om centralperspektivets historie

At skabe illusioner ved hjælp af perspektiv, rum, lys og flader kendes allerede fra antikkens Grækenland og den romerske malerkunst. I middelalderens malerkunst anvendte man det såkaldte *betydningsperspektiv*, hvor figureernes størrelse på et billede *ikke* bestemmes af, hvor langt væk de befinder sig, men af deres betydning. Vigtige personer afbildes store, og jo mindre en persons betydning er, desto mindre afbildes vedkommende.



Figur 1.

På figur 1 er *Giotto di Bondones* (ca. 1266-1337) maleri „Madonna Ognissanti”, der er malet omkring 1310, gengivet.

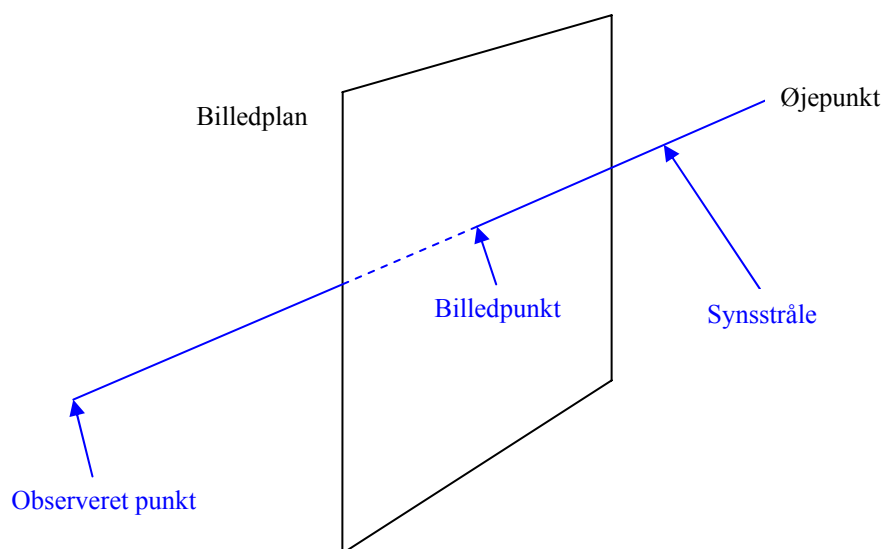
- Hvad ser man på billedet? Gør rede for at dette billede er udført med anvendelse af betydningsperspektiv. I tronstolen er der dog gjort forsøg på at fremkalde en perspektivvirkning.

Først i begyndelsen af 1400-tallet lykkedes det at udvikle en teoretisk velfunderet og samtidig praktisk anvendelig metode, der kunne anvendes til at gengive rumlige forhold på en todimensional flade på en virkelighedstro måde. Det var *Felippo Brunelleschi* (1377-1446), der som den første demonstrerede brugen af *centralperspektivet*. Brunelleschi var født i Firenze og egentlig udlært guldsmed; han vandt i 1401 sammen med *Lorenzo Ghiberti* (1378-1455) konkurrencen om udformningen af nordportalen i Baptisteriet. Det var imidlertid Ghiberti, der fik opgaven. Sammen med *Donatello* (1386-1466) tilbragte Brunelleschi de næste tre år i Rom, hvor han studerede oldtidens arkitektur og blandt andet stiftede bekendtskab med den romerske arkitektteoretiker *Vitruvius* (31 f.v.t.-14 e.v.t.). Det var sandsynligvis i denne periode, at

Brunelleschis interesse for perspektivet blev vakt, da opmåling og tegning af bygninger var en væsentlig del af studiet.

Man ved ikke hvornår Brunelleschi vendte tilbage til Firenze. Men i løbet af det andet årti af 1400-tallet fremviste han to tavler, der fremstillede henholdsvis Baptisteriet og Piazza della Signoria. Ved hjælp af et sindrigt system af spejle og optiske teknikker viste han, hvorledes han på de to tavler havde givet en perfekt og virkelighedstro todimensional gengivelse af den tredimensionale virkelighed. Samtidigt gav han en præcis formulering af, hvilke regler et billede skulle overholde for at være perspektivisk korrekt.

Freskoen „Treenigheden” af *Masaccio* (1401-1428), der findes i Santa Maria Novella, regnes for det første egentlige kunstværk i europæisk malerkunst, hvori centralperspektivets love anvendes konsekvent. Kunstteoretikeren *Leon Battista Alberti* (1404-72) var den første, der lavede en matematisk model for perspektivtegning. Modellen giver en teoretisk begrundelse for centralperspektivets love og er formuleret i Albertis tre bøger om malerkunsten „*Della Pittura*”, der blev færdiggjort i 1435 (bogen er i øvrigt tilegnet Brunelleschi). Albertis model er illustreret på figur 2:



Figur 2.

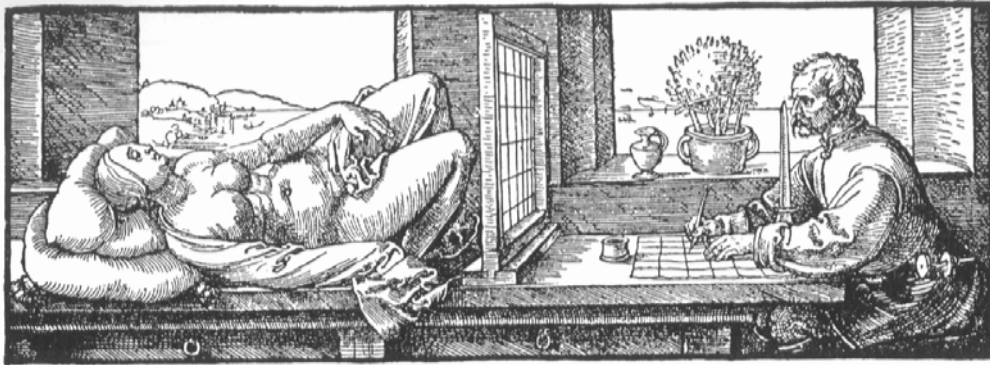
I Albertis model for centralperspektivet fastholdes iagttagerens øje i *øjepunktet* og det (gennemsigtige) papir billedet tegnes på er anbragt i *billedplanen*. Modellen bygger nu på to antagelser:

- **Antagelse 1.** Betragterens øje opfattes som et punkt, *øjepunktet*, og
- **Antagelse 2.** Lyset fra et observeret punkt til *øjepunktet* følger en ret linje, en såkaldt *synsstråle*.

Et observeret punkt skal nu afbildes i det punkt, hvori synsstrålen skærer billedplanen. Dette punkt kaldes også *billedpunktet* af det observerede punkt.

I „*Della Pittura*” anviste Alberti også en praktisk anvendelig metode til konstruktion af perspektivisk korrekte billeder. I en let tillempet udgave er denne metode emnet for afsnit 5 i disse noter. Den tyske maler og matematiker *Albrecht Dürer* (1471-1528) arbejdede videre med teorien bag centralperspektivet. Hans mest bemærkelsesværdige indsats var inden for konstruktionen af skygger, men han arbejdede også med brugen af *tegnerammer*. I Dürers bog

„Underweysung der Messung“ fra 1525 er illustreret tre forskellige tegnerammer, hvoraf én er vist på figur 3.



Figur 3.

- Forklar, hvorledes tegnerammen på figur 3 fungerer.

I de følgende århundreder arbejdede såvel malere, som matematikere videre med at udvikle og forfine teorien for perspektivet. Blandt malerne indtog *Leonardo da Vinci* (1452-1519) en kritisk holdning til Albertis model og søgte at forbedre den. Den engelske matematiker *Brook Taylor* (1685-1731) udviklede teorien for forsvindingspunkter (der omtales i de næste afsnit), mens den tyske matematiker og filosof *Johann Heinrich Lambert* (1728-77) i bogen „Freye Perspective oder Anweisung“ fra 1759 gav en af de første systematiske fremstillinger af perspektivlæren.

Betydningen af opfindelsen af centralperspektivet kan næppe overvurderes: Malerkunsten fulgte dens regler i de følgende 500 år, og først i årene omkring år 1900 brød malere som van Gogh, Cézanne og Picasso for alvor med dem.

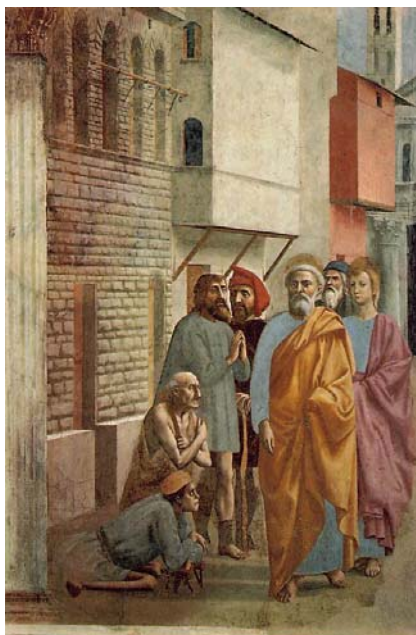
## Afsnit 2. Undersøgelse af centralperspektivets love

For at formulere de vigtigste regler for centralperspektivet betragtes i dette afsnit nogle fresker, der findes i Brancaccikapellet i Santa Maria del Carmine i Firenze.

Masaccio malede omkring 1425 fresken „Peters skyggehelbredelse“, der er vist på figur 4 på næste side. Billedet viser apostlen Peter, der helbreder med sin skygge (beretningen er kendt fra Apostlenes Gerninger, kapitel 5, vers 15-16).

Scenen udspiller sig tilsyneladende på et florentinsk gadestrøg i begyndelsen af 1400-tallet med et typisk renæssancepalads med rustikke kvadre og sokkelbænk i billedets venstre side. Peter ledsaget af to andre apostle skrider majestætisk frem mod beskueren. Efterhånden som Peters skygge rammer de tiggende krøblinger rejser disse sig, helbredt!

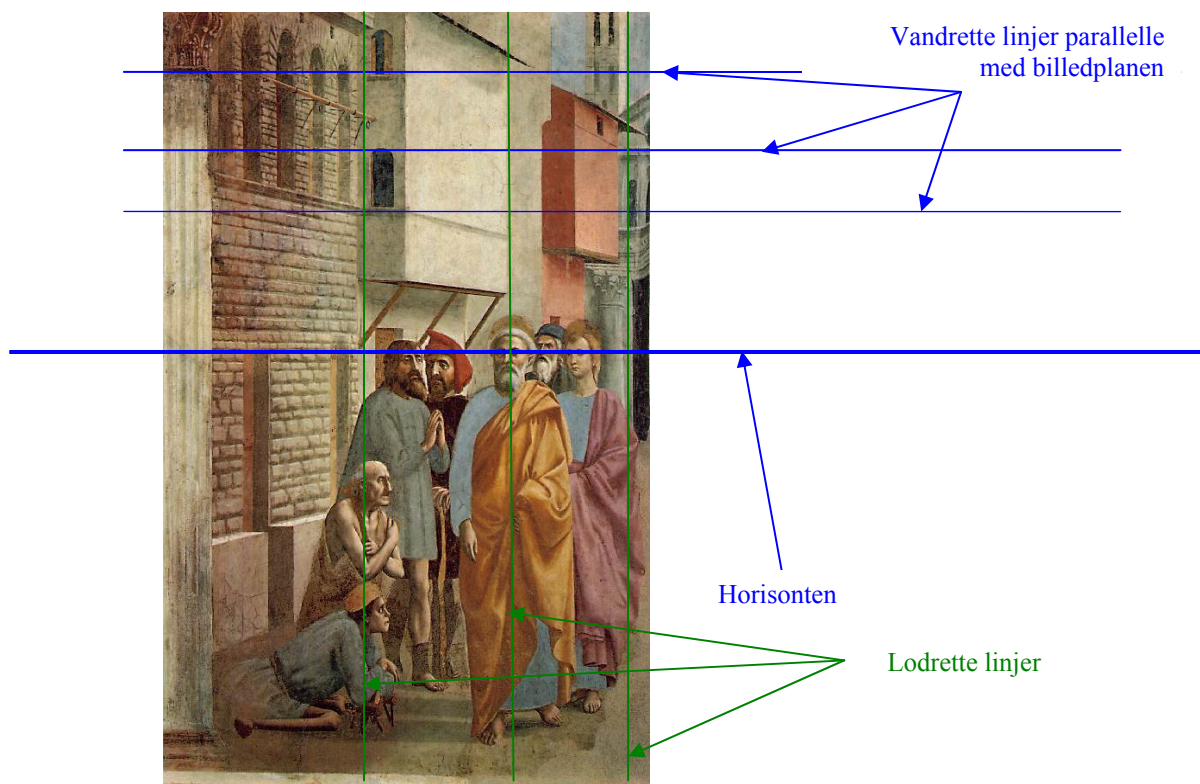
Først med kendskabet til centralperspektivet bliver det muligt at skildre bevægelse vinkelret på billedplanen, tidligere måtte bevægelse foregå fra side til side i billedet. Samtidig er denne fresko det første billede i europæisk kunst, hvori der forekommer skygger. Med centralperspektivet kan disse tegnes overbevisende. Det er dog, som nævnt, først senere, at malerne får helt styr på tegningen af skygger.



Figur 4.

Indledningsvist ser man på figur 5, at lodrette linjer i motivet også er tegnet lodrette. Når billedplanen er lodret, er dette en konsekvens af modellen af centralperspektivet i figur 2. Prøv selv at overveje rimeligheden af dette!

Gesimserne langs underkanten af vinduerne i enden af karnappen ligger som vist på figur 5 langs vandrette linjer, ligesom gesimserne i kirkebygningen i billedets baggrund.

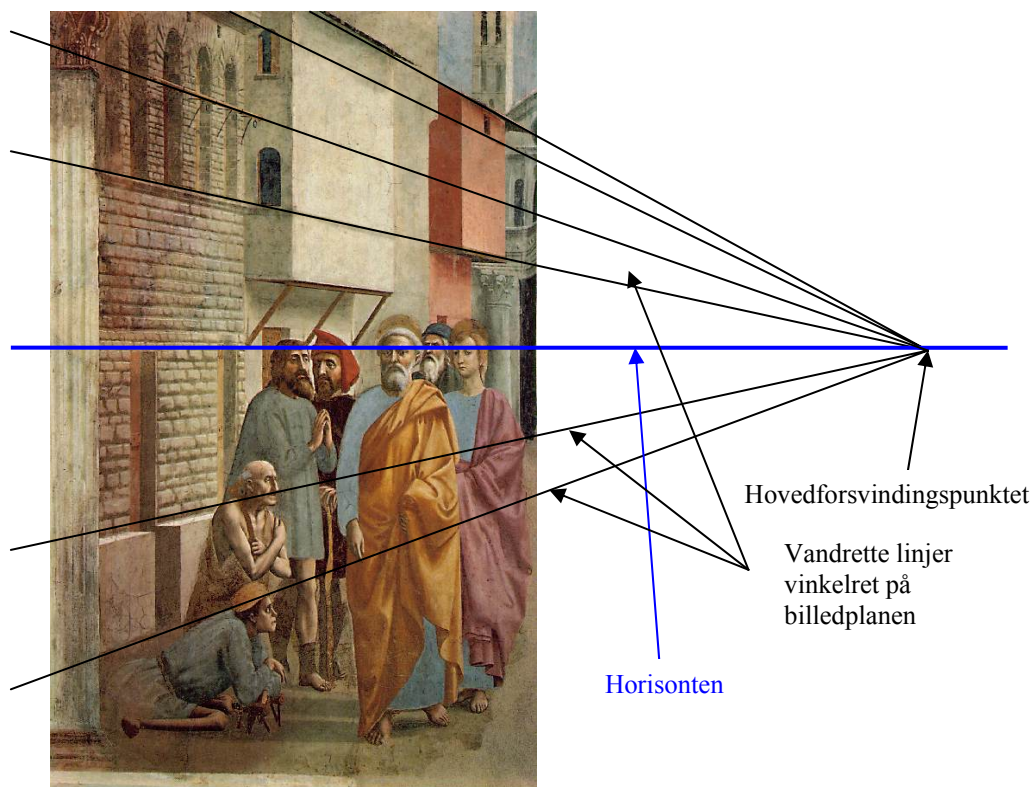


Figur 5.

Svarende til lodrette linjer er det oplagt ud fra modellen af centralperspektivet i figur 2, at vandrette linjer i motivet, der er parallelle med billedplanen, også skal tegnes som vandrette linjer. Det er følgelig rimeligt at konkludere, at gaden apostlene går på er vinkelret på billedplanen.

