

Bernouillis differentiallyigning

Den logistiske differentiallyigning er et eksempel på en *ikke-lineær differentiallyigning*. Den logistiske differentiallyigning kan generaliseres på flere måder, og i dette afsnit skal vi studere en af disse generaliseringer, de såkaldte Bernouilli-differentiallyigninger.

De lineære differentiallyigninger er karakteriseret ved, at den ukendte y ikke indgår med potenser eller som en del af sammensatte funktioner. Lineære differentiallyigninger (af første, anden eller højere orden) er de mest håndterlige. Her kan vi ofte bestemme løsninger eksakt og skabe os et overblik over *den fuldstændige løsning* (dvs. *mængden* af alle løsninger til den forelagte differentiallyigning). Eksempler på sådanne differentiallyigninger er typerne $y' = ky$, $y' = b - ay$, $y'' + by' + cy = 0$ og $y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$. Definitionsmængderne indskrænkes kun, hvis der er problemer med definitionsmængderne for nogle af de funktioner, der indgår i ligningen.

Anderledes med ikke-lineære differentiallyigninger. For den logistiske differentiallyigning så vi, at visse løsninger fik indskrænket definitionsmængden dramatisk. Mange ikke-lineære differentiallyigninger kan ikke løses eksakt. I stedet kan man vælge at foretage en *numerisk løsning*, eller man kan af og til tilnærme med lineære differentiallyigninger. Endelig kan man også få en del oplysninger ved at analysere differentiallyigningen uden direkte at løse den – som f.eks. oplysninger om løsningsens monotoniforhold.

En del familier af ikke-lineære differentiallyigninger kan dog løses eksakt. Den logistiske er således med i en større familie vi samlet kalder Bernouillis differentiallyigning. De har fået navn efter Jacob Bernouilli, der levede samtidig med Newton og Leibniz.

Bernouillis differentiallyigning er interessant af flere grunde. Den træder ind på scenen i så forskellige situationer som opstilling af modeller for et frit fald med luftmodstand indenfor fysikken og opstilling af matematiske fiskerimodeller indenfor biologi.

Den generelle form og nogle specialtilfælde

Bernouillis differentiallyigning kan i sin generelle form opskrives således:

$$y' = g(x) \cdot y^\alpha - f(x) \cdot y \quad (*)$$

hvor g og f er kontinuerte funktioner defineret på et interval I – som evt. kan være alle reelle tal – og α er et reelt tal.

ØVELSE 1. Angiv hvad $f(x)$ og $g(x)$ samt α er i følgende differentiallyigninger:

1. $y' = by - ay^2$
2. $y' = hy^{\frac{2}{3}} - ky$
3. $y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}$

Vi ser først på et par specialtilfælde:

$$\alpha = 1: \quad \begin{aligned} y' &= g(x) \cdot y - f(x) \cdot y && \Leftrightarrow \\ y' &= (g(x) - f(x)) \cdot y \end{aligned}$$

Dette genkendes som et specialtilfælde fra behandlingen af den generelle lineære 1.ordens differentialligning. I tilfældet hvor funktionerne er konstante: $f(x) = b$ og $g(x) = a$, og vi sætter $k = a - b$ genkendes den første type differentialligning vi løste: $y' = ky$.

$$\alpha = 0: \quad \begin{aligned} y' &= g(x) \cdot y^0 - f(x) \cdot y && \Leftrightarrow \\ y' &= g(x) - f(x) \cdot y && \Leftrightarrow \\ y' + f(x) \cdot y &= g(x) \end{aligned}$$

Dette genkendes som den lineære 1. ordens differentialligning, som vi kan opskrive den fuldstændige løsning til. I tilfældet hvor funktionerne er konstante: $f(x) = a$ og $g(x) = b$, genkendes differentialligningen: $y' = b - ay$.

$$\alpha = 2: \quad \begin{aligned} y' &= g(x) \cdot y^2 - f(x) \cdot y && \Leftrightarrow \\ y' &= y(g(x) \cdot y - f(x)) \end{aligned}$$

Denne minder om den logistiske differentialligning: . I tilfældet hvor funktionerne er konstante: $f(x) = -b$ og $g(x) = -a$, får vi:

$$y' = y(b - ay)$$

Altså ser vi, at den logistiske differentialligning er et specialtilfælde af Bernouillis differentialligning.

