Den lineære differentialligning af 2. orden

Gorm Claussen

Resumé

Disse noter gennemgår noget af teorien for lineære differentialligninger. Noterne vil kunne anvendes til det valgfri emne på det 3-årige højniveau, hvis man har anvendt en lærebog, der benytter Wronskideterminanten. Indholdet svarer nogenlunde til de fire første minimoduler af en forelæsningsrække på 15 minimoduler, jeg har holdt ved Aalborg Universitet over emnet Ordinære og partielle differentialligninger.

Indhold

1 Indledning

Til den skriftlige studentereksamen kan der stilles opgaver af typen

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = Ky$$

Vi har fundet den fuldstændige løsning til denne type differentialligning, således, at vi faktisk har en færdig formel i tilfældet $k \neq 0$: [3]

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = k^2y \Leftrightarrow y = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -k^2y \Leftrightarrow y = c_1\cos kx + c_2\sin kx$$

2 Det generelle tilfælde

Vi skal nu se på det almindelige tilfælde, nemlig en differentialligning af formen:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y(x) = f(x) \tag{2.1}$$

Her betegner $p(x)$ og $q(x)$ to kendte funktioner af x. Højre side af ligningen kaldes normalt for *input*, medens den ukendte funktion $y(x)$ som vi skal finde, kaldes *output*.

Eksempel

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x^2}y(x) = \sin x$$

Her er $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = \frac{1}{x^2}$. Ligningen er *inhomogen*. Den tilsvarende *homogene* ligning er kendetegnet ved at systemets *input* $= 0$.

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y(x) = 0 \tag{2.2}$$

Antag at vi har fundet to forskellige løsninger $y_1(x)$ og $y_2(x)$ til ligningen (2.2). Det kan meget vel være indviklet at finde sådanne to! Vi danner en ny funktion $y = c_1y_1 + c_2y_2$. Med andre ord en *linearkombination* af y_1 og y_2, og undersøger, om y er en løsning til (2.2). Vi differentierer to gange og gør prøve i (2.2):
$y' = c_1y_1' + c_2y_2'$ og $y'' = c_1y_1'' + c_2y_2''$ og får ved indsættelse i (2.2):

$$c_1y_1'' + c_2y_2'' + p(x)[c_1y_1' + c_2y_2'] + q(x)[c_1y_1 + c_2y_2] = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$c_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + c_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

Forklaring: Den første firkantede parentes er lig 0 fordi y_1 er løsning til (2.2). Det samme gælder for den anden parentes. Vi har nu vist, at hver gang vi har fundet 2 løsninger til (2.2), så vil enhver *linearkombination* af disse to også være en løsning til (2.2).
Har vi så fundet samtlige løsninger til (2.2)? Spørgsmålet kan besvares med et ja, hvis de to funktioner y_1 og y_2 er *lineært uafhængige*. Mængden af løsninger til (2.2) udgør et *vektorrum* lige som vektorerne i planen.
Bemærk, at dette naturligvis ikke er et bevis. Et rigoristisk bevis vil gå ud på at vise, at enhver løsning til (2.2) kan skrives som en linearkombination af de to ikke-proportionale løsninger y_1 og y_2. Se appendix D. Vi minder om, at to funktioner y_1 og y_2 er lineært uafhængige hvis og kun hvis *Wronskideterminanten* $W(y_1, y_2) \neq 0$ [1]

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Bemærk, at den sætning vi har vist ovenfor *ikke* giver nogensomhelst anvisning på at finde de to funktioner y_1 og y_2. Men problemet med at finde samtlige ($2 \cdot \infty$ mange) løsninger til (2.2) nu er blevet væsentligt reduceret... Vi skal nu kun finde 2. Vi skal nu se, at vi kan reducere problemet yderligere.