På figur 6 er under- og overkanten af sokkelbænken tegnet op og forlænget bagud, ligesom der er trukket linjer langs gesimserne og tagskæggene. Man ser at disse linjer, der jo må være vinkelrette på billedplanen, alle forsvinder i det fjerne i samme punkt, *hovedforsvindingspunktet*. Den vandrette linje gennem hovedforsvindingspunktet kaldes *horisonten*. Senere skal der gives en forklaring på denne måske lidt overraskende betegnelse.

På figur 5 bemærker man samtidig at på nær de to forreste krøblinger findes alle personernes øjne langs horisonten. Faktisk er alle *stående* personers øjenhøjde den samme, uanset om personerne befinder sig i forgrunden eller længere tilbage. Årsagen hertil er, at malerens øjepunkt netop er i samme højde som personerne i billedet; man må altså tænke sig at han ser vandret ind mod personernes øjne. Man kalder dette *isokefalisk perspektiv*. Også dette begreb uddybes senere.



Figur 6.

Fresken vist på figur 7 er påbegyndt af Masaccio i 1426-27 og færdiggjort af *Fillipino Lippi* (ca. 1457-1504) i engang i årene 1481-85.

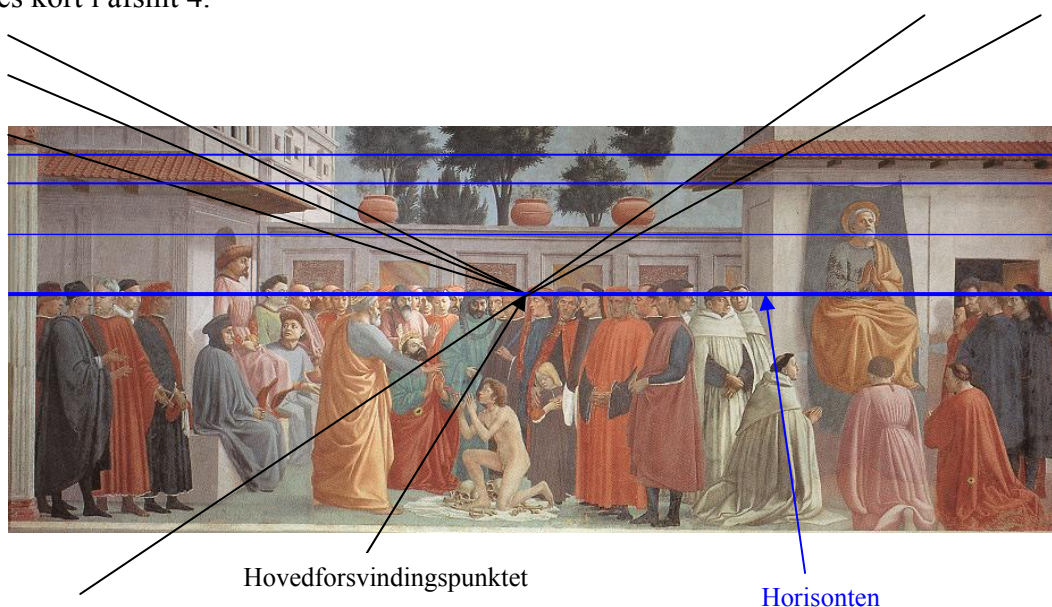


Figur 7.

Billedet illustrerer et mirakel Peter udførte, efter at han på Paulus' forbøn var blevet løsladt fra fængslet. Præfekten for Antiochia, Theophilus, havde 14 år tidligere mistet sin søn. Efter løsladelsen blev Peter ført til graven og vækkede den døde søn til live. Efter dette mirakel blev Theophilus og hele Antiochias befolkning omvendt til kristendommen. Beretningen om dette mirakel findes ikke i Ny Testamente, men i en samling af helgenlegender, „Legenda Aurea”, der er udgivet af dominikaneren *Jacobus de Voragine* (d. 1298).

Masaccio har igen valgt at henlægge scenen til sin samtid. Blandt figurerne finder man således karmelittermunke fra Santa Maria del Carmine og bl.a. Masolino, Alberti og Brunelleschi, samt et selvportræt af kunstneren!

Man ser tydeligere her end i „Peters skyggehelbredelse”, at motivet er set direkte forfra. Linjerne i tagskæggene og muren i baggrunden er vandrette, som vist på figur 8. Man siger, at billedet er malet i *frontperspektiv*. Det er karakteristisk, at alle den tidlige renessances malerier er udført i frontperspektiv. Først senere begyndte man at benytte *skråperspektiv*, hvor motivets bygninger danner en vinkel med billedplanen. Frontperspektiv og skråperspektiv diskuteres kort i afsnit 4.



Figur 8.

Tegner man de vandrette linjer op, der i motivet står vinkelret på billedplanen, ser man igen at disse forsvinder i hovedforsvindingspunktet. Man må forestille sig, at malerens øjeblik befinder sig netop ud for hovedforsvindingspunktet. Lidt mere præcist udtrykt:

Linjestykket, der forbinder øjepunktet og hovedforsvindingspunktet, er vinkelret på billedplanen. Man siger, at hoved-forsvindingspunktet er *projektion* af øjepunktet på billedplanen. Endelig observerer man, at alle stående personers øjne er i højde med horisonten; også dette billede er malet i isokefalisk perspektiv.

På baggrund af disse to eksempler kan følgende regler for centralperspektivet formuleres:

- **Regel 1.** Når billedplanen er lodret afbildes lodrette linjer i lodrette linjer, og vandrette linjer parallelt med billedplanen afbildes i vandrette linjer.
- **Regel 2.** Vandrette linjer vinkelret på billedplanen afbildes, så de forsvinder i hovedforsvindingspunktet.
- **Regel 3.** Horisonten er den vandrette linje gennem hovedforsvindingspunktet.

På figur 9 er vist fresken „Skattens mønt”, der er malet af Masaccio omkring 1425. Billedet er naturligvis malet perspektivisk korrekt.



Figur 9.

- Undersøg, om der er vandrette linjer parallelt med billedplanen i motivet. Er billedet malet i frontperspektiv eller skråperspektiv? Svaret skal begrundes.
- Bestem beliggenheden af hovedforsvindingspunktet og indtegn horisonten.
- Er billedet udført i isokefalisk perspektiv?

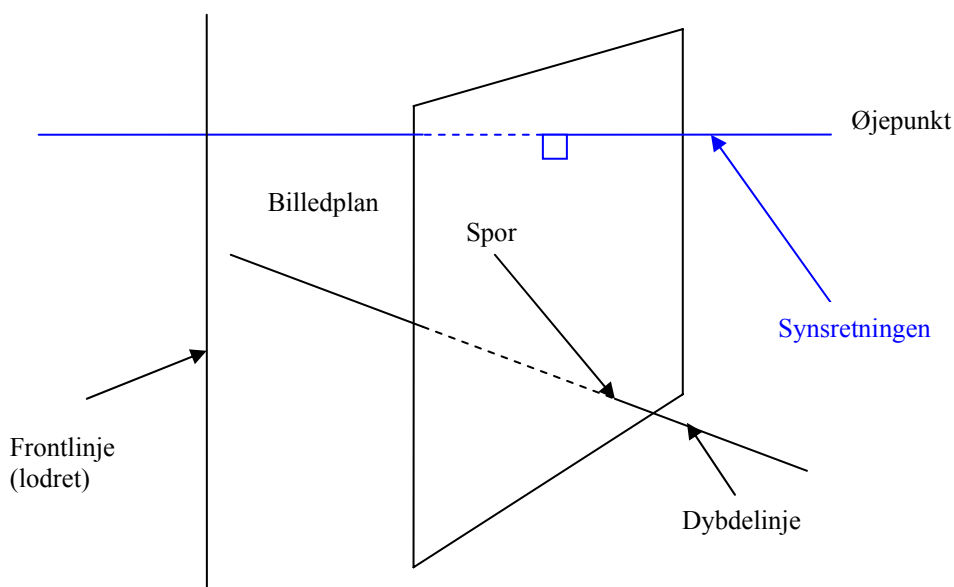
### Afsnit 3. Matematikken bag centralperspektivet

I det foregående afsnit blev der formuleret nogle vigtige regler for centralperspektivet ud fra to billedeksempler. I dette afsnit skal der gives en matematisk begrundelse for rigtigheden af disse regler. Allerstørst er det dog nødvendigt at indføre nogle definitioner:

På figur 10 nedenfor er Albertis model af centralperspektivet igen gengivet. Linjen gennem øjepunktet vinkelret på billedplanen kaldes *synsretningen* og afstanden mellem øjepunktet og billedplanen kaldes *distancen*. En linje i motivet, der er parallel med billedplanen kaldes en *frontlinje*, mens en linje der ikke er parallel med billedplanen kaldes en *dybdelinje*.

Til en given dybdelinje  $l$  knyttes to punkter, nemlig linjens *spor* og dens *forsvindingspunkt*: Sporet af linjen  $l$  er skæringspunktet mellem  $l$  og billedplanen, se figur 10. Forsvindingspunktet for  $l$  er skæringspunktet mellem linjen gennem øjepunktet parallel med  $l$  og billedplanen. Rimeligheden af sprogrugen i denne sidste definition følger af *perspektivlærens hovedsætning* nedenfor.

Det skal bemærkes, at der i disse noter overalt er underforstået, at ethvert punkt der ønskes afbildet ligger på den modsatte side af billedplanen i forhold til øjepunktet. Matematisk set er det ikke nogen nødvendig betingelse, og i mange bøger om centralperspektivet kræver man det da heller ikke. Imidlertid bliver formuleringen af perspektivlærens hovedsætning lidt enklere med denne ekstra betingelse tilføjet.

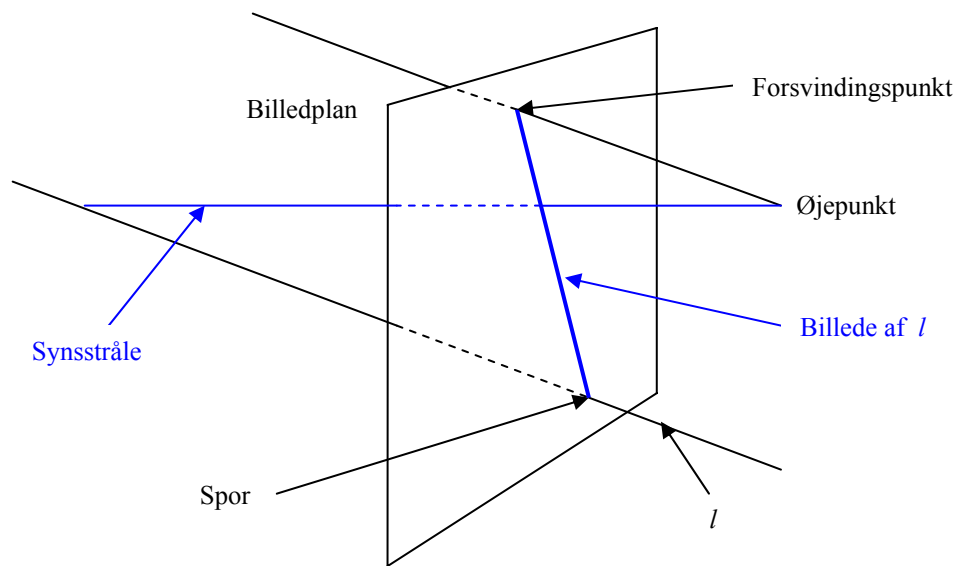


Figur 10.

- **Perspektivlærens hovedsætning.** Billedet af en dybdelinje  $l$ , der ikke går gennem øjepunktet, er et linjestykke, hvis endepunkter er henholdsvis sporet og forsvindingspunktet for  $l$ .

*Bevis:* Situationen er illustreret på figur 11 på næste side. Øjepunktet udspænder sammen med  $l$  en plan  $\alpha$ , der ikke er parallel med billedplanen (bemærk, at  $\alpha$  af hensyn til overskueligheden ikke er indtegnet på figuren). Det er oplagt, at linjen gennem øjepunktet parallel med  $l$  er indeholdt i  $\alpha$ , hvorfor forsvindingspunktet for  $l$  ligger i  $\alpha$ . Dermed følger, at sporet og forsvindingspunktet for  $l$  begge ligger på skæringslinjen mellem  $\alpha$  og billedplanen.

Men da enhver synsstråle fra et punkt på  $l$  til øjepunktet er en linje indeholdt i  $\alpha$  følger, at billedet af  $l$  er en delmængde af skæringslinjen mellem  $\alpha$  og billedplanen. Af figur 11 fremgår endvidere, at billedet af punkter på  $l$  må ligge mellem sporet og forsvindingspunktet for  $l$ . Man ser tillige, at jo længere et punkt ligger ude af  $l$ , jo tættere vil det tilhørende billedpunkt ligge på forsvindingspunkt. Men dermed er det ønskede bevist.



Figur 11.

- Hvad er billedet af en dybdelinje, der går gennem øjepunktet?
- Før bevis for regel 1 fra det foregående afsnit.
- Overvej, at regel 2 fra det foregående afsnit blot er et specialtilfælde af perspektivlærens hovedsætning.
- Som tidligere omtalt er horisonten den vandrette linje gennem hovedforsvindingspunktet. Gør rede for, at forsvindingspunktet for *enhver* vandret dybdelinje ligger på horisonten.
- Hvorfor hedder det mon horisonten?
- Overvej, at en vandret dybdelinje, der afbildes som om den bevæger sig ned mod sit forsvindingspunkt, i virkeligheden ligger over øjepunktet, dvs. over øjenhøjde.
- Hvordan skal en vandret linje i øjenhøjde, henholdsvis under øjenhøjde, tegnes?

I beviset for perspektivlærens hovedsætning blev det benyttet, at forsvindingspunktet for en given dybdelinje  $l$  er skæringspunktet mellem linjen gennem øjepunktet parallel med  $l$  og billedplanen. Men heraf følger umiddelbart følgende sætning:

➤ **Sætning 1.** *Parallelle dybdelinjer har samme forsvindingspunkt.*

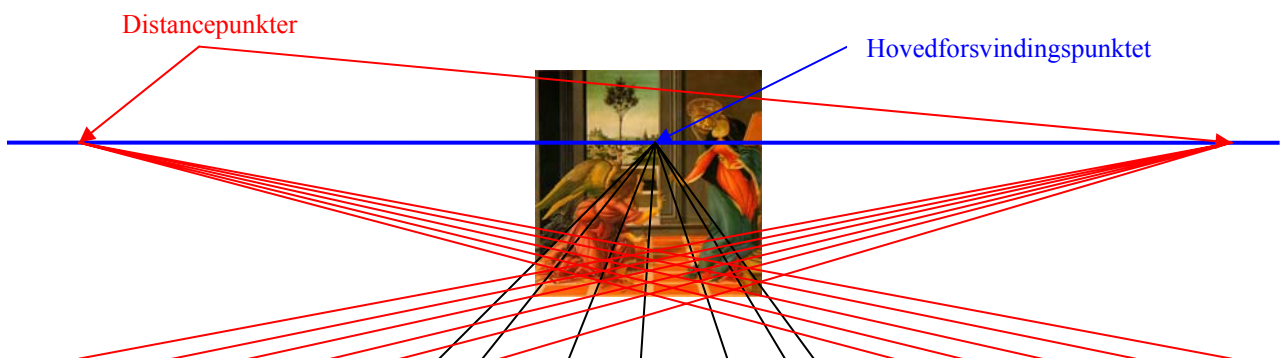
Som et eksempel på indholdet i sætning 1 undersøges billedet „Bebudelsen” malet af *Sandro Botticelli* (1445-1510) omkring 1489. Billedet findes på Uffizierne og er gengivet på figur 12.



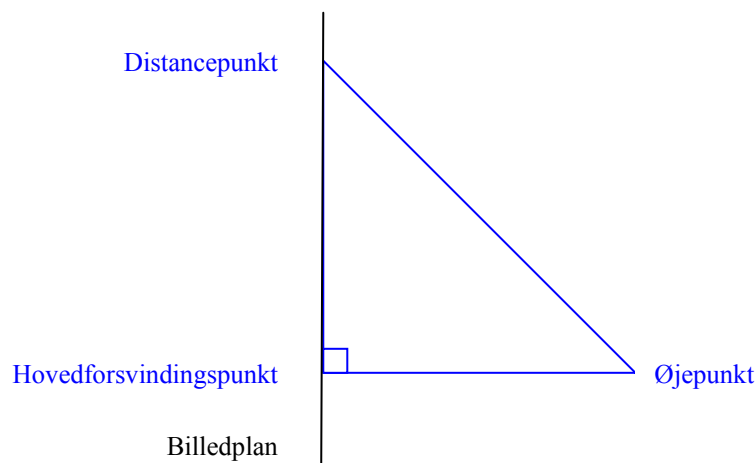
Figur 12.