Løsning af den generelle Bernouilli-ligning

Vi gennemfører nu løsningen af differentialligningen: $y' = g(x) \cdot y^\alpha - f(x) \cdot y$. (*)

I det følgende antages $\alpha \neq 0$ og $\alpha \neq 1$. Ofte løses differentialligningen kun i tilfældet med konstante koefficienter, men det vanskeliggør ikke løsningen i særlig grad at betragte det generelle tilfælde, så det lægger vi ud med.

Vi lader os inspirere af løsningsmetoden ved den logistiske differentialligning: Dengang dividerede vi igennem med y^2 og efter nogle omskrivninger lykkedes det at substituere tilbage til en lineær differentialligning.

Lad i det følgende f og g være kontinuerte funktioner defineret på et interval I (I kan som tidligere nævnt udmærket være alle reelle tal).

Hvis $\alpha > 0$ er funktionen $y = 0$ en løsning til (*), hvilket ses ved indsættelse.

Hvis $\alpha < 0$ kan y ikke være 0.

Derfor antages i det følgende at $y \neq 0$. Da y er kontinuert gælder derfor, at $y \neq 0$ i et helt interval indenfor I . Vi arbejder videre indenfor dette interval og vil afslutningsvis bestemme definitionsmængden, så denne bliver så stor som muligt.

Vi regner nu ensbetydende ud fra (*)

$$\begin{aligned}
y' &= g(x) \cdot y^\alpha - f(x) \cdot y && \Leftrightarrow && \text{(ganger med } y^{-\alpha} \text{)} \\
y' \cdot y^{-\alpha} &= g(x) - f(x) \cdot y \cdot y^{-\alpha} && \Leftrightarrow && \\
y' \cdot y^{-\alpha} &= g(x) - f(x) \cdot y^{1-\alpha} && \Leftrightarrow && (**)
\end{aligned}$$

Vi bemærker nu: $(y^{1-\alpha})' = (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha} \cdot y'$

Inspireret heraf ganger vi (**) igennem med $(1-\alpha)$, idet vi bemærker at: $(1-\alpha) \neq 0$

$$\begin{aligned}
(1-\alpha) \cdot y' \cdot y^{-\alpha} &= (1-\alpha) \cdot g(x) - (1-\alpha) \cdot f(x) \cdot y^{1-\alpha} && \Leftrightarrow \\
(y^{1-\alpha})' &= (1-\alpha) \cdot g(x) - (1-\alpha) \cdot f(x) \cdot y^{1-\alpha} && \Leftrightarrow \\
(y^{1-\alpha})' &= -(1-\alpha) \cdot f(x) \cdot y^{1-\alpha} + (1-\alpha) \cdot g(x)
\end{aligned}$$

Substituer: $z = y^{1-\alpha}$:

$$z' = -(1-\alpha) \cdot f(x) \cdot z + (1-\alpha) \cdot g(x)$$

Dette er en lineær 1. ordens differentialligning, og vi kunne derfor nu opskrive den fuldstændige løsning hertil. Den formel vi når frem til er imidlertid så klodset og lidet oplysende, at vi i stedet løser differentialligningen herfra i hvert konkret tilfælde.

Første konklusion om Bernouillis differentialligning:

Ligningen $y' = g(x) \cdot y^\alpha - f(x) \cdot y$, hvor $\alpha \neq 0$ og $\alpha \neq 1$ løses i det generelle tilfælde efter følgende opskrift:

1. Indfør substitutionen $z = y^{1-\alpha}$.

2. Løs den lineære 1. ordens differentialligning:

$$z' = -(1-\alpha) \cdot f(x) \cdot z + (1-\alpha) \cdot g(x)$$

3. Substituer tilbage og find $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

4. Bestem definitionsmængden for y . Bemærk, at selv om vi i omskrivningerne ovenfor har forudsat $y \neq 0$, så kan det godt tænkes, at vi i tilfældet $\alpha > 0$ får udvidet definitionsmængden til også at omfatte tal, der giver $y = 0$

ØVELSE 2. Før vi ser vi nogle eksempler og øvelser i relation til det generelle tilfælde vil vi betragte specialtilfældet, hvor $f(x)$ og $g(x)$ er konstanter, henholdsvis b og a .