3 Ordensreduktion

Lad os nu antage, at vi har fundet en løsning y_1 til (2.2), som har den egenskab at $y_1(x) \neq 0 \quad \forall x \in Dm$
Vi ved, at der findes en anden løsning $y_2(x)$ til (2.2), som er lineært uafhængig med $y_1(x)$ - vi kender den bare ikke endnu. Nu definerer vi en ny *ukendt* funktion $v(x)$ således: $v(x) = \frac{y_2(x)}{y_1(x)}$. Bemærk, at $y_1(x) \neq 0$.
Hvis vi kan bestemme den ukendte funktion $v(x)$, har vi fundet den ønskede funktion $y_2(x)$ fordi $y_2(x) = v(x)y_1(x)$. Heraf fås så: $y_2' = v'y_1 + vy_1'$ og videre $y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$
Dette indsætter vi i ligning (2.2) og udnytter, at y_2 er en løsning:

$$v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' + p(x)[v'y_1 + vy_1'] + q(x)vy_1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$v[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + v''y_1 + 2v'y_1' + p(x)v'y_1 = 0$$

Den firkantede parentes er 0 fordi y_1 er løsning til (2.2). Her af fås så:

$$v''y_1 + 2v'y_1' + p(x)v'y_1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$y_1 v'' + [2y_1' + p(x)y_1]v' = 0$$

Vi sætter nu $v' = u$, hvor u er en ny ukendt funktion, og får:

$$y_1 u' + [2y_1' + p(x)y_1]u = 0 \tag{3.1}$$

Bemærk, at y_1 og den firkantede parentes nu er kendte funktioner af x. Ligningen (3.1) er en 1. ordens differentialligning i den ukendte funktion u. Vi har opnået en *ordensreduktion.* Ligning (3.1) kan vi løse med den metode, der kaldes *separation af de variable*:

$$\begin{aligned}
(3.1) \quad \Leftrightarrow \quad y_1\frac{du}{dx} &= -[2y_1' + p(x)y_1]u \quad \Leftrightarrow \\
\frac{du}{u} &= -[2\frac{y_1'}{y_1} + p(x)]dx \quad \Leftrightarrow \\
\int \frac{\mathrm{d}u}{u} &= -\int 2\frac{y_1'}{y_1}\mathrm{d}x - \int p(x)\mathrm{d}x + C_1 \quad \Leftrightarrow \\
\ln|u| &= -\int 2\frac{y_1'}{y_1}\mathrm{d}x - \int p(x)\mathrm{d}x + C_1
\end{aligned}$$

Vi ser nu på det første integrale:

$$-\int 2\frac{y_1'}{y_1}\mathrm{d}x = -\int 2\frac{dy_1}{dx}\frac{1}{y_1}\mathrm{d}x = -2\int \frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} = -2\ln|y_1| = -\ln(y_1^2)$$

Heraf fås så:

$$\begin{aligned}
\ln|u| &= -\ln(y_1^2) - \int p(x)\mathrm{d}x + C_1 \quad \Leftrightarrow \\
|u| &= e^{-\ln(y_1^2) - \int p(x)\mathrm{d}x + C_1} \quad \Leftrightarrow \\
|u| &= e^{-\ln(y_1^2)} \cdot e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \cdot e^{C_1} \quad \Leftrightarrow \\
|u| &= C_2 \cdot \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \quad \Leftrightarrow \\
u &= C_3 \cdot \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \quad \Leftrightarrow \qquad (\quad C_3 = \pm C_2) \\
v'(x) &= C_3 \cdot \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \quad \Leftrightarrow \\
v(x) &= C_3 \int \frac{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}{y_1^2}\, dx + C_4
\end{aligned}$$

Nu har vi fundet $v(x)$. Eller rettere sagt, vi har fundet en hel masse forskellige. Vi skal kun bruge en enkelt af dem og sætter derfor $C_3 = 1$ og $C_4 = 0$, og får herved slutresultatet:

$$y_2(x) = v(x) \cdot y_1(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}{y_1^2}\, dx \tag{3.2}$$

3.1 Eksempel

Givet den homogene differentialligning $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$
Det overlades til læseren at vise, at funktionen $y_1(x) = x^3$ er en løsning til denne differentialligning.
Nu antager vi, at $x > 0$ og dividerer igennem med x^2 i ligningen:

$$y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{9}{x^2}y = 0 \qquad \Rightarrow \quad p(x) = -\frac{5}{x}$$