Her kan hovedforsvindingspunktet bestemmes ved at betragte fliserne i gulvet: Flisekanterne indad i billedet må være vinkelrette på billedplanen og forlænges disse bagud mødes de derfor i hovedforsvindingspunktet. Igennem dette kan horisonten derefter tegnes. Alt dette er gjort på figur 13 nedenfor.

Betragt igen figur 12. Hvis fliserne i gulvet er kvadratiske må linjerne, der går gennem flisernes diagonaler, danne vinkler på  $45^\circ$  med billedplanen. Da der er tale om vandrette dybdelinjer, må de have forsvindingspunkter på horisonten. Det er klart, at disse linjer kan opdeles i to sæt parallelle linjer; af sætning 1 fås så, at linjerne kun har to forsvindingspunkter. Som det fremgår af figur 13 benævnes disse forsvindingspunkter *distancepunkterne*. Figur 14 nedenfor og sætning 2 forklarer, hvordan distancepunkterne kan benyttes til at bestemme distancen med.



Figur 13.



Figur 14.

Ved konstruktionen af et distancepunkt dannes en retvinklet trekant, hvis to spidse vinkler begge er  $45^\circ$  (situationen er set lodret oppefra på figur 14). Men heraf ses, at afstanden mellem distancepunkterne og hovedforsvindingspunktet netop er den samme som afstanden fra øjepunktet og vinkelret ind på billedplanen. Med andre ord, der gælder:

- **Sætning 2.** Afstanden mellem distancepunkterne og hovedforsvindingspunktet er netop distancen.

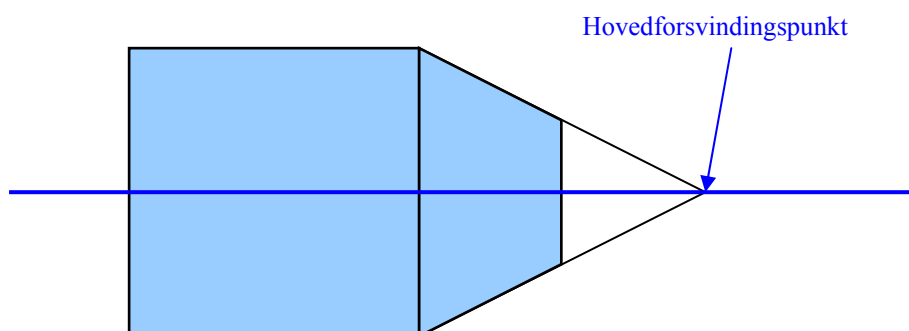
Figur 14 og sætning 2 giver en opskrift på bestemmelse af øjepunktets nøjagtige position.

Hensigten med centralperspektivet er naturligvis at levere den samme synspåvirkning, som det virkelige motiv gør. Det er her vigtigt at gøre sig klart, at et billede malet i centralperspektiv i princippet kun ser „helt rigtig” ud netop fra øjepunktet. Viser et billede således et hus set lige forfra, kan man jo ikke som ved det virkelige hus fortsætte hen langs facaden, indtil gavlen af huset kommer til syne. Set i en tilstrækkelig skrå vinkel vil billedet altså virke „forkert”. Nu er menneskets hjerne ganske vist god til at kompensere for sådanne forkerte indtryk, så man alligevel ofte vil opleve billedet som virkelighedstro. Ønsker man imidlertid at få den fulde synsoplevelse af et billede malet i centralperspektiv, bør man finde frem til øjepunktets placering og betragte billedet derfra!

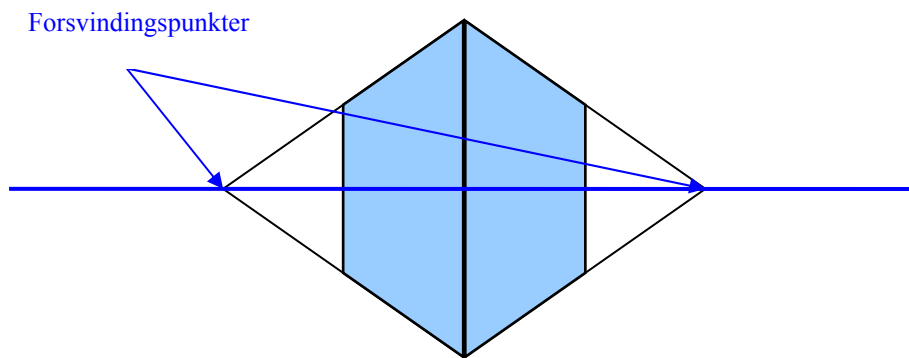
#### Afsnit 4. Frontperspektiv eller skråperspektiv

I de billedeksempler, der indtil nu er benyttet i disse noter, er motiverne alle set direkte forfra. Som tidligere omtalt kalder man dette for *frontperspektiv*, mens man taler om *skråperspektiv* hvis linjerne i motivet danner en skrå vinkel med billedplanen. Skråperspektiv kaldes også *X-perspektiv*.

På figur 15 og 16 er en terning gengivet i henholdsvis frontperspektiv og skråperspektiv. Man bemærker, at der i billedet af terningen i skråperspektiv forekommer to forsvindings-punkter, mens der i frontperspektiv kun er ét, hovedforsvindingspunktet.



Figur 15.



Figur 16.

Det er også karakteristisk, at distancens betydning er langt større i billeder udført i skråperspektiv end den er i frontperspektiv. Ses et billede i skråperspektiv fra en anden afstand end distancen, vil det ofte virke „forkert”. Der er således næppe mange, der vil mene, at figur 16 ser synderlig virkelighedstro ud set fra almindelig læseafstand.

- Fra hvilke afstande ser terningen på figur 16 da realistisk ud? Besvar det samme spørgsmål for terningen på figur 15.
- På figur 16 danner terningens sider en vinkel på  $45^\circ$  med billedplanen, så de to forsvindingspunkter faktisk er distancepunkterne. Begrund dette. Find dernæst beliggenheden af hovedforsvindingspunktet og bestem distancen for figur 16. Sammenlign med svaret på det foregående spørgsmål.
- Det kræver en smule mere opfindsomhed at finde distancepunkterne og distancen på figur 15, men prøv alligevel!

## Afsnit 5. Konstruktion af perspektivtegninger i praksis

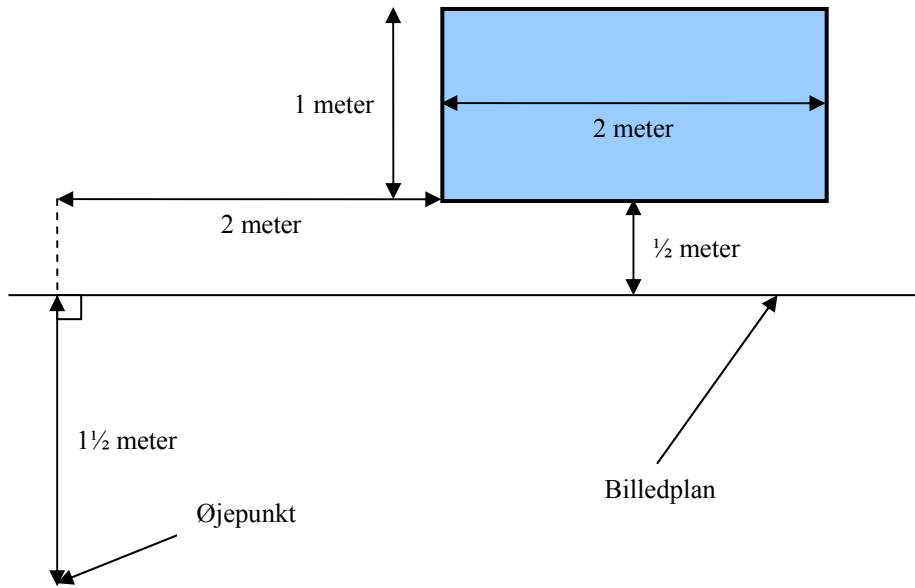
Alberti anviste som omtalt i afsnit 2 en praktisk anvendelig metode til konstruktion af perspektivtegninger efter mål. Denne metode skal her i en tillempet udgave anvendes til at konstruere et billede i centralperspektiv af en kasse, der er 2 meter lang, 1 meter høj og 1 meter dyb. Kassen ønskes tegnet i frontperspektiv, så afstanden mellem dens forside og billedplanen er  $\frac{1}{2}$  meter. Distancen skal være  $1\frac{1}{2}$  meter og øjepunktet placeres 2 meter over kassen bund og 2 meter til venstre for kassens venstre ende.

For lettere at holde styr på alle disse oplysninger er der først tegnet henholdsvis en plantegning og en snittegning på figur 17 og 18. Alle tegningerne er udført i korrekte størrelsesforhold, men er naturligvis formindsket af praktiske grunde.

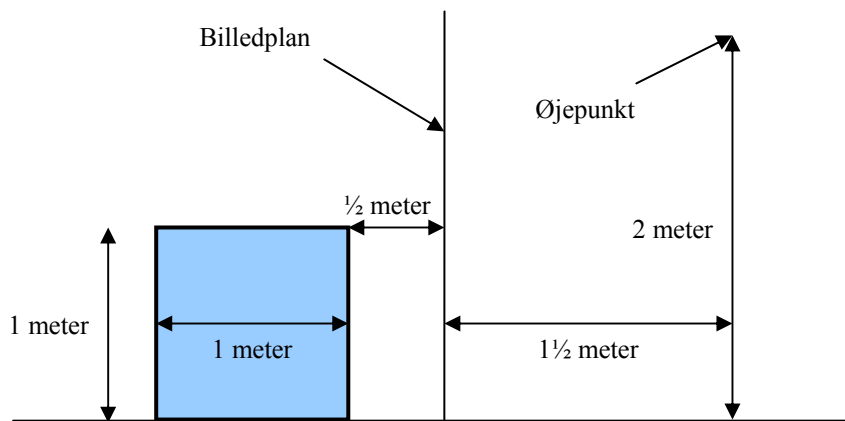
Ud fra disse to tegninger skal det perspektiviske billede nu konstrueres.

Andet trin i konstruktionen er at indtegne synsstrålerne fra øjepunktet og til kassens hjørner på grundplanen og dernæst markere synsstrålernes skæringspunkter med billedplanen; dette er vist på figur 19. For lettere at kunne holde rede på, hvor synsstrålerne skærer billedplanen, er denne på figur 19 tegnet som en tallinje med nulpunkt i hovedforsvindingspunktet (altså ud for øjepunktet).

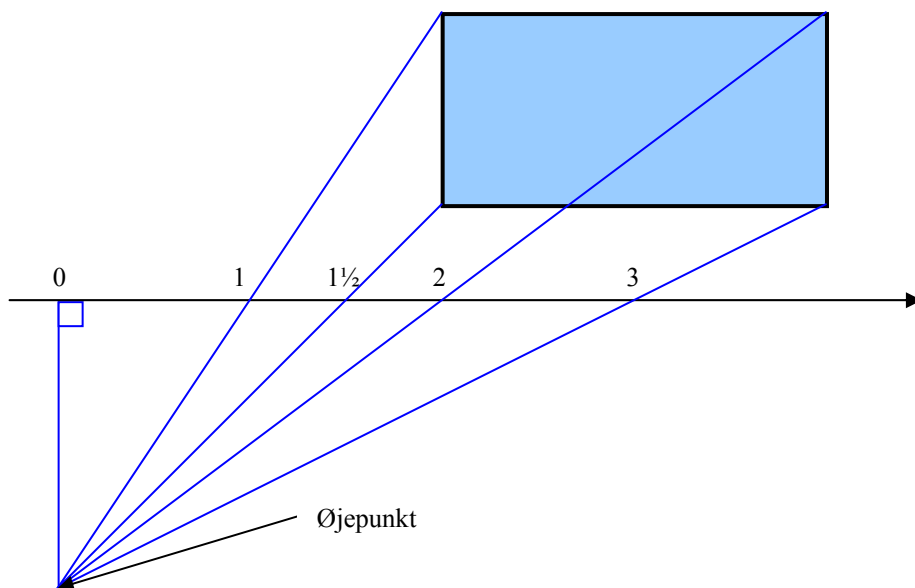
Helt tilsvarende er gjort med snittegningen på figur 20.



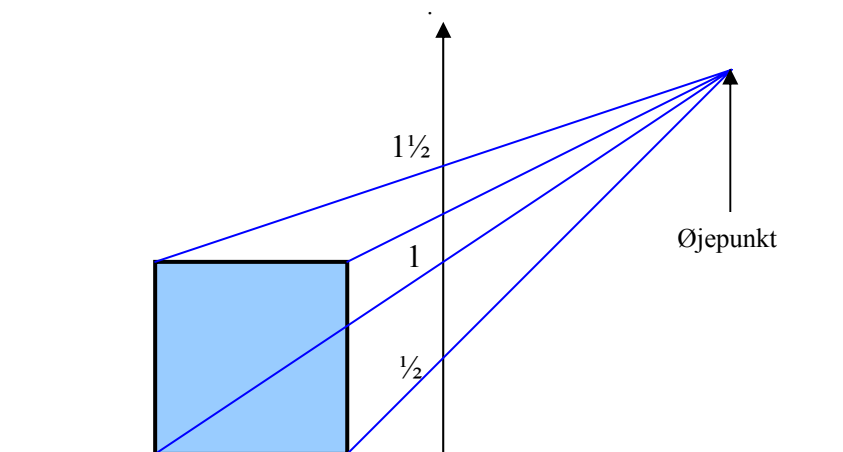
Figur 17.



Figur 18.

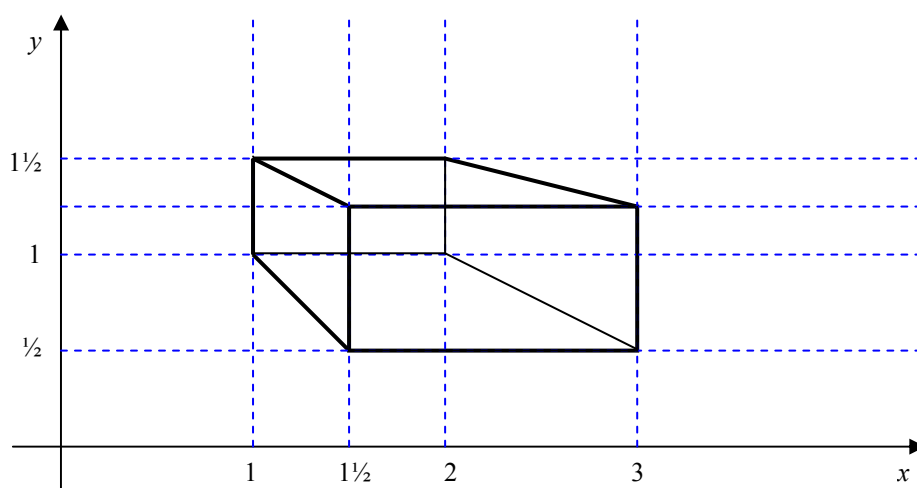


Figur 19.



Figur 20.

Sidste trin i konstruktionen består nu i, at tegne et koordinatsystem, hvor  $x$ -aksen er tallinjen fra plantegningen på figur 19 og  $y$ -aksen er tallinjen på figur 20. Gennem markeringerne på akserne trækkes dernæst lodrette og vandrette hjælpelinjer, hvorefter billedet af kassen let kan færdiggøres ved sammenligning med figur 19 og 20.



Figur 21.

Man var ikke begyndt at bruge koordinatsystemer på Albertis tid, så han fandt i stedet skæringspunkterne mellem synsstrålerne og billedplanen ved hjælp af ensvinklede trekantede. Som det fremgår af figur 21 giver metoden anledning til et helt net af hjælpelinjer. Ved restaureringer af blandt andet Massacios fresko „Treenigheden” har man da også fundet et fintmasket net af hjælpelinjer bag den påførte farve.