1. Vis at vi i så fald får:

$$\begin{aligned}
y' &= ay^\alpha - by && \Leftrightarrow \\
z' &= (1-\alpha) \cdot a - (1-\alpha) \cdot b \cdot z, && \text{hvor } z = y^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

2. Anvend løsningsformlen for denne type differentialligning til at bestemme den fuldstændige løsning:

$$z = c \cdot e^{-(1-\alpha)bx} + \frac{a}{b}$$

Gennem øvelse 2 har vi argumenteret for:

Anden konklusion om Bernouillis differentialligning:

Den fuldstændige løsning til differentialligningen: $y' = ay^\alpha - by$, hvor $\alpha \neq 0$ og $\alpha \neq 1$,

findes som løsningen til: $y^{1-\alpha} = c \cdot e^{-(1-\alpha)bx} + \frac{a}{b} \quad \vee \quad y = 0$.

EKSEMPEL 1. Løs differentiallygningen: $y' = y + y^3$.

Vi bemærker dette er en Bernoulli differentiallygning, med konstante koefficienter og med $\alpha = 3$. Så kan vi simpelthen indsætte i formlen i 2. konklusion, med $a = 1$, $b = -1$ (idet vi kalder den uafhængige variabel for t):

$$y^{1-3} = c \cdot e^{-(1-3) \cdot (-1)t} + \frac{1}{-1} \quad \vee \quad y = 0$$

eller:
$$y^{-2} = c \cdot e^{-2t} + \frac{1}{-1} \quad \vee \quad y = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{ce^{-2t} - 1}} \quad \vee \quad y = -\sqrt{\frac{1}{ce^{-2t} - 1}} \quad \vee \quad y = 0$$

Definitionsmængden bestemmes:

$$c \cdot e^{-2t} - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$c \cdot e^{-2t} > 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{2t} < c$$

Dvs kun positive c -værdier er mulige

For en given c -værdi får vi:

$$e^{2t} < c \quad \Leftrightarrow \quad t < \frac{1}{2} \ln(c) \quad ,$$

så $D_m(f) =]-\infty ; \frac{1}{2} \ln(c)[$

ØVELSE 3. Undersøg grafens forløb for $t \rightarrow -\infty$ og for $t \rightarrow \frac{1}{2} \ln(c)$, og skitser det grafiske forløb.

EKSEMPEL 2. Bestem den løsning til differentiallygningen : $y' = 3y^{0,5} - 0,5y$, hvis graf går gennem punktet $P(0,4)$.

Før vi går i gang registrerer vi lige, at $y^{0,5}$ kun har mening for $y \geq 0$.

Vi bemærker det er en Bernoulli differentiallygning med $a = 3$, $b = 0,5$, $\alpha = 0,5$, og vi ind-sætter:

$$y^{1-0,5} = c \cdot e^{-(1-0,5) \cdot 0,5t} + \frac{3}{0,5} \quad \vee \quad y = 0$$

eller
$$y^{0,5} = c \cdot e^{-0,25t} + 6 \quad \vee \quad y = 0$$

Punktet $P(0,4)$ fortæller, at den søgte løsning ikke kan være $y = 0$. Indsæt $(0,4)$:

$$4^{0,5} = c \cdot e^0 + 6 \quad , \text{ hvoraf vi får: } c = -4$$

Indsæt c :
$$y^{0,5} = -4 \cdot e^{-0,25t} + 6$$

y findes nu ved at kvadrere, men derved regner vi ikke længere ensbetydende, så D_m fast-lægges på dette sted.

$$y \geq 0 \quad \text{kræver at: } -4 \cdot e^{-0,25t} + 6 \geq 0$$

Ved at løse denne ulighed får vi :
$$t \geq -\frac{\ln(1,5)}{0,25} \quad \text{eller} \quad t \geq -4 \ln(1,5) .$$

Tilnærmet får vi: $t \geq -1,62$,
 Konklusionen bliver derfor, at den søgte løsning er:
 $y = (-4 \cdot e^{-0,25t} + 6)^2$, $t \in [-1,62; \infty[$

ØVELSE 4. Undersøg grafens forløb for $t \rightarrow \infty$ og for $t \rightarrow -4 \ln(1,5)$, og skitser det grafiske forløb.