Bemærk, at $y_1(x) \neq 0$ som følge af antagelsen. Vi vil nu finde en anden løsning y_2 til differentialligningen. Hertil benytter vi formelen (3.2).

$$y_2(x) = x^3 \int \frac{e^{-\int \frac{-5}{x}\,\mathrm{d}x}}{x^6}\,\mathrm{d}x = x^3 \int \frac{e^{5\ln x}}{x^6}\,\mathrm{d}x = x^3 \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x^3 \ln x$$

Vi har nu faktisk fundet den *fuldstændige* løsning til en temmelig kompliceret differentialligning udelukkende med anvendelse af gymnasiematematik. Vi har nemlig:

$$y_h(x) = C_1x^3 + C_2x^3 \ln x, \quad x > 0, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

3.2 Opgave

Kan du ved at se på den differentialligning, vi har løst komme i tanker om en egenskab ved den, der gør, at det er rimeligt at gætte på løsninger af formen $y_1(x) = x^r$?

3.3 Svær opgave

Kan du vise, at den funktion $y_2(x)$ vi nåede frem til i formel (3.2), faktisk *ikke* er proportional med $y_1(x)$?

4 Den inhomogene ligning

Vi skal nu se på den *inhomogene* ligning (2.1)

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y(x) = f(x)$$

hvor input $f(x)$ er en given funktion.
Vi skal vise, at den fuldstændige løsning til (2.1) er givet ved funktionsfamilien $y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$, hvor y_p betegner *en* af løsningerne til den inhomogene ligning, og de to første led angiver den fuldstændige løsning til den homogene ligning (2.2).

4.1 Opgave

Antag at y_1 og y_2 begge er løsninger til (2.2) og y_p er en løsning til (2.1). Eftervis at $y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$ så er en løsning til (2.1).

Den løsning y_p, som man åbenbart får brug for til at bestemme den fuldstændige løsning til (2.1) kaldes en *partikulær* løsning. Hvordan finder man den? I mange praktisk forekommende opgaver gætter man på en løsning y_p og prøver så om man har gættet rigtigt. Vi skal nu se, at man faktisk kan opstille en formel til beregning af y_p forudsat, at man kender to lineært uafhængige løsninger y_1 og y_2 til den homogene ligning (2.2).
Metoden vi skal anvende kaldes *variation af konstanterne*.
Vi har følgende: Den fuldstændige løsning til (2.2) er givet ved $y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, hvor y_1 og y_2 er to lineært uafhængige løsninger til (2.2). Vi vil nu forsøge at finde en partikulær løsning af formen $y_p(x) = u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$. Eller kortere $y_p = u_1y_1+u_2y_2$. Bemærk at vi formelt har erstattet de to konstanter c_1 og c_2 med funktioner.
Nu vil vi stille et krav til de to ukendte funktioner, nemlig:

$$y_p' = u_1y_1' + u_2y_2' \tag{4.1}$$

Bemærk at det betyder, at funktionen y_p differentieres som om u_1 og u_2 er konstanter. Dette krav er åbenbart ensbetydende med:

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \tag{4.2}$$

Vi skal nu undersøge om en således defineret funktion y_p *kan* være løsning til (2.1). Hvis vi under denne undersøgelse finder frem til en formel for de to ukendte funktioner u_1 og u_2, så er vi faktisk færdige. (Overvej det) Vi differentierer y_p en gang mere:

$$y_p'' = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2''$$

Vi gør prøve i (2.1):

$$u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'' + p(x)[u_1y_1' + u_2y_2'] + q(x)[u_1y_1 + u_2y_2] = f(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + u_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] = f(x) \quad \Leftrightarrow$$
$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x)$$

Forklaring: De to firkantede parenteser giver begge 0 fordi y_1 og y_2 er løsninger til (2.2).
Nu har vi to ligninger til at bestemme de ukendte funktioner u_1' og u_2':

$$y_1u_1' + y_2u_2' = 0 \tag{4.3}$$

$$y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x) \tag{4.4}$$

Dette ligningssystems determinant er:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Men det er jo netop *Wronskideterminanten* $W(y_1, y_2)$, som jo efter vores antagelse er forskellig fra 0. Efter determinantmetoden (fra 1.g) får vi så: [3]