- Find hovedforsvindningspunktets beliggenhed på figur 21. Stemmer den overens med teorien i afsnit 4?
- Benyt metoden til at konstruere et perspektivisk korrekt billede af et bord i både front- og skråperspektiv. Bordet er 75 cm højt og bordpladen er rektangulær med målene 100 cm  $\times$  150 cm. Vælg selv placeringen af billedplan og øjepunkt.

## Afsnit 6. Centralperspektivet og illusionskunst

Især i barokken benyttede man i stor stil centralperspektivet til illusionistisk maleri. Et af de mest berømte eksempler herpå er en fresko i kirken Sant Ignazio de Loyola i Rom skabt af *Andrea Pozzos* (1642-1709). På fresken „Den hellige Ignatius’ apoteose” ser man Den Hellige Ignatius modtage forkyndelsens lys fra Kristus og give det videre til de fire verdensdele, der findes personificeret i skinarkitekturens attikaetage (se figur 22); fresken er malet på kirkeskibets loft.

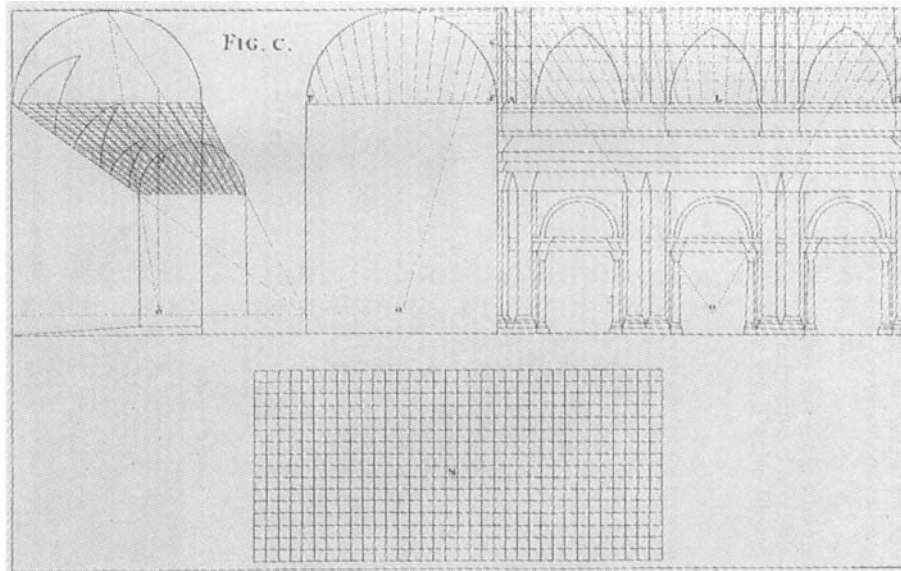


*Figur 22.*

Fresken er konstrueret, så den skal ses fra en bestemt flise i gulvet. Set herfra forsvinder forskellen mellem den malede og den virkelige arkitektur fuldstændigt, og der skabes en illusion af en kuppel gennemstrømmet af lys. Billedet er malet i centralperspektiv, men i modsætning til de øvrige eksempler i disse noter med *vandret* billedplan. Det korrekte øjepunkt findes naturligvis på den omtalte flise, og billedets forsvindingspunkt er Guds Søn!

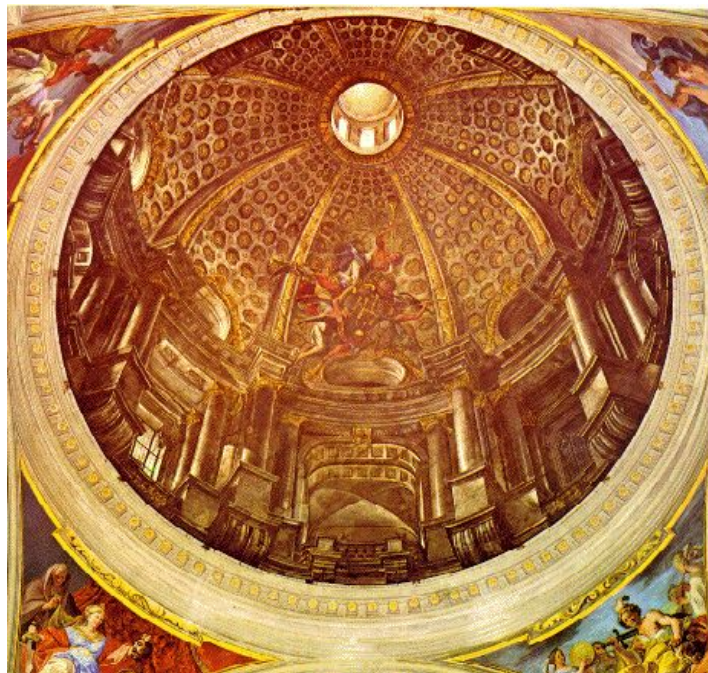
For at skabe en sådan illusion har det naturligvis været nødvendigt med et omfattende net af hjælpelinjer. Pozzo forklarer i sit tobindsværk „*Prospettiva de pittori e architetti*” – perspektiv i malerkunsten og arkitekturen – hvilken teknik han har anvendt. Først lavede han en detaljeret tegning af den falske arkitektur og overførte den til et kvadreret net. Dernæst hængte han et tilsvarende net af tråde op lige under det hvælvede loft i kirkeskibet. Ved at

trække en tråd fra øjepunktet gennem det udspændte netværk kunne han projicere nettet op på loftet. På figur 23 er vist en tegning fra Pozzos bog, der illustrerer metoden.



*Figur 23.*

I samme kirke har Pozzo skabt en malet kuppel over korskæringen; set fra et bestemt punkt i hovedskibet skabes også her en perfekt illusion af en virkelig kuppel. Oprindeligt var det meningen, at kirken skulle have haft en virkelig kuppel, men dominikanermunkene i naboklostret klagede over, at den ville tage lyset i deres bibliotek. Pozzo løste problemet hurtigt og billigt med sin malede kuppel! Den illusionistiske kuppel er gengivet på figur 24.



*Figur 24.*

Denne form for meget virkelighedstro maleri omtales ofte som *trompe l'oeil* (af fransk: Illusion eller sansebedrag, egentlig „narrer øjet”).

## Afsnit 7. Analysemodel for billeder

Når man skal undersøge et billedes komposition er det væsentligt at gøre sig klart, hvilke perspektiviske teknikker og hjælpemidler maleren har benyttet i billedet. De følgende spørgsmål skal tjene som en hjælp ved denne afklaring.

- 1) Overvej, om billedet er udført perspektivisk korrekt eller om der eksempelvis er benyttet betydningsperspektiv.

Analysen skal kun fortsættes, hvis billedet er udført perspektivisk korrekt.

- 2) Undersøg, om lodrette linjer i billedplanen er tegnet lodrette. Er billedet udført med lodret billedplan?
- 3) Undersøg om der findes vandrette linjer parallelt med billedplanen. Er billedet udført i frontperspektiv eller i skråperspektiv?
- 4) Bestem hovedforsvindingspunktets og horisontens beliggenhed. Er billedet udført i isokefalisk perspektiv?
- 5) Findes der vandrette linjer i motivet, der danner en vinkel på  $45^\circ$  med billedplanen? Bestem i bekræftende fald distancepunkternes beliggenhed og distancen.

Når punkt 2) til 5) af analysen er udført, bør man overveje, hvorfor billedet er bygget op som det er. Malerne lader vælger ofte synsvinklen således, at billedet hovedperson eller centrale handling findes i hovedforsvindingspunktet (hvor alle linjer i billedet jo mødes). Således er det givet et meget bevidst valg fra Pozzos side, at billedet på figur 22 har forsvindingspunkt i Kristus. Man kan også se andre måder, hvorpå det valgte perspektiv understøtter billedets budskab.

- 6) På hvilken måde indgår det valgte perspektiv i billedets komposition?
- 7) Indgår det gyldne snit i billedets komposition? (undersøg ved måling forholdene)

Materiale til ”Skabt til at skabe” med udgangspunkt i  
**Bjørn Grøn: Det gyldne snit og Fibonacci-tallene**

*På emu.dk.*

### **Det gyldne snit og perspektiv.**

#### **Forudsætninger: .**

- Grundlæggende symbolmanipulation, herunder kvadratsætninger.

#### **Mål:**

Faglige mål:

- At arbejde med matematisk ræsonnement.
- At arbejde med et anvendelses orienteret og historisk forløb.

Kompetencemæssige mål:

- At lære redskaber til det gode gruppearbejde
- logbogsskrivning

#### **Forløbet:**

1. Præsentation af emnet med vægt på det gyldne snit.
2. Grupperne arbejder og forventes at have nået til og med øvelse 6.2 i løbet af de første tre lektioner.
3. Fælles samling:
  - a. Afklaring af eventuelle spørgsmål
  - b. Intro til arbejdet med perspektiv.
4. Grupperne arbejder videre og tager hurtigt fat på afsnittet om perspektiv og opgaverne formuleret til aflevering i AT.

Hver gruppe afleverer en **rapport i matematik i uge 40**. Rapporten skal indeholde:

- en præsentation med dine egne ord af, hvad det gyldne snit er i kunst, arkitektur mv., og hvad det har med matematik at gøre.
- løsning af øvelserne om det gyldne snit til og med øvelse 6.2 **Der skal være tydelige forklaringer på, hvad der sker – altså mange mellemregninger.**
- Inddrag konkrete eksempler på, hvor det gyldne snit bliver anvendt. Kig f. eks på forskellige landes flag, jeres billeder fra AT forløbet, reklamer eller genstande fra jeres dagligdag.

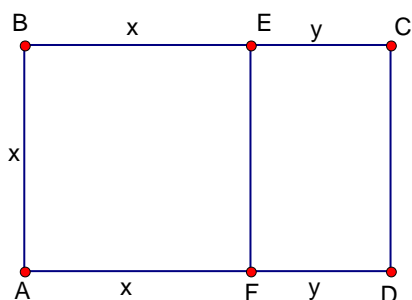
## Det gyldne snit

1. Du opsøger selv via leksika, fagbøger eller Internet informationer om »det gyldne snit« Du skal have sat dig ind i det på en sådan måde, at du med egne ord kan give en mundtlig og skriftlig fremstilling af det.
2. Den følgende matematiske del om det gyldne snit er bygget op gennem øvelser, som du selv arbejder igennem. En øvelse begynder med, at der står ØVELSE NR..., og den slutter med, at der er angivet  $\square$ . I hver øvelse er der spørgsmål, du skal svare på, eller udregninger, du nærmere skal redegøre for.

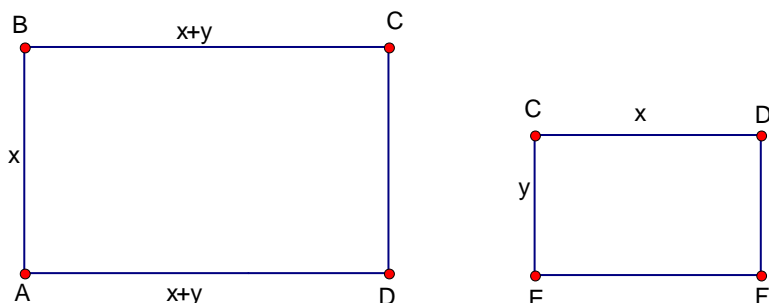
Ind imellem øvelserne er der givet definitioner og anført forskellige bemærkninger.

### DEFINITION

Et rektangel  $ABCD$  kaldes et *gyldent rektangel*, hvis det opfylder følgende:  
Når vi skærer et kvadrat  $ABEF$  væk, så får vi et nyt rektangel  $ECDF$ ,



som er *ligedannet* med det store rektangel  $ABCD$ :



### **BEMÆRKNING.**

Når rektanglerne er ligedannede gælder

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}, \quad (1)$$

dvs. forholdet mellem den lange og den korte side er ens for de to rektangler.

### DEFINITION

I et gyldent rektangel kaldes forholdet mellem den lange side og den korte side for *det gyldne snit* og betegnes med det græske bogstav  $\Phi$  (udtales »phi« eller »fi«), dvs.

$$\Phi = \frac{x}{y} \text{ (eller } \Phi = \frac{x+y}{x} \text{)}.$$

## ØVELSE 1

(Beregning af det gyldne snit)

Gør nøje rede for hvert skridt i det følgende:

Formel (1) omskrives til  $xy + y^2 = x^2$  eller  $x^2 - xy - y^2 = 0$ .

$$\text{Ligningen omskrives videre til } \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0. \quad (2a)$$

Læg mærke til at det ikke er  $x$  eller  $y$ , men derimod forholdet  $\frac{x}{y}$ , som er det gyldne snit, og som vi

er interesseret i at beregne.  $\frac{x}{y}$  er altså den ukendte størrelse og findes som en løsning til

$$\text{andengradsligningen } z^2 - z - 1 = 0. \quad (2b)$$

Vis ved at anvende grafregnerens solve-funktion, at løsningen er  $z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Vær opmærksom på, at grafregneren skriver det lidt anderledes.

NB : På Ti 89 anvendes F2: algebra. Vælg her 1: solve, Indskriv ligningen således :  
Solve( $x^2 - x - 1 = 0$ , x). Bemærk variabelnavnet er udskiftet for at lette indskrivningen.

$$\text{Heraf kan vi konkludere: Det gyldne snit er lig med } \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618... \quad (3)$$

□

## ØVELSE 2

Den anden løsning betegnes af og til  $\Phi'$ . Med denne betegnelse har vi altså, at

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ og } \Phi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ er løsningerne til andengradsligningen } z^2 - z - 1 = 0.$$

Redegør for at der gælder, at  $\Phi + \Phi' = 1$  og  $\Phi \cdot \Phi' = -1$ .

Hint : Brug brøkretneregler.

□

## ØVELSE 3

Hvis et gyldent rektangel har siden  $x$  som den lange side og siden  $y$  som den korte side, så er

$$\Phi = \frac{\text{den lange side}}{\text{den korte side}} = \frac{x}{y} \quad (4)$$

Indsæt i  $\Phi \cdot \Phi' = -1$  og vis, at  $\Phi' = -\frac{\text{den korte side}}{\text{den lange side}} = -\frac{y}{x}$ . (5)

Redegør også for at  $\Phi' = -\frac{x}{x+y}$ .

□

#### **ØVELSE 4**

*(Tilnærmet konstruktion af det gyldne snit)*

Læg linjestykkerne i forlængelse af hinanden:



Vi ønsker at finde ud af, hvor stor en del  $x$  udgør af hele længden  $x + y$ .

Vis at svaret på dette er  $-\Phi'$  eller tilnærmet 0,618...

Dvs.  $x$  udgør ca. 62 % af hele linjestykket. Vi skal således udmåle 62 % af linjestykket og dér afsætte et mærke, når et linjestykke skal deles i et forhold som det gyldne snit. Vi kan naturligvis måle ud fra hvert endepunkt, så der bliver to gyldne snit på en linje.

□

#### **ØVELSE 5.1**

Hvordan skal man dele et linjestykke på 20, således at de to stykker kan udgøre siderne i et gyldent rektangel?

□

#### **ØVELSE 5.2**

Vi har givet et linjestykke på 12. Vi ønsker at dette skal udgøre den korte side i et gyldent rektangel. Hvor stor skal den lange side være?

□

Bemærk at udtrykket  $\Phi = \frac{\text{den lange side}}{\text{den korte side}}$ , der gælder for et gyldent rektangel, kan omskrives til den korte side  $\cdot \Phi = \text{den lange side}$ .

#### **ØVELSE 5.3**

Vi ønsker at lave et gyldent rektangel med areal 40. Hvor lange skal siderne være?

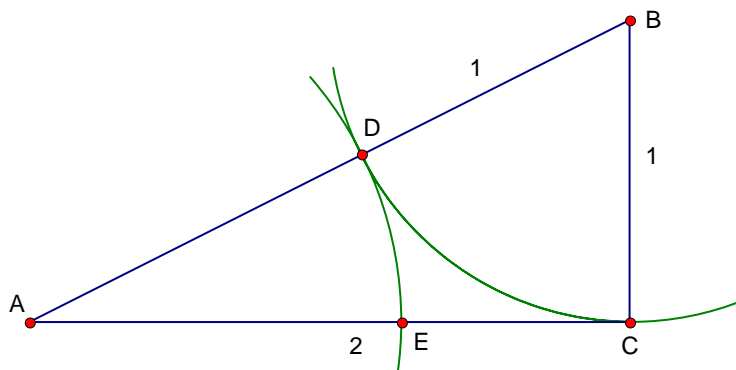
□

#### **ØVELSE 6.1**

*(Eksakt konstruktion af det gyldne snit)*

(Bemærk: Dette er den geometriske konstruktion svarende til beregningerne i øvelse 5.1.)