EKSEMPEL 3. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen:

$$(1-x^2) \cdot y' - x \cdot y = x \cdot y^2, \text{ i strimlen: } -1 < x < 1$$

Vi starter med at omskrive, så vi kan genkende det som en Bernouilli differentialligning (hvorfor må vi gøre det):

$$y' = \frac{x}{(1-x^2)} \cdot y^2 + \frac{x}{(1-x^2)} \cdot y$$

Vi bemærker, at ligningen nu har samme form som (*), hvor:

$$f(x) = \frac{x}{(1-x^2)}, \quad g(x) = -\frac{x}{(1-x^2)}, \quad \text{og } \alpha = 2$$

Vi følger første konklusion og substituerer: $z = y^{1-\alpha} = y^{1-2} = y^{-1}$, og får.

$$z' = -(1-2) \cdot \frac{-x}{(1-x^2)} \cdot z + (1-2) \cdot \frac{x}{(1-x^2)}$$

eller
$$z' = -\frac{x}{(1-x^2)} \cdot z - \frac{x}{(1-x^2)} \quad (***)$$

Vi får nu brug for formelen til løsning af lineære 1.ordens differentialligninger:

Samtlige løsninger til differentialligningen:

$$y' = f(x) \cdot y + g(x),$$

hvor f og g er tilfældige kontinuerte funktioner, er funktionerne med forskriften:

$$y = ce^{F(x)} + e^{F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{-F(x)} dx$$

hvor c er en konstant og F er en stamfunktion til f.

ØVELSE 5. For at løse denne lineære differentialligning (***) skal vi således først finde en stamfunktion $F(x)$ til funktionen $\frac{-x}{(1-x^2)}$.

Vis at $F(x) = \frac{1}{2} \ln(1-x^2) = \ln((1-x^2)^{\frac{1}{2}})$ (evt. på nær en konstant).

Hvorfor er der ingen problemer i at opskrive $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, dvs. $\sqrt{(1-x^2)}$?

Anvend nu løsningsformlen på (***):

$$z = ce^{\ln((1-x^2)^{0,5})} + e^{\ln((1-x^2)^{0,5})} \cdot \int \frac{-x}{1-x^2} \cdot e^{-\ln((1-x^2)^{0,5})} dx \quad \Leftrightarrow$$

$$z = c \cdot (1-x^2)^{0.5} + (1-x^2)^{0.5} \int \frac{-x}{1-x^2} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^{0.5}} dx \quad \Leftrightarrow$$

$$z = c \cdot (1-x^2)^{0.5} + (1-x^2)^{0.5} \int \frac{-x}{(1-x^2)^{3/2}} dx$$

ØVELSE 6. Vis at løsningen bliver: $z = c \cdot (1-x^2)^{0.5} - 1$

Ved at substituere tilbage får vi endelig: $y = \frac{1}{c \cdot (1-x^2)^{0.5} - 1}$

c fastlægges af et givet punkt (en begyndelsesbetingelse).

Dm bliver en del af intervallet]-1 ; 1[og fastlægges ved hjælp af punktet.

ØVELSE 7. Bestem den endelige forskrift og definitionsmængde for en løsning hvis graf går gennem P(0,2). Samme spørgsmål med punktet Q(-0.5,5).

ØVELSE 8. Start med at fastlægge områderne, hvor vi kan regne, i de følgende opgaver

1. Bestem den fuldstændige løsning til $y' = y - y^3$

2. Bestem den fuldstændige løsning til $y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}$

3. Bestem den fuldstændige løsning til $y' + y = xy^3$

4. Bestem den løsning til differentialligningen: $y' + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3}$, der opfylder $y(1) = 2$

5. Bestem den løsning til $xy' + y = (xy)^{\frac{3}{2}}$, der opfylder $y(1) = 4$

6. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen: $y' - \frac{3}{x}y = \frac{3}{x}y^{\frac{2}{3}}$