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{-f(x)\ y_2}{W(y_1, y_2)}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{f(x)\ y_1}{W(y_1, y_2)}$$

Heraf fås så:

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)}\,\mathrm{d}x \quad \text{og} \quad u_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)}\,\mathrm{d}x$$

Således at vi nu har slutformelen for en partikulær løsning:

$$y_p(x) = -y_1(x) \cdot \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)}\,\mathrm{d}x + y_2(x) \cdot \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)}\,\mathrm{d}x$$

Konklusion: Den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning (2.1) kan findes, når blot vi kender *en* nulpunktsfri løsning til den homogene ligning (2.2).

4.2 Eksempel

Givet differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6y(x) = 0 \tag{4.5}$$

Det er let at vise – og det overlades til læseren – at den fuldstændige løsning til (4.5) er givet ved $y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$. Nu vil vi løse den tilsvarende inhomogene ligning:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6y(x) = e^x \tag{4.6}$$

Vi skal først finde en partikulær løsning til (4.6) og går frem som følger:
$y_1 = e^{2x}$ $\qquad y_2 = e^{3x}$ $\qquad f(x) = e^x$ hvoraf følger:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} - 2e^{5x} = e^{5x}$$

$$y_p(x) = -e^{2x} \cdot \int \frac{e^{3x} \cdot e^x}{e^{5x}} \,\mathrm{d}x + e^{3x} \cdot \int \frac{e^{2x} \cdot e^x}{e^{5x}} \,\mathrm{d}x \qquad \text{som} \quad \text{giver :}$$

$$y_p(x) = -e^{2x} \cdot \int e^{-x} \,\mathrm{d}x + e^{3x} \cdot \int e^{-2x} \,\mathrm{d}x = e^x - \frac{1}{2}e^x = \frac{1}{2}e^x$$

Den fuldstændige løsning til (4.6) er da givet ved:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{2}e^x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

4.3 Opgave

Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6y(x) = e^{2x}$$

Bemærkning: Man opdager sikkert at den partikulære løsning *ikke* bliver det, man ville have forventet. Prøv at overveje, hvordan det kan være.

5 Specielle differentialligninger

Mange differentialligninger – selv blandt de lineære – har den kedelige egenskab, at man ikke kan finde eksakte løsninger til dem – selv ikke hvis man inddrager nye funktionsklasser – de såkaldte højere funktioner. Andre er forholdsvis elementære at løse. Til de letteste hører de neden for omtalte.

5.1 Differentialligninger med konstante koefficienter

$$a\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + cy(x) = 0 \tag{5.1}$$

Ligning (5.1) er et eksempel på en differentialligning med konstante koefficienter. For at finde den fuldstændige løsning til den, skal vi blot have fundet en enkelt løsning. Vi gætter på en løsning af formen $y = e^{\lambda x}$. Vi differentierer to gange og gør prøve i (5.1) og når derved frem til den såkaldte *Karakterligning*:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{5.2}$$

Ligning (5.2) er en 2.-gradsligning. Der er som bekendt 3 muligheder:

1. $D > 0 \quad \Rightarrow$ to løsninger λ_1, λ_2
2. $D = 0 \quad \Rightarrow$ en dobbeltrod λ
3. $D < 0 \quad \Rightarrow$ ingen reelle rødder

I tilfælde 1. finder vi to forskellige løsninger til ligning (5.1) $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ og $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ således at den fuldstændige løsning er givet ved

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

I tilfælde 2. har vi kun en løsning $y_1(x) = e^{\lambda x}$. Den anden finder vi ved hjælp af formel (3.2). Det overlades til læseren at vise at $y_2(x) = xe^{\lambda x}$, således at den fuldstændige løsning i dette tilfælde er givet ved:

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

I tilfælde 3. er der ingen reelle rødder, men der er to komplekse. Komplekse tal hører ikke mere til i Gymnasiets pensum, men det er et meget populært valgfrit emne. Hvis man ikke har haft komplekse tal, er det følgende selvfølgeligt uforståeligt. Vi ser på tilfælde 3. hvor karakterligningens diskriminant $D < 0$. Uden bevis anføres, at den fuldstændige løsning til ligning (5.1) er givet ved:

$$y_h(x) = e^{-\alpha x}(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x)$$