Konstruér en retvinklet trekant, hvor den længste katete er 2 (enheder), og den korte katete er 1 (enhed) – se figuren.



Med en passer konstrueres en cirkel med centrum i  $B$  og radius  $|CB| = 1$ .

Skæringspunktet med  $AB$  kaldes  $D$ .

Med passeren tegnes en cirkel med centrum i  $A$  og radius  $|AD|$ .

Skæringspunktet med  $AC$  kaldes  $E$ .

Udregn først  $|AB|$  ved at betragte trekant  $ABC$ .

Derefter udregnes  $|AD|$ . Overvej nu længden af  $|AE|$ .

Vis nu at  $\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$ .

Vis at dette kan omskrives til  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , dvs. det er lig med tallet  $\Phi$ . Dette kan f.eks. gøres ved at forlænge brøken med  $1+\sqrt{5}$  - eller ved at sætte de to udtryk lig hinanden og bruge passende reduktioner til et entydigt sandt udtryk fremkommer.

Konklusion: Konstruktionen med de to cirkelbuer deler  $AC$  i det gyldne snit.

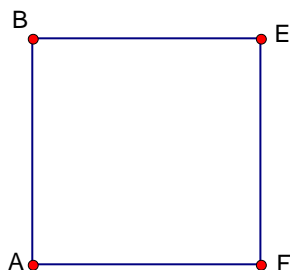
□

### ØVELSE 6.2

(Geometrisk konstruktion af et gyldent rektangel ud fra et givet kvadrat)

(Bemærk: Dette er den geometriske konstruktion svarende til beregningen i øvelse 5.2.)

Vi har givet et kvadrat med sidelængde  $x$

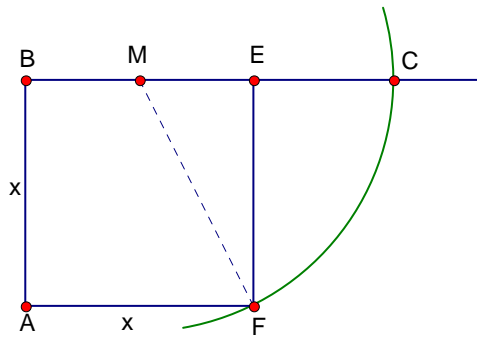


og ønsker at konstruere et rektangel  $ABCD$ , som er et gyldent rektangel.

Lav følgende konstruktion (se tegningen):

$BE$  halveres, og vi finder midtpunktet  $M$ . Med  $M$  som centrum og  $|MF|$  som radius tegnes en cirkel.

Denne cirkel skærer forlængelsen af  $BE$  i et punkt  $C$ .



Påstand: Siden  $BC$  er nu den lange side i et gyldent rektangel, hvor siden  $AB$  er den korte side, dvs. rektanglet  $ABCD$  er gyldent, hvor  $D$  findes på forlængelsen af  $AF$ .

Bevis påstanden, dvs. bevis følgende at  $\frac{|BC|}{|BA|} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$ .

Hint : Lad  $|BM|$  have længde 1. Hvor lang er så  $|MF|$  og dermed  $|MC|$  ?

Bestem så  $|BC|$  og udregn til slut forholdet ovenfor.



NAVN:

## Rapport nr. 2. Det gyldne snit

Rapporten skal handle om det gyldne snit og anvendelser af dette.

I det *første afsnit* om det gyldne snit skal I forklare med egne ord, hvad det gyldne snit er.

I det *andet afsnit* om det gyldne snit, skal I arbejde med teorien omkring det gyldne snit

I det *tredje afsnit* om det gyldne snit, skal I inddrage egne eksempler på anvendelser af det gyldne snit.

### A : PRÆSENTATION AF DET GYLDNE SNIT

- Giv en præsentation i egne ord af, hvad det gyldne snit er i kunst, arkitektur mv.
- Forklar, hvad anvendelserne har med matematik at gøre

### B : EGENSKABER VED DET GYLDNE SNIT

- Løs øvelserne om det gyldne snit fra materialet anvendt til AT-forløbet "Skabt til at skabe".  
Besvarelsen skal indeholde øvelserne til og med øvelse 6.1  
Der skal være tydelige forklaringer på, hvad der sker i de enkelte udregninger.
- Lav en opsamlende liste over hjælpesætninger som anvendes i materialet, f.eks. parentesregler, brøkregler eller andet. Skriv en lommeregnerforklaringer, hvor denne anvendes.

### C: ANVENDELSER AF DET GYLDNE SNIT

- Beskriv konkrete eksempler, hvor det gyldne snit bliver anvendt. F. eks kan inddrages materialet fra AT-forløbet, forskellige landes flag, reklamer eller genstande fra jeres hverdag.
- Tegn et rektangel og indtegn det gyldne snit ved hjælp af konstruktionsmetoden fra teorien.



## 7. De store opdagelser og navigation.

I løbet af 1400-tallet begyndte specielt portugiserne og spanierne at rejse over de store have. Der var mange bevæggrunde for disse rejser, og kulturmøderne mellem de europæiske magter og de indfødte i de såkaldte nyopdagede områder fik store konsekvenser. Dette forløb har til formål at belyse dels dette, dels den teknologiske udvikling og det ændrede syn på verden i Europa, som gjorde de store opdagelser muligt.

Dermed beskrives et af de store teknologiske/naturvidenskabelig brud.

Forløbet kan således belyse De store opdagelser og navigation med to forskellige fakulteters empiri, teori og metode.

Et muligt progressionstema kunne være individet i forhold til autoriteter, her den katolske kirke.

**Fag: Fy, ma, hi**

### Mål: Metodiske

Eleverne skal oparbejde kompetencer i at

- Samarbejde med hinanden
- formulere faglige problemstillinger
- planlægge eksperimenter og behandling af måleresultaterne.
- formidle resultaterne hensigtsmæssigt
- udforme en synopsis (der bl.a. kan udformes gruppevis i projekttimerne – se krav til eleverne)
- benytte matematikken til at behandle problemstillinger i samarbejde med andre hovedområder, her til beskrivelse af navigationen.

### Mål: Faglige

Eleverne skal

- Planlægge en fiktiv navigation med brug af astronomiske navigationsinstrumenter.
- indsamle data vha. observationer
- udføre bestikregning (trigonometriske beregninger)
- opstille en matematisk model til beskrivelse af forhold på jordkloden – herunder elementær geometri og sejlads over små afstande.
- Læse og forstå tekster om matematik – her kildetekster om matematiske navigationsberegninger.

### Mål: Fællesfaglige

- Arbejde med to forskellige fakulteters empiri, metode og teorier på samme ”sag” – giver konkret indblik i forskelle mellem to af fakulteterne.
- Individ i forhold til autoriteter (mennesket er skabende og i centrum (progressionstema). I denne sammenhæng er autoriteten den katolske kirke.
- At opnå kendskab til et af de store teknologiske /naturvidenskabelige brud: renæssancen og dens ændrede tilgange til beskrivelse af verden.

### Tidsforbrug

5 timer i matematik, 6 i fysik (selv målingerne og behandlingen af disse kan ligeledes flyttes til matematik). Altså 11 i alt. Dertil histories del, samt 2 timer til læsning af AT-faglige artikler i f. eks Gyldendals AT-bog.

Med fremlæggelser og synopsis skrivning: 25-27 AT-timer.

## Forudsætninger

Def. af sinus og cosinus i den retvinklede trekant, enhedscirklen, ensvinklede trekanter, ”gange over kors”- reglen(regula detri)

## Materialer:

Bestikregning:

[http://www.geomat.dk/opdagelser\\_og\\_navigation/opdagelser/projektoplaeg/bestikregning.htm](http://www.geomat.dk/opdagelser_og_navigation/opdagelser/projektoplaeg/bestikregning.htm)

Kildetekst til bestikregning:

[http://www.geomat.dk/opdagelser\\_og\\_navigation/opdagelser/projektoplaeg/navig\\_bog\\_22\\_eks1.htm](http://www.geomat.dk/opdagelser_og_navigation/opdagelser/projektoplaeg/navig_bog_22_eks1.htm)

Platte og voksende kort:

[http://www.geomat.dk/opdagelser\\_og\\_navigation/opdagelser/projektoplaeg/platte\\_voxende.htm](http://www.geomat.dk/opdagelser_og_navigation/opdagelser/projektoplaeg/platte_voxende.htm)

Film: Navigationens historie:

Tilrettelæggelse: Søren Thirslund & Hans Jeppesen, DR2 2001. varighed: 25 minutter.

Om navigationens udvikling fra vikingetidens solkompass op til vor tids elektronisk styrede supertankere. Navigationsinstrumenterne demonstreres og samtidig fortælles teorien bag instrumenternes konstruktion. Dybdemåling ved hjælp af lodskud demonstreres, ligesom forskellige metoder til fartmåling vises

Om navigation og kuglen som matematisk model:

[http://www.geomat.dk/opdagelser\\_og\\_navigation/opdagelser/projektoplaeg/Navigation\\_rev04.htm](http://www.geomat.dk/opdagelser_og_navigation/opdagelser/projektoplaeg/Navigation_rev04.htm)

Vejledninger til astronomiske navigationsinstrumenter:

[http://www.geomat.dk/opdagelser\\_og\\_navigation/instrumenter.html](http://www.geomat.dk/opdagelser_og_navigation/instrumenter.html)

## Arbejdsformer

Kombination af klasseundervisning og projektor organiseret emnearbejde. Eleverne formulerer problemstillinger fra alle fag (gerne en problemstilling, som alle fag kan give bud på), planlægger en navigationsundersøgelse og analyserer/vurderer data. Eleverne arbejder i grupper, valgt efter inddeling i særemner i historie (forskellige opdagelsesrejser: Portugisernes oversøiske handelsimperium, Spanierne i Sydamerika, Columbus rejser, Danmark som søfartsnation og James Cook i Stillehavet.). Ved fremlæggelserne får eleverne således et bredt billede af vigtige opdagelser i en 300-årig periode. Det skaber et kronologisk overblik.

Der kan udarbejdes en synopsis, som fremlægges ved et kort mundtligt oplæg.

## Plan over forløbet

- 5) Intro til forløbet og film (2t)
- 6) Introduktion til navigationsinstrumenterne og kort af prøvning (1 t)
  - i) Eleverne skal i små grupper planlægge et forsøg – mindst to instrumenter skal indgå. (1 t).
- 7) Eleverne skal indsamle og behandle data, herunder (5 t)
  - i) udarbejde måleusikkerhed (inddrag viden om spredning fra matematik)
  - ii) Overveje fremstilling af materialet
  - iii) Udføre konkrete bestikregninger på baggrund af målte vinkler.
- 8) Eleverne skal læse kildetekster om beregning af afstande på baggrund af voksende/platte kort (2t)
- 9) Udarbejdelse af synopsis (3t)
- 10) Fremlæggelse (2t)

For histories del se nederst i dokumentet.

### **Krav til eleverne**

- 2) I skal planlægge en navigation til et givent sted. I kender udgangspunktets bredde og længde grad.  
Forslag til undersøgelser:
  - a) Hvordan måles solhøjden ved Zenit
  - b) Hvordan navigere man på den sydlige halvkugle og hvis der er dårligt vejr/mørkt?
  - c) Hvordan beregnes afstande, når man ikke sejler på storcirkler?
- 3) Data skal præsenteres på relevant vis.
- 4) Overvej om forsøgene er reproducerbare. Altså om kravene til naturvidenskabelig metode er opfyldt.
- 5) I skal udføre mindst en beregning af den forandrede bredde og afvigningen (bestikregning)
- 6) I skal sammenligne med relevante historiske kilder og inddrage disse i forståelsen for navigationens betydning. Mindst to kilder skal kildekritisk analyseres.
- 6) Formulere problemstillinger i emnet jf. ovennævnte og producere en synopsis. Denne skal fremlægges mundtligt.

### **Kommentar:**

I historie kan man f. eks bruge følgende materiale:

Ulrik Grubb m.fl. : Overblik. Verdenshistorien i korte træk. Gyldendal 2005 s. 68-79:

Renæssance og menneskesyn (arbejdsspørgsmål) – 1 time

Ulrik Grubb m.fl. : Overblik. Verdenshistorien i korte træk. Gyldendal 2005. 80-89:

De store opdagelser (arbejdsspørgsmål) – 1 time

Thomas Oht: De store opdagelser s. 10-23 (verdenskort, skibstyper, navigation, rejsebeskrivelser) – 2 timer

Flemming Kildgaard Madsen /Henrik Skovgaard Nielsen: Opdagelserne s. 24-31 (korttegnning og verdensopfattelse)

## 8. Galilei

Forløbet er tænkt som et 1.g-forløb. Det lægger op til en behandling af ”Den Naturvidenskabelige Metode”, som jo blev udviklet af bl.a. Galilei.

### AT-mål:

- Demonstrere kendskab til, hvorledes der med udgangspunkt i et givet emne kan stilles spørgsmål til forskellige fag.
- Skriftlig formidling i form af en rapport.

### Mål, metodiske:

- Opnå indsigt i, hvorledes den naturvidenskabelige metode er hængt op på matematik (bl.a.)
- Opnå kendskab til modelbegrebet og modellering i fysik.

### Mål, faglige:

- Anvende simple geometriske modeller og håndtere simple geometriske problemstillinger
- Lave regression på Excel i forbindelse med Galileis faldrendeforsøg.
- Introduktion til funktioner/parabler/potenssammenhænge
- Fysiks bidrag: Verdensbilledets udvikling, Modeller af verden. Galileis rolle i striden mellem geocentrisk og heliocentrisk verdensbillede, Den naturvidenskabelige metodes brug til at udtale sig om ”sandheden”
- Danks bidrag: Argumentationsanalyse
- Religions bidrag: Religion og samfund, religionernes virkning i historien.

### Deltagende fag

Matematik, fysik, dansk og religion

### Tidsforbrug:

- 5 timer til ren matematik, AT-forløbet er vel på 15-20 timer.

### Faglige forudsætninger i matematik:

- Det er godt at have kendskab til lineære funktioner – blot for at kunne sammenligne.

### Materiale:

- Materiale om observation af Venus af Mogens Winther: <http://www.ags.dk/as/venus/ven-dist.htm> (på engelsk).
- Almindeligt grundbogsstof om regression, parabler eller evt. potensfunktioner.
- Morten Brydensholt m.fl.: ”Orbit C”. Systime, 1.udgave, 3. oplag 2005. Kapitel 8.
- Uddrag af Bertolt Brecht: ”Galileis liv”. (”Galilei i Firenze”). Litteratur i udvalg, bind 4, Gyldendal side 35- 42.
- Tekster af Aristoteles. Fx tekst 10, 11 og 13 fra Lars Bluhme et al.: ”Den historisk-filosofiske dimension i fysikundervisningen”. 1988.
- Casper Andersen & Anders Munk Jensen: ”Videnskab og religion i historisk perspektiv”, Systime. Kapitel 2: ”Galileiaffæren”. (religion).
- Keld B. Jessen (red.): ”Indsigt og udsyn. Grundbog til almen studieforbereelse.” Systime, 1. udgave, 1.oplag, 2005. Kapitel 3 om naturvidenskab og kapitel 8 om renæssancen.

- Flemming Clausen et al: ”Analytisk geometri og funktioner”. Munksgaard, 1.udgave, 3. oplag 1995. Kapitel 2 om naturbeskrivelse og matematik.

### **Arbejdsformer/ forløb:**

- Særfaglig introduktion, 3-4 timer i fysik & matematik, (matematik samarbejder meget tæt med fysik), lærerstyret arbejde med faldrenden, det frie fald og Venusobservationerne.
- Besvarelse af nedenstående opgave i grupper.

### **Forslag til arbejdsopgave:**

Eleverne arbejder i grupper og besvarer nedenstående opgave skriftligt

- Redegør for udviklingen i den naturvidenskabelige erkendelse i det 16. og 17. århundrede. I skal her inddrage Galileis faldrendeforsøg, Venusobservationerne og det frie fald
- Opstil og besvar 2 spørgsmål til verdensbilleder, som repræsenterer de to fakulteter naturvidenskab og humaniora. Reflekter over hvorledes de to fakulteter hver især kan bidrage til forståelsen.

---

### **Forslag til støtteopgave i den lærerstyrede del af forløbet:**

#### **Opgave: Solen eller Jorden i centrum? Galileis observationer af Venus.**

Læs materialet om observation af Venus. Det er jeres opgave at forklare, hvorledes Galilei kunne vise, at Venus bevæger sig omkring Solen og ikke Jorden. Lav gerne lyspæredemonstrationen for klassen.

Det er vigtigt for jeres forståelse af problemet, at I først overvejer følgende:

En planet, der bevæger sig i en bane tættere på Solen end Jorden, hedder en indre planet (Merkur og Venus). De øvrige er ydre planeter. Når vi fra Jorden observerer en planet, er det genskæret fra Solens lys, vi ser. Overvej om indre og ydre planeter opfører sig ens m.h.t. at have faser.

Link til applet, der viser Venus' faser:

[http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/more\\_stuff/flashlets/PhasesofVenus.htm](http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/more_stuff/flashlets/PhasesofVenus.htm)

## Bilag 1: Behandling af faldrendeforsøget i Excel

Målingerne fra Stenomuseet i går så således ud:

Klik nummer	1	2	3	4	5	6
Antal afstandsstykker	1	4	9	16	25	36
Afstand (cm)	8	32	72	128	200	288
tid	0,78	1,33	2,16	2,88	3,31	4,22

Først skal I have dem tastet ind i Excel. Jeg foreslår at I blot taster dem ind som de står her. Evt. kan I kopiere ovenstående tabel, der er at finde på Agora. I det følgende regner jeg med, at data står i cellerne A1 til G4.

Vi skal have argumenteret for, at **afstanden** er proportional med **tiden i anden**. Det gør vi i første omgang ved at dele alle afstande med deres tilhørende tider sat i anden. Så I stiller jer i celle b5 og taster  $=b3/b4^2$ . Nu står der 13,14924 i b5, ikke sandt? Kopier formlen vandret hen til celle g5. (Gøres ved hjælp af det lille sorte kryds, som man trækker med musen) Er tallet i 5. række konstant? Næsten...

Hvis vi skal være lidt mere overbeviste om, at **afstanden** er proportional med **tiden i anden**, må vi lave en graf, hvor vi har tiden i anden på 1.aksen og afstanden på 2.aksen.

Opskrift:

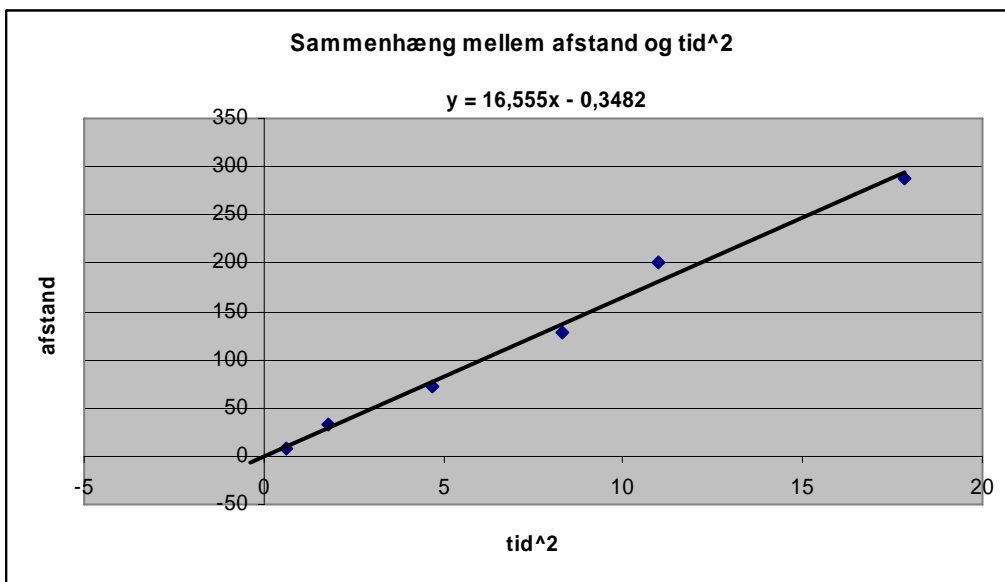
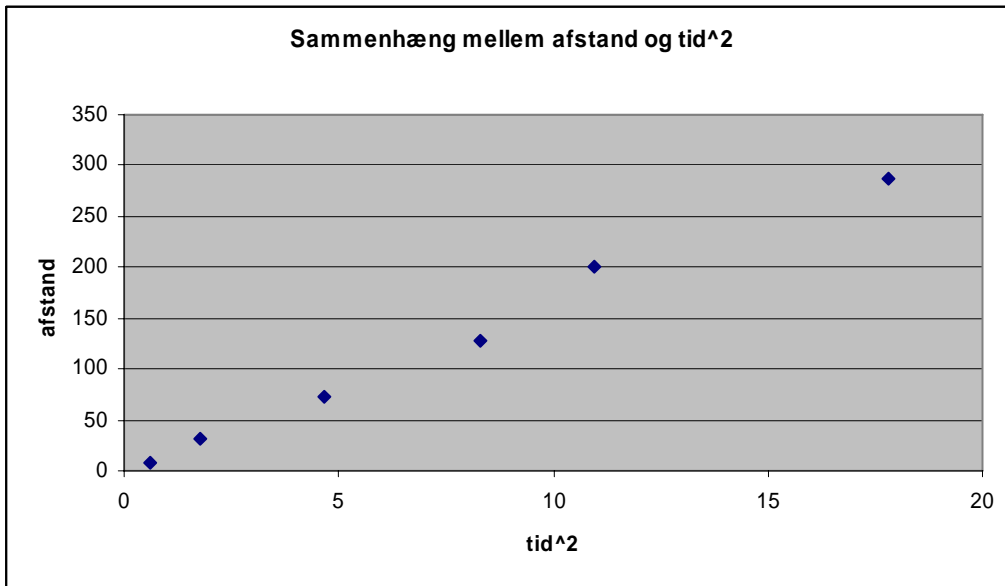
- Stil dig i celle b6 og tast  $=b4^2$ . Der står nu 0,6084! Kopier formlen hen til g6.
- Kopier række 3 ned til række 7 (så afstanden står efter tiden i anden)
- Marker de to rækker, dvs. nr. 6 og 7
- Klik på guiden-diagram-ikonon, og vælg XY (scatter)
- Vælg den første sub-type, klik "næste"
- Jeres data er i rækker allerede, så vælg næste
- Giv diagram og akser navne
- Og bed om at få diagrammet ind i samme ark som tabellen.

Nu får I et diagram, der ser ud som diagrammet øverst på næste side, ikke sandt?

Højre-klik nu på et af punkterne i diagrammet, og indsæt en tendenslinie, der skal være lineær. Bed også om at få ligningen for tendenslinien frem. Dette gøres under Indstillinger og "vis ligning". Lav også en prognose lidt tilbage (f.eks. 2 enheder), så I får en skæring med 2.aksen frem.

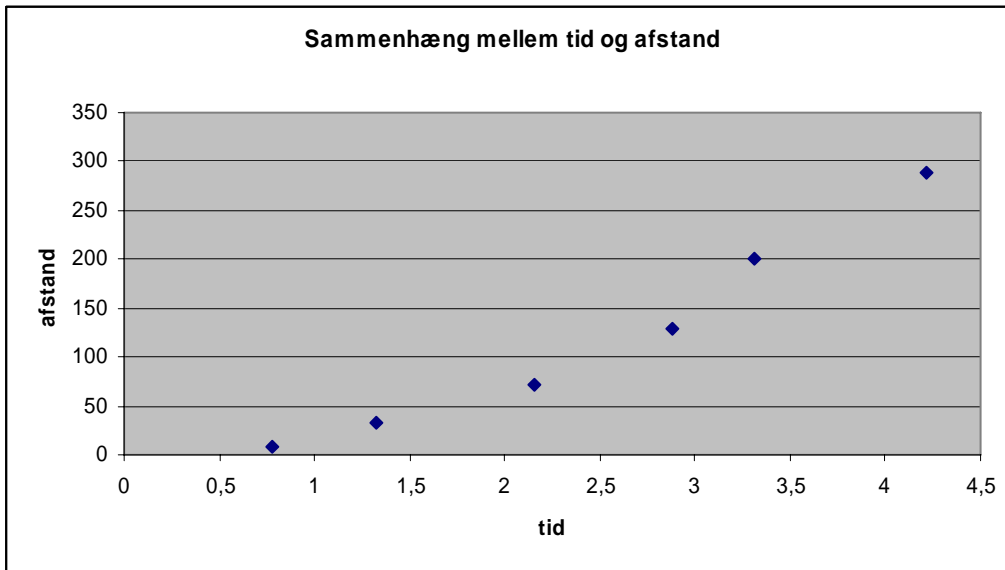
Diagram nr. 2 på næste side viser resultatet.

**Er der tale om en proportionalitet?**



Vi vil jo gerne argumentere for, at afstanden =  $k \cdot \text{tiden}^2$ , hvor  $k$  er en konstant. Af ovenstående graf ses, at  $k$  er 16,555. Men det kan vi også argumentere for, hvis vi blot har tiden på 1.aksen (og altså ikke tiden i anden) og afstanden på andenaksen.

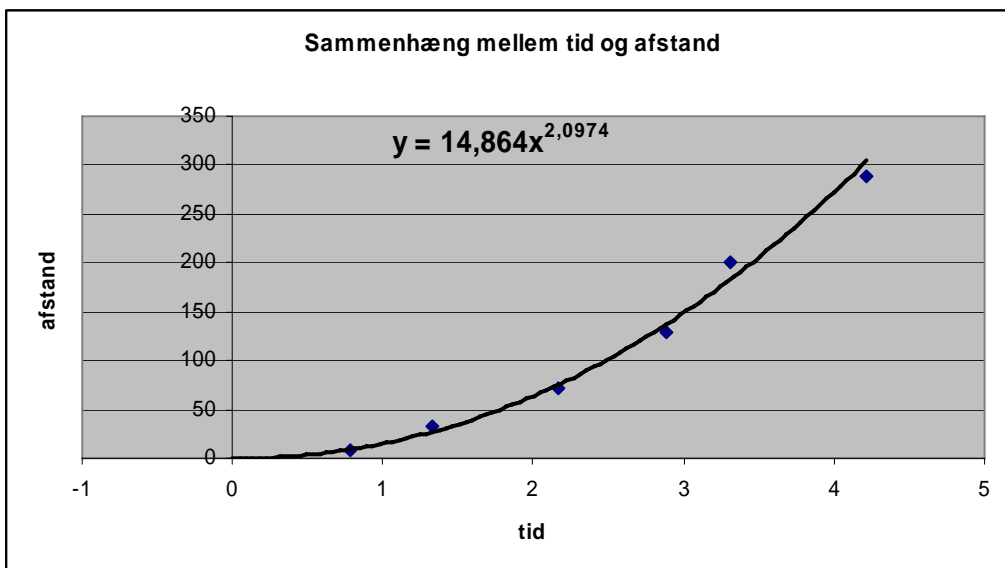
Lav et diagram over række 4 og 7. Man får noget der ligner det, I ser på næste side.



Hvis I klikker på et datapunkt og indsætter en tendenslinie, som denne gang skal være en potensfunktion, hvis I får ligningen frem og laver en prognose, der går 1 tilbage, så får I nedenstående diagram.

Helt ideelt skulle der have stået  $x^2$  og ikke  $x^{2,0974}$  i ligningen, men det er nu meget tæt på, at vi får vist, at afstanden ”går som” kvadratet på tiden! De 16,555, der var hældningen af linien i diagram nr. 2, og de 14,864, der er vores konstant nu, er ret tæt på hinanden. Det skal de også være; det skulle i den ideelle verden være det samme tal.

Den sidste graf vil nogle af jer måske genkende som en parabel; man føler jo gensynets glæde, ikke sandt?



## 9. Logik og argumentation

### ***Overordnet projektbeskrivelse***

Dansk og matematik samarbejder om logik og argumentation i dagligsprog og matematikfaget.

Forløbet er tænkt til 2. eller 3.g. i en studieretning med matematik på mindst B-niveau.

Idéen med projektet er, at eleverne ved at arbejde med formel logik og argumentationsteori bliver i stand til at se den logiske struktur i de dagligsprogsargumenter, de møder i avisartikler mv.

Projektet vil dermed dels gøre eleverne til bedre tekstlæsere, dels give dem forståelse for det matematiske bevis som en særlig form for argumentation. Endelig vil projektet få eleverne til at se sammenhængen mellem den strengt logiske argumentation, de møder i matematiktimerne, og den argumentation, de i øvrigt møder i deres hverdag.

### ***Mål: Metodiske***

Formidle resultater hensigtsmæssigt

Samarbejde med hinanden

### ***Mål: Faglige (matematik)***

Grundlæggende kendskab til bevisteknik

Gennemskue og forstå argumentation

### ***Mål: Fællesfaglige***

Efter at have haft projektet skal eleverne:

Have kendskab til grundlæggende logik (syllogismer og simpel udsagnslogik)

Have kendskab til grundlæggende argumentationsteori

Være i stand til at se den logiske struktur i visse typer dagligsprogsargumenter

Være kritiske overfor forskellige former for argumentation

### ***Tidsforbrug***

10-15 timer

### ***Arbejdsformer***

Gruppearbejde støttet af lærergennemgang

### ***Produktkrav***

Kort rapport, hvor eleverne løser en række mindre og en enkelt lidt større opgave. Se mere nedenfor.

### ***Materialer***

- Jimmy Zander Hagen: *Sprog og tale: Mundtlighed i dansk*, (Systime, 2006)
- Knud Nissen: *Aspketer: På søndagstur i den logiske have*, (Abacus, 1991)
- Finn Collin m. fl.: *Derfor. Bogen om argumentation*, (Hans Reitzels Forlag, 1987)

### ***Forudsætninger***

Matematik: Det er en forudsætning, at eleverne har set eksempler på og har et grundlæggende kendskab til matematiske beviser. Det kan f.eks. være sket i forbindelse med undervisningen i trigonometri eller undervisningen i det udvidede potensbegreb.

Dansk: Det er en forudsætning, at eleverne har et grundlæggende kendskab til argumentationsteori.

### ***Forløbet***

Selve forløbet veksler mellem klassetimer, hvor læreren introducerer teori, og gruppearbejde, hvor eleverne arbejder med opgaverne i elevarbejdshæftet (se næste sider). Forløbet kan enten ligge som 2-3 sammenhængende dage eller som spredte blokke over en længere periode.

Vi har opdelt forløbet i fem dele: 1) Grundlæggende overvejelser over gyldighed og sandhed, 2) syllogismer, 3) udsagnslogik, 4) argumentationsfejl og 5) dagligsprogsargumentation. Del 2 om syllogismer kan evt. springes over eller gemmes til sidst. Ellers vil vi anbefale, at man arbejder med de enkelte dele i den rækkefølge, de står.

### ***Efter projektperioden***

Det er muligt at arbejde videre med projektet i en særfaglig sammenhæng efter selve projektperioden. Her er nogle forslag:

I dansk og matematik kan projektet udvides med syllogismer og deres brug i Erasmus Montanus, som det er gennemgået i Knud Nissen: På søndagstur i den logiske have s. 5-13, hvis klassen på et tidspunkt læser Holbergs værk.

I dansk kan man herefter komme ind på begrebet sproghandlinger, som Thomas Bredsdorff anvender i forbindelse med Montanus' brug af syllogismer og sproget mere generelt. Se efterskriftet s. 78-87 til Dansk lærerforeningens 1992-udgave af Holbergs Erasmus Montanus.

I matematik kan man på baggrund af projektet arbejde videre med matematikkens indre struktur og den aksiomatisk-deduktive metode. Gert Fosgerau m.fl. *Midt i matematikken* har et afsnit der kan bruges.

Her kan s. 152-184 i B1-bogen fra Gyldendal af Flemming Clausen m.fl. også bruges.