Hvor $\alpha = \frac{b}{2a}$ og $\omega = \frac{\sqrt{-D}}{2a}$

5.2 Differentialligninger af Euler-Cauchy typen

Differentialligninger uden konstante koefficienter er ofte indviklet at løse, men der er dog undtagelser. Lad os vende tilbage til eksemplet på side 4: $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$. Potensfunktioner x^r har den egenskab, at når man differentierer dem falder potensen med 1. I denne differentialligning bliver leddet med y'' ganget med x^2, medens leddet med y' bliver ganget med x. Det tyder på at en funtion som $y = x^r$ kunne tænkes at være løsning. Vi prøver: $y' = rx^{r-1}$ og $y'' = r(r-1)x^{r-2}$, som vi indsætter:

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} - 5xrx^{r-1} + 9x^r = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$r(r-1)x^r - 5rx^r + 9x^r = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^r[r(r-1) - 5r + 9] = 0$$

Hvis det skal gælde for alle x i et interval, så må den firkantede parentes være lig med 0. Heraf fås *den karakteristiske ligning*:

$$r(r-1) - 5r + 9 = 0 \tag{5.3}$$

Denne 2.-gradsligning har dobbeltroden $r = 3$, hvoraf vi får en løsning til differentialligningen $y_1(x) = x^3$ ligesom på side 6.
Hvis den karakteristiske ligning til en differentialligning af denne type har to forskellige røder f. eks. $\frac{2}{3}$ og 4, så er den fuldstændige løsning givet ved

$$y_h(x) = c_1 x^{\frac{2}{3}} + c_2 x^4$$

I de tilfælde, hvor den karakteristiske ligning har komplekse rødder, kommer den fuldstændige løsning til at se noget speciel ud. Uden bevis anføres det, at differentialligningen $x^2y'' + 7xy' + 13y = 0$ har den fuldstændige løsning

$$y_h(x) = c_1 x^{-3} \cos(2 \ln x) + c_2 x^{-3} \sin(2 \ln x) \qquad [2]$$

A Maple

Komputeralgebrasystemet Maple kan løse differentialligninger både symbolsk og numerisk. Ligningen $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$ vil i Maplesproget se således ud:

$$< eq := x \wedge 2 * diff(y(x), x\$2) - 5 * x * diff(y(x), x) + 9 * y(x) = 0;$$

Bemærk semikolonet ";" i slutningen. Man får Maple til at finde den fuldstændige løsning ved at skrive:

$$< dsolve(eq, y(x));$$

Hvis man istedet vil have en numerisk løsning kan man gøre således:

$$< sol := dsolve(\{eq, ini\}, y(x), type = numeric);$$

hvor *ini* betyder startbetingelserne, der for eksempel kan specificeres således:

$$< ini := D(y)(1) = 0, y(1) = 2$$

Det betyder $y'(1) = 0$ og $y(1) = 2$. Hvis man ønsker at plotte grafen for løsningen skriver man:

$$< odeplot(sol, [x, y(x)], 1..10, numpoints = 200);$$

Dette sidste kræver at man i Maple har loadet en speciel hjælpepakke. Det gøres således:

$$< with(plots);$$

B Uddybning af forskellige emner

På side 10 blev det foreslået at vise, at en anden løsning er $y_2(x) = xe^{\lambda x}$. Beviset følger her: For at benytte formel (3.2) skal ligningen (5.2) være *normeret*. Vi dividerer igennem med a og får: $y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0$. Heraf fås, at $p(x) = \frac{b}{a}$. Vi gik ud fra, at karakterligningen $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ havde en dobbeltrod $\lambda = -\frac{b}{2a}$. Med anvendelse af formel (3.2) fås nu:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}{y_1^2}\,\mathrm{d}x = y_1(x) \int \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{y_1^2}\,\mathrm{d}x = y_1(x) \int \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{2\lambda x}}\,\mathrm{d}x$$