Eller den ældre udgave Flemming Clausen m.fl.: *Tal og geometri* fra serien Ind i matematikken (Munksgaard, 1988)

I matematik kan man arbejde videre med bevisteknik:

Samme sider som ovenfor i Flemming Clausens B1-bog eller så vidt vides en af de nye HAX-bøger

## Logik og argumentation

- Forslag til elevarbejdshæfte

### Del 1: Gyldighed og sandhed

Læs side 42-52 i *Derfor. Bogen om argumentation*

#### Opgaver

- 1) Giv et eksempel på et gyldigt argument, og forklar, hvad logisk gyldighed er.
- 2) Kan et argument være gyldigt, selv om konklusionen er falsk?
- 3) Overvej om følgende argumenter er gyldige:
  - a) Hvis bilen kan køre, er der benzin på. Der er ikke benzin på bilen. Altså kan den ikke køre.
  - b) Hvis bilen kan køre, er der benzin på. Bilen kan ikke køre. Altså er der ikke benzin på.
  - c) Hvis det ikke er tilfældet, at der kommer *Vild med dans* i aften, så kommer der *Matador*. Der kommer ikke *Matador*. Altså kommer der *Vild med dans*.
  - d) Ingen kan lide både Metallica og Britney Spears. Peter kan lide Metallica. Altså kan han ikke lide Britney Spears
  - d) Alle katte er kæledyr. Nogle kæledyr er øremærkede. Altså er katte øremærkede.

### Del 2: Syllogismer [kan evt. springes over eller gemmes til sidst]

Læs side 5-13 *Den logiske have* og løs opgaverne side 13.

### Del 3: Udsagnslogik

Læs side 18n – 26m. i *Den logiske have*.

#### Opgaver

- 1) Formaliser et udvalg af argumenterne fra opgave 3, Del 1 ovenfor.
- 2) En sætning om vektorer i planen siger:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \vee \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0}$ .  
Find fejlen i følgende argumentation, hvor sætningen benyttes.
  - a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \vee \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0}$ . Da vi nu har vist, at  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , følger at  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .
  - b) Sætningen siger:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \vee \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0}$ . Derfor gælder: Hvis  $\vec{a} \perp \vec{b}$  så er  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ . Da  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  må  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .
  - c) Sætningen siger:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \vee \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0}$ . Altså gælder at hvis  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , så er  $\vec{a} \perp \vec{b}$ . Da  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  er  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .
- 3) Hvilke argumenttyper bruges i følgende beviser? [Til læreren: Indsæt et eller flere bevis(er), I har arbejdet med for nyligt. Helst både direkte beviser (hvor der bruges modus ponens) og indirekte beviser (hvor der bruges modus tollens). Hvis du savner eksempler på det sidste kan f.eks. nævnes Euklids bevis for, at der findes uendelig mange primtal samt (sværere) beviset for, at  $\sqrt{2}$  er irrationalt]

- 4) Find fejlen i følgende bevis (frit efter Dagfinn Føllesdal: *Politikens bog om moderne videnskabsteori*, side 216):

Sætning: Alle positive tal er negative

Bevis: Lad  $x$  være et vilkårligt positivt tal. Af  $x > 0$  følger, at  $x + 1 > 1$  og  $x + 2 > 2$ . Ved at gange disse to uligheder sammen får vi:  $(x + 1)(x + 2) > 2$ . Hvoraf følger at  $x^2 + 3x > 0$  og ved faktorisering at  $x(x + 3) > 0$ . Denne ulighed er opfyldt for  $x < -3$ , for her er begge faktorer på venstre side negative og produktet af to negative tal er altid positivt. Vi kan altså konkludere, at hvis  $x$  er et positivt tal, altså  $x > 0$ , så er  $x < -3$ , som ønsket.

#### **Del 4: Argumentationsfejl: Flertydighed og vaghed**

Læs side 60-66ø i *Derfor*.

Opgaver

- 1) Betragt følgende syllogisme

Alle gale mennesker skal på galeanstalt  
Da Peter smadrede vasen, blev Peters far gal  
Altså skal Peters fra på galeanstalt

Er syllogismen formelt set gyldig?  
Overvej, om der er andre fejl i argumentet.

- 2) Overvej, om der er flertydighed i følgende argumentation:

”Jeg står helt og fuldt ved det udtryk [nemlig ’skandalejournalist’]. Hvis en journalist fortrinsvis beskæftiger sig med teateranmeldelser, er han en teaterjournalist, og hvis han mest beskæftiger sig med skandaler, er han en skandalejournalist.”

(Erhard Jacobsen, *Politiken*, 7/7 1968, her citeret efter *Derfor* side 68)

”Professoren [Helmut Nyborg] har i løbet af årene testet 100 skoledrenge og 100 skolepigers intelligens via en såkaldt g-faktor test en slags udvidet IQ-test og derigennem fundet frem til, at mænd er mere intelligente end kvinder. Helt nøjagtigt 27 procent mere intelligente, hvis man forsøgsvis skal omskrive undersøgelsens resultat, som professoren selv kalder ’en moderat kønsforskel,’ til forståelige tal.”

(Ole Sønnichsen, *Jyllands-Posten*, 9/1 2002)

- 3) Hvad er problemet i beviset for at en myg vejer det samme som en elefant?

Beviset kan ses i :

Hans Jørgen Beck: At føre et matematisk bevis, kap 4, s. 73-74 i Gert Fosgerau og Finn H. Kristiansen (red.): *Midt i Matematikken*, KVAN, 1992.

- 4) Find fejlen i nedenstående ”bevis”?

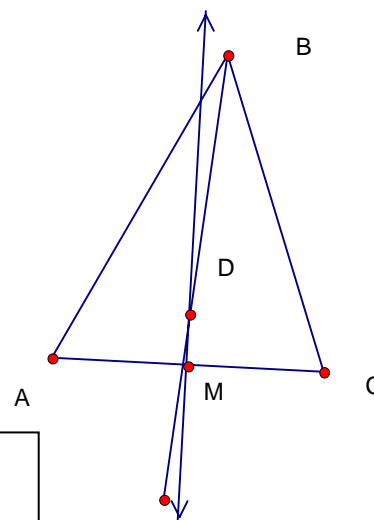
#### **Alle trekanter er ligebenede**

Bevis:

På figur 1 ses en vilkårlig trekant, hvor midtnormalen på AC er indtegnet gennem midtpunktet M, og hvor vinkelhalveringslinjen af vinklen B er indtegnet.

Skæringspunktet mellem de to linjer kalder vi nu D. Antag at D ligger inden i trekanten (argumentet kan gentages med D udenfor trekanten).

Konstruer nu linjer fra D vinkelret ind på siderne AB og BC. Skæringspunkterne kaldes henholdsvis E og F, se figur 2.



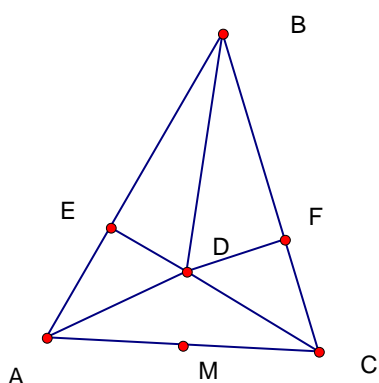
Figur 1

Da BD er en vinkelhalveringslinje, er afstanden fra D til AB og til BC ens. på figur 2 er altså  $|DE|=|DF|$ .

Vinklerne E og F er vinkelrette og BD er fælles, så trekantene BDE og BDF er hinandens spejlbillede, og så er  $|BE|=|BF|$ .

D ligger på midtnormalen, så afstandene  $|AD|$  og  $|CD|$  er ens. Vi ved fra før at  $|DE|=|DF|$ . Så er også de retvinklede trekanter ADE og CDF spejlbilleder af hinanden. Dermed er  $|AE|=|CF|$

Heraf følger at  $|BC|=|BF|+|FC|$  og  $|AB|=|BE|+|EA|$  er lige lange, og dermed må trekanten være ligebenet. Konstruktionerne i beviset er uafhængige af trekantens egenskaber, så enhver trekant må være ligebenet.



Figur 2

Forfatter: Lewis

Carroll (Rekonstrueret af Jacob Jalving).

### Del 5: Dagligsprogsargumentation

Læs s. 71-84 i Jimmy Zander Hagen: *Sprog og tale*.

Gennemgå argumentationen i avisartiklen/talen og svar på følgende spørgsmål:

[Til læreren: Her skal findes en passende avisartikel eller tale. Vi har vedlagt et lille udvalg af egnede artikler, men du kan også selv finde en. På hjemmesiden [www.dansketaler.dk](http://www.dansketaler.dk) findes en lang række taler fra Martin Luther i 1521 til nutiden.]

- Find argumenterne i teksten.
- Opskriv argumenterne på logisk form, så de bliver lettere at overskue. (I kan finde inspiration til dette i uddraget af *Derfor* s. 44-48 og *På søndagstur i den logiske have*)
- Opstil argumenterne i Toulmins model for argumentation (se *Sprog og tale* s. 74)
- Diskuter om begrebet logisk gyldighed giver mening i forhold til argumentationen i teksten.
- Hvilke af de tre appelformer (logos, ethos og pathos) anvendes i teksten og hvilke(n) er dominerende?
- Giv endelig en samlet vurdering af argumentationen baseret på de undersøgelser, I har udført i de foregående punkter. Overvej også, om argumenterne er gyldige, rummer tvetydighed mv.

## Facitliste til udvalgte opgaver (til lærerne)

Del 1

Opgave 3: a) gyldigt, b) ugyldigt c) ugyldigt d) gyldigt e) ugyldigt

Del 3

Opgave 2: a), b) og c) Det kan lige så godt være at  $\vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0}$

Opgave 4: Det eneste, vi har bevist, er at hvis  $x < -3$ , så er uligheden opfyldt, men for at få konklusionen skal det omvendte også gælde, og det gør det ikke da uligheden også er opfyldt for ethvert  $x > 0$ . Formelt set har beviset altså følgende form:

Hvis  $x < -3$ , så  $x(x+3) > 0$

$x(x+3) > 0$  (pr. antagelse)

Altså gælder:  $x < -3$

Dette er en fejlslutning af typen 'at bekræfte konsekvensen'.

Del 4

Opgave 1: Ordet 'gale' bruges i to forskellige betydninger

Opgave 2: Erhard Jacobsens definition af 'skandalejournalist' stemmer ikke overens med den normale brug af ordet. Tilsvarende bruges 'intelligens' ikke om evnen til at løse IQ-tests.

## **Forslag til artikler til opgave 5.**

Alle artikler kan findes på Infomedia.

### **Ny bundrekord**

Weekendavisen 05 januar 2007, 1. sektion side 10

### **Fornuftens principper**

Weekendavisen 03 november 2006, 1. sektion side 13

### **Læserbreve: Fornuft**

Robin de Nijs, hospitalsfysiker, Gevninge Bygade 43 B, 4000 Roskilde

Weekendavisen 10 november 2006, 1. sektion side 11

## 10. Sikker viden, Euklids geometri som forbillede.

### **AT-forløb med fagene matematik, filosofi, dansk og fysik.**

Forløbet er tænkt som et 2.-3.g-forløb om en struktur, som ligger bag naturvidenskabelige udsagn. Euklids klassiske geometri synes at vise en opbygning af viden med stor sikkerhed på et fundament af aksiomer, der ikke bevises. På fundamentet bygges sikker viden op gennem argumenter og beviser. Naturvidenskabelige udsagn om solsystemet har ikke haft samme sikkerhed, selv om fx René Descartes både i sin filosofi om bevidsthed og tvivlens metode og i sin opfattelse af et mekanisk verdensbillede strukturerer sin viden med Euklids geometri som forbillede. Ludvig Holberg forsøger at bedømme Descartes og Newtons modeller af og forklaringer på solsystemet.

### **AT-mål:**

- Demonstrere kendskab til, hvorledes der med udgangspunkt i et givet emne kan stilles spørgsmål til forskellige fag.
- Skriftlig formidling i form af en rapport.

### **Mål, metodiske:**

- Benytte matematikken til at vise argumentation og opbygning af teori.
- Benytte tekster til at forstå argumenter og struktur ud fra.
- Nærlæse svære tekster

### **Mål, faglige:**

- At kunne forstå og reproducere geometriske beviser.
- At kunne regne med videnskabelig notation
- At kunne genkende argumenter i en litterær tekst.
- Filosofis bidrag: argumentation og læsning af René Descartes Meditation 1 og 2.
- Fysiks bidrag: Descartes hvirvelteori om solsystemet. Newtons beregninger.
- Danskfagets bidrag: argumentation og læsning af dele af Ludvig Holbergs Epistler

### **Tidsforbrug:**

- 5 timer til klassisk geometri, AT-forløbet er vel på 15-20 timer.

### **Faglige forudsætninger i matematik:**

- Grundlæggende klassisk geometri, passer og lineal.
- Videnskabelig notation

### **Materiale til matematik:**

- Elementær klassisk geometri fra topvinkler over vinkelsum i trekant til et af beviserne for Pythagoras sætning. Fx fra Flemming Clausen og Jørgen Falcksgaard: Tal og Tanke, Munksgaard, 1986. Side 60-61, 99-112.

### **Materiale til filosofi:**

- Descartes meditation 1 og 2. Fx Munksgaard: De store tænkere. 2.udg, 1996, side 133-147. Rita Werner og Karin-Ann Madsen: Cogito, Gyldendal,

### **Materiale til dansk:**

- Ludvig Holberg: Epistel nr. 42: Om Aristoteles, Descartes og Newton

- I J. F. Billeskov-Jansens udgave af Holbergs epistler har nr. 42 overskriften: ”Descartes’ Fysikteori bedre end Newtons”.

#### **Materiale til fysik:**

- Olaf Pedersen og Helge Kragh: Fra Kaos til Kosmos. Gyldendal, 2000.
- Aristoteles verdensbillede: Side 40-43.
- Descartes hvirvelteori: Side 135-141.
- Newtons verdensbillede. Formel for centripetalkraft på en planet. Beregning af solens kraft på samme planet ved Newtons gravitationsformel.

#### **Arbejdsformer/ forløb:**

- Særfaglig introduktion, 1-2 timer i matematik, lærerstyret
- Besvarelse af nedenstående opgave i grupper.

#### **Forslag til arbejdsopgave:**

Gruppen skal besvare nedenstående arbejdsopgave om begrebet sikker viden. Opgaven ligger i forlængelse af undervisningen i de fire fag.

1. I skal gengive beviser og opbygningen af beviser fra Euklids aksiomer over topvinkler og vinkelsum til et af beviserne for Pythagoras sætning.
2. I skal ud fra Descartes første meditation gengive hvorfor man ikke kan være sikker på sine sanser og hvorfor man heller ikke kan være sikker på sin fornuft og evne til at tænke logisk rationelt og ordnet. Bestem hvilket udsagn Descartes finder er det eneste sikre.
3. I skal redegøre for hvilke grundlæggende antagelser om fysik René Descartes bruger for at forklare, hvad himmelrummet må være fyldt ud af og hvorfor planeterne må kredse omkring solen. Og I skal redegøre for Newtons indvendinger mod Descartes verdensbillede.
4. Diskuter i hvor høj grad Ludvig Holberg har ret i at foretrække René Descartes hvirvelteori frem for Isaac Newtons model, som bygger på antagelsen om gravitationskraft.
5. Diskuter hvordan matematik bidrager til at forøge vores følelse af sikkerhed, fordi beregningerne efter Newtons gravitationslov kan forudsige planeterne positioner. I skal beregne fem planeters nødvendige centripetalkraft ud fra deres omløbstid, deres afstand fra solen og deres masse. I skal beregne de gravitationskræfter, som solen og jeres planeter faktisk tiltrækker hinanden med og vise at de er parvis lige store. Brug gravitationsformlen til at beregne tyngdeaccelerationen ved jordoverfladen og afgør om Newtons formel også kan bruges nær jorden. Løs ligningen mellem centripetalkraft og gravitationskraft med hensyn til massen af fx solen og bestem solens masse. Brug omløbstid og afstand for Jupiters måner til at finde Jupiters masse og find med samme metode jordens masse.

#### *Produktkrav:*

Der skal udarbejdes én opgavebesvarelse pr. gruppe.

# 11. Statistik som naturvidenskab

## Modul 1: Er du normal?

### Hypotesetest med normalfordeling

Matematik indgår her med fag som idræt, samfundsfag og/eller humanistiske fag hvor der er interesse for ungdomskultur og individets stilling i forhold til samfundet/fællesskabet. Det kan gerne foregå i grundforløb/1.g, hvor deskriptiv statistik indgår. Overordnet er ideen at eleverne skal møde begrebet statistisk test som eksempel på en form for naturvidenskabelig metode.

De AT-faglige mål der dækkes er:

- Kendskab til hvilke spørgsmål der kan stilles i matematik.
- Kendskab til hvordan matematik (statistik) kan belyse et givet emne.
- Formidle resultatet af en undersøgelse.

### Mål: Metodiske

Eleverne skal oparbejde kompetencer i at

- Samarbejde med hinanden
- formulere faglige problemstillinger
- planlægge undersøgelser
- formidle resultater hensigtsmæssigt
- benytte matematikken til at behandle problemstillinger i samarbejde med andre hovedområder, her f.eks. det samfundsvidenskabelige hovedområde.

### Mål: Faglige (matematik)

Eleverne skal

- opstille en hypotese
- planlægge en undersøgelse
- indsamle data
- benytte passende diagrammer
- Sammenligne med normalfordeling
- Teste om hypotesen kan accepteres eller forkastes

### Tidsforbrug

5 timer.

### Forudsætninger

Deskriptiv statistik, normalfordeling.

### Materialer

Preben Blæsild, Lars Bo Kristensen: Coopertest, Matematiske emner 11.

Om hypotesetest: Hans Sloth: TRIP's matematiske grundbog, TRIP 2005 s. 156-161 el. lign. eller Aksel Bertelsen: Statistik med matematik, Systime 2006 s. 105-108.

Om t-test: Statistik med matematik, s. 108m-110, eller Coopertest s. 15-17.

Statistisk materiale, f.eks. aktuelle undersøgelser om unges vaner.

Databehandlings program med normalfordeling/t-test, f.eks. Excel el. Datameter.

### Arbejdsformer

Projektorganiseret. Eleverne formulerer et problem, planlægger en undersøgelse og analyserer og vurderer data. Eleverne arbejder i grupper.

Der kan udarbejdes et skriftligt produkt, en planche eller holdes et kort mundtligt oplæg.

### Plan over forløbet

- 11) Introduktion til hypotesetest og t-test af stikprøve. (1 t)
- 12) Eleverne skal i små grupper opstille en hypotese og planlægge et forsøg (1 t).
- 13) Eleverne skal indsamle og behandle data, herunder (3 t)
  - i) udarbejde histogrammer
  - ii) teste middelværdi (t-test)
  - iii) forkaste eller godtage hypotese
  - iv) vurdere resultaterne

### Krav til eleverne

- 7) I skal planlægge en undersøgelse med udgangspunkt i den udleverede statistik. Forslag til undersøgelser:
  - a) Er vi af gennemsnitshøjde?
  - b) Har vi god kondi?
  - c) Tjener vi mange penge?
  - d) Taler vi meget i mobiltelefon?
  - e) Har vi mange sygedage?
- 8) Data skal præsenteres ved hjælp af diagrammer
- 9) I skal udføre en test af middelværdi (t-test).
- 10) På baggrund af testsandsynligheden skal I forkaste eller godtage hypotesen.
- 11) I skal tage stilling til hvor sikre resultaterne er.

### Modul 2: Meningsmålinger.

#### Brug af binomialmodellen i meningsmålinger

Matematik i samarbejde med samfundsfag arbejder med valg og meningsmålinger. Forløbet kan med modifikationer indgå i l.g, men er tiltænkt studieretning med matematik B og samfundsfag. Ideen er at eleverne i et eksempel skal kunne vurdere hvor sikker man kan være på statistiske konklusioner.

De AT-faglige mål er

- Anvende relevante metoder fra faget matematik.
- Demonstrere kendskab til matematiks muligheder og begrænsninger.

#### Mål: Metodiske

Eleverne skal oparbejde kompetencer i at

- Samarbejde med hinanden
- formulere faglige problemstillinger
- planlægge undersøgelser
- formidle resultater hensigtsmæssigt
- Benytte de taksonomiske niveauer
- benytte matematikken til at behandle problemstillinger i samarbejde med andre hovedområder, her f.eks. det samfundsvidenskabelige hovedområde.

#### Mål: Faglige (matematik)

Eleverne skal

- planlægge en statistisk undersøgelse
- indsamle og beskrive data
- benytte binomialmodellen (evt. hypergeometrisk) til at vurdere usikkerheder

## Tidsforbrug

ca. 6 timer

## Forudsætninger

Kendskab til deskriptiv statistik, binomialfordeling, evt. hypotesetest.

## Materialer

Felsager et al: Naturfag 2, Systime, 1995, s. 182-184.

Jette Rygaard Poulsen, Hans Vestergaard, Søren Lundbye-Christensen: ”Hvad er meningen?”.

Noter til paradigmatisk eksempel 209a/220 fra.

Lars Andersen: Anvendelse af statistik, fra [EMU - materiale fra mat-samf samarbejde](#)

Prognoser og resultater fra en valgaften.

## Arbejdsformer

Projektorganiseret. Eleverne formulerer et problem, planlægger en undersøgelse og analyserer og vurderer data. Eleverne arbejder i grupper.

Der kan udarbejdes et skriftligt produkt eller holdes et kort mundtligt oplæg.

## Plan over forløbet

1. Introduktion, evt. oprids af binomialeksperiment, normalområde, hypotesetest. Eleverne formulerer i grupper et problem de kan udføre binomialeksperiment over. (1,5 t)
2. Eleverne udfører eksperimentet. (1,5 t)
3. Data behandles, der udarbejdes grafiske oversigter og beregnes resultater. (1,5 t)
4. Evt. fremlæggelse. (1,5 t)

## Krav til eleverne

1. Der skal planlægges et binomialforsøg. *Opstil f.eks. en hypotese om procentdelen af elever der cykler til skolen (tæl cykler i cykelstativerne). Stil op ved skolens indgang og spørg et antal elever om de er cyklet.*
2. Data skal præsenteres på en passende måde med grafiske virkemidler.
3. På baggrund af de indsamlede data skal I afgøre om hypotesen kan godtages eller forkastes – ligger den hypotetiske værdi i normalområdet ( $\mu \pm 2\sigma$ )?
4. Der skal tages stilling til usikkerheden af de opnåede resultater – hvor stort er normalområdet?
5. Konklusionen skal benyttes til at vurdere usikkerheden på en meningsmåling med 50, 250, 1000 adspurgte vælgere.

## Modul 3: Beslutninger.

### Hypotesetest med $\chi^2$ -fordelingen

Matematik indgår i samarbejde med samfundsfag eller et naturvidenskabeligt fag f.eks. biologi. Der arbejdes med test i  $\chi^2$ -fordelingen på datamaterialer, som eleverne selv indsamler i de andre fag. Overordnet set er det formålet at eleverne får kendskab til simple statistiske metoder, der kan kvalificere en analyse af en række data, hvor man har observerede og forventede tal.

### De AT-faglige mål er

- Demonstrere kendskab til hvordan der i forskellige fag kan stilles spørgsmål og hypoteser, som matematik kan behandle med statistiske metoder.

- Grundlæggende forståelse for matematikkens muligheder og begrænsninger i forhold til de andre fags metoder.
- Formidle resultatet af arbejdet

### **Mål: Metodiske**

Eleverne skal oparbejde kompetencer i at

- Samarbejde med hinanden
- formulere faglige problemstillinger
- planlægge undersøgelser
- formidle resultater hensigtsmæssigt
- benytte matematikken til at behandle problemstillinger i samarbejde med andre hovedområder, her f.eks. det samfundsvidenskabelige hovedområde.

### **Mål: Faglige**

Eleverne skal

- opstille en hypotese
- planlægge en undersøgelse
- indsamle data
- benytte passende diagrammer
- Sammenligne med normalfordeling
- Teste om hypotesen kan accepteres eller forkastes

### **Tidsforbrug**

4-6 timer afhængig af forkundskaber

### **Forudsætninger**

Deskriptiv statistik evt. teori om binomialtest og normalfordelingstest

### **Materialer**

Listen er opstillet så der i rækkefølge med ”aftagende” grundighed m.h.t. det teoretiske. Dvs. at materialet fra Naturvidenskabeligt grundforløb kan læse og anvendes helt uden forkundskaber og gennemgang i klassen.

Aksel Bertelsen: Statistik med matematik, Systime 2006 s. 144 -157.

Carstensen og Frandsen, Mat B2 (283-287) eller A2,  $\chi^2$ -test, Systime 2006.

Naturvidenskabeligt grundforløb, Forlaget Malling og Beck 2005, s.89-90

Cas-værktøjer til test f.eks. Texas lommeregner, Derive eller datameter. Regneark også en mulighed.

### **Arbejdsformer**

Klasseundervisning om  $\chi^2$ -fordelingen og test ganske kort.

Hvis binomial-fordelingen eller normalfordelingen med tilhørende test er kendt stof er den indledende fase med teorigennemgang i klassen ikke nødvendig og tidsforbruget derfor ca. 4 timer.

Projektorganiseret: Eleverne formulerer et problem, planlægger en undersøgelse og analyserer og vurderer data. Eleverne arbejder i grupper.

Der kan udarbejdes et skriftligt produkt eller holdes et kort mundtligt oplæg.

### **Plan over forløbet**

14) Introduktion til  $\chi^2$ -fordelingen og test af små datamaterialer (2-3 t)

- i) Eksemplerne i bøgerne afprøves for at forstå den specielle teknik med observerede minus forventede osv. Værktøjer til test afprøves. Læreren gennemgår som klasseundervisning, hvad det vil sige at opstille hypoteser og teste et datamateriale (afhængig af forkundskaber).
- 15) Eleverne skal indsamle og behandle data (3 t)
- i) Eleverne skal i små grupper selv fremstille/indhente datamateriale f.eks. fra biologiforsøg eller fra meningsmålinger i samfundsfag.
  - ii) Opstille en hypotese over datamaterialet
  - iii) teste observerede i forhold til forventede ( $\chi^2$ -test)
  - iv) forkaste eller godtage hypotese
  - v) forklare hvad det vil sige i forhold til den faglige problemstilling
- 3) Evt. mundtlig fremlæggelse som vidensdeling

### Krav til eleverne?

- 12) I skal forstå hvad det vil sige at teste et datamateriale og opstille en hypotese.
- 13) I hvilke situationer kan  $\chi^2$ -test anvendes? Hvordan adskiller den sig fra binomialtest f.eks.
- 14) I skal afprøve de forskellige CAS- værktøjer eller regneark til test.
- 15) Overvej om der ligger teorier (f.eks. Mendels lov) eller statistisk datamateriale (meningsmåling) bag ved observationerne.
- 16) Når I behersker værktøjet, skal I selv indsamle datamateriale i biologi eller samfundsfag og opstille hypoteser.
- 17) En mundtlig eller skriftlig fremstilling af test og konklusion som en vidensdeling i klassen. Hvert datamateriale præsenteres kort sammen med jeres hypotese. Herefter lader I klassen gætte på testresultat, hvorefter I fremlægger testresultat.

### Modul 4: Alting har en pris?

#### Anvendelse af cost-benefit analyse

Matematik indgår i samarbejde med naturvidenskabelige fag, samfundsfag og humanistiske fag i et emne om cost-benefit analyse. De forskellige hovedområder skal hver især belyse og diskutere spørgsmålet: alting har en pris? I matematik anvendes grundlæggende rentesregning og diskontering og sværhedsgraden kan tilpasses alle niveauer. I samfundsfag arbejdes med cost-benefit som en økonomisk analysemetode og i de humanistiske fag diskuteres etiske aspekter af f.eks. prisfastsættelsen af et menneskeliv.

Naturvidenskabelige fag kan inddrages ved eksempler på miljøvurdering f.eks. Skjern-Å-projektet. Ligeledes er det oplagt at arbejde med Copenhagen Consensus konferencen, hvis det er en samfundsvidenskabelig studieretning.

#### De AT-faglige mål er

- Opnå viden om et emne ved at kombinere flere forskellige fag og faglige hovedområder.
- Vurdere forskellige fags og faglige metoders muligheder og begrænsninger.
- Vurdere hvorledes et givet emne indgår i en nutidig sammenhæng i form af en lokal og global diskussion om anvendelse og fordeling af knappe ressourcer.
- Vurdere og reflektere over store komplekse spørgsmål, der er vanskelige at håndtere samfundsmæssigt og etisk.
- Evaluering af AT og eksamensforberedelse i synopsis

#### Mål: Metodiske

- Eleverne skal oparbejde kompetencer i at
- Samarbejde med hinanden

- Søge information og undersøge faglige problemstillinger
- Benytte de taksonomiske niveauer på alle trin
- Reflektere over problemstillinger af enkeltfaglig, flerfaglig og fællesfaglig karakter
- Benytte matematikken til at behandle problemstillinger i samarbejde med andre hovedområder.

### **Mål: Faglige (matematik)**

Eleverne skal

- Benytte rentesregning til at beregne cost-benefit
- Forstå principperne i diskonteringsmetoden og betydningen af rentens størrelse og tidsperiodens længde.
- Analysere forskellige eksempler på cost-benefit analyser
- Kritisk vurdering af anvendelse af cost-benefit analyser

### **Tidsforbrug**

10-15 timer men kan gøres meget fleksibelt i en tilpasning til niveauer.

### **Forudsætninger**

Kendskab til procentregning og den simple renteformel.

### **Materialer**

Hans Sloth, TRIP forlag: Renter med mere

Forskellige rapporter og fagartikler fra IMV Institut for miljøvurdering [www.imv.dk](http://www.imv.dk) især notater til IMVs miljøøkonomiske værktøjskasse eks.:

1. Værdi- og prissætningsmetoder
2. Value Transfer – overførsel af pris- og værdiestimer
3. Miljøøkonomiske analysemetoder med fokus på cost-benefit analysen

Den Kgl. Veterinær – og Landbohøjskole (KVL) [www.kvl.dk](http://www.kvl.dk) : Resume af cost-benefit analyse af Skjern-Å-projektet.

Copenhagen Consensus Konferensen findes også på IMV

Kritiske rapporter om cost-benefit metoden og især Bjørn Lomborgs anvendelse af cost-benefit findes på [www.ecocouncil.dk](http://www.ecocouncil.dk)

### **Arbejdsformer**

#### **Plan over forløbet**

1. Introduktion til cost-benefit analysen (4t)
  - a. Matematik arbejder med renteformlen og gør eleverne fortrolige med diskonteringsprincippet
  - b. I samfundsfag og de humanistiske fag arbejdes med nyttebegrebet og dets anvendelse i økonomi. Det vil også være relevant med en diskussion af behovsbegrebet og markedsmekanismen.
2. Eleverne vælger sig ind på forskellige eksempler på cost-benefit analyser indenfor f.eks. miljøområdet. (4-6 t)
  - a. Eleverne skal i små grupper selv indhente datamateriale f.eks. fra forskellige rapporter, der anvender cost-benefit

- b. Eksemplerne skal analyseres ud fra en skabelon med ensartede spørgsmål: hvilke costs og hvilke benefits? Hvad er renten? Hvad er tidsperioden? Hvad er konklusionen? Kritisk stillingtagen til forhold der udelukkes og værdifastsættelsen.
  - c. Gerne en alternativ beregning med en anden rente og en anden periode
3. Skriftlig rapport og mundtlig fremlæggelse i opponent/respons grupper. Grupperne fremlægger som eksperter og en anden gruppe giver respons og kritik.(2t)
4. En afsluttende fælles refleksion i klassen: Har alting en pris? (1t)
5. Evaluering i forhold til de AT-faglige mål: skriv en synopsis over emnet svarende til eksamensforberedelse i AT.(1t)

### **Krav til eleverne?**

- 1) I skal selvstændigt i grupper arbejde med et eksempel på cost-benefit analyse  
Forslag til undersøgelser:
  - a. Skjern Å projektet
  - b. Miljøvurderinger hentet fra IMV (institut for miljøvurderinger)
  - c. Copenhagen Consensus Konference
- 2) I skal kunne gøre rede for alle beregninger i en cost-benefit analyse og kunne forklare betydningen af diskonteringsrenten og tidsperioden
- 3) I skal forholde jer kritisk (ved at inddrage alle deltagende fag) til værdifastsættelsen og forberede jer på at "forsvare" jeres eksempel, som om det var jeres eget arbejde
- 4) På baggrund af jeres analyse skal I skrive en rapport, hvor I svarer på nogle ensartede spørgsmål i skabelonform.
- 5) I skal fremlægge jeres rapport og forsvare den overfor opponentgruppe.
- 6) Forløbet afsluttes med en fælles perspektivering af: Har alt en pris?
- 7) Til slut skal I evaluere de AT-faglige mål og udarbejde en synopsis som eksamenstræning.