Da $2\lambda = -\frac{b}{a}$ fås så:

$$y_2(x) = y_1(x) \int 1\mathrm{d}x = xy_1(x) \qquad \text{QED}$$

På side 5 blev der nævnt den såkaldte *gættemetode*, hvor man gætter på en partikulær løsning til den inhomogene ligning, og derefter prøver om man har gættet rigtigt. Metoden fungerer ved *kvalificeret gæt*. Metoden virker, når input $f(x)$ er et polynomium, en eksponentialfunktion, sinus– eller cosinus–funktioner eller kombinationer heraf. D.v.s. sum–differens eller produkt. Man skal så gætte på en funktion $y_p(x)$ af samme type. Nedenstående tabel vil klargøre dette.

$f(x)$	$y_p(x)$
x^3	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
e^{2x}	Ae^{2x}
$8\sin 2x$	$A\cos 2x + B\sin 2x$
$5x\sin 2x$	$(Ax + B)(C\cos 2x + D\sin 2x)$

Men metoden virker *ikke*, hvis input $f(x)$ er en løsning til den *homogene* ligning. Man vil så ofte kunne klare sig ved at multiplicere gættene fra tabellen med x.

C Euler-Cauchy ligninger

Vi vil se på det almindelige tilfælde af en Euler-Cauchy ligning:

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + ax\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = 0 \tag{C.1}$$

Det er let at indse, at den karakteristiske ligning får formen

$$r(r-1) + ar + b = 0 \tag{C.2}$$

Der er nu tre muligheder for denne 2. grads–ligning:

1. $D > 0$. I dette tilfælde har vi to relle rødder r_1 og r_2.

2. $D = 0$. I dette tilfælde har vi en dobbeltrod r.

3. $D < 0$. I dette tilfælde er der et par af kompleks konjugerede rødder $\alpha \pm \jmath\beta$

I de tre tilfælde får vi at den fuldstændige løsning til den homogene ligning (C.1) er givet ved:

1. $y_h = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$

2. $y_h = c_1 x^r + c_2 x^r \ln x$

3. $y_h = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + c_2 x^\alpha \sin(\beta \ln x)$

Bevis:

1. Trivielt da x^{r_1} og x^{r_2} er lineært uafhængige, når $r_1 \neq r_2$.

2. Vi har en løsning til (C.1) nemlig x^r. For $x > 0$ er den nulpunktsfri og vi kan da bruge formelen fra *ordensreduktion.*[1]

$$y_2 = y_1 \int \frac{\mathrm{e}^{-\int p(x)\ \mathrm{d}x}}{y_1^2}\ \mathrm{d}x$$

   Koefficientfunktionen findes ved i ligning (C.1) at dividere igennem med x^2, således at vi får $p(x) = \frac{a}{x}$. Dobbeltroden r i ligning (C.2) er givet ved $r = \frac{1-a}{2} \Rightarrow y_1(x) = x^{\frac{1-a}{2}}$ og vi får så:

$$y_2 = y_1 \int \frac{\mathrm{e}^{-\int \frac{a}{x}\ \mathrm{d}x}}{x^{1-a}}\ \mathrm{d}x = y_1 \int \frac{x^{-a}}{x^{1-a}}\ \mathrm{d}x = y_1 \int x^{-1}\ \mathrm{d}x = y_1 \ln x$$

   Så mangler vi kun at vise – og det overlades til læseren – at y_1 og y_2 er lineært uafhængige.

[1]Formel (3.2)

3. I dette tilfælde har vi to forskellige komplekse rødder. Da ligning (C.2) er med relle koefficienter følger det af en sætning om komplekse polynomier, at rødderne er hinandens kompleks konjugerede. Altså: $r = \alpha \pm \jmath\beta$. Vi har nu to løsninger til (C.1): y_1^* og y_2^* givet ved:

$$y_1^* = x^{\alpha+\jmath\beta} = \mathrm{e}^{(\alpha+\jmath\beta)\ln x} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}[\cos(\beta \ln x) + \jmath \sin(\beta \ln x)] \tag{C.3}$$

$$y_2^* = x^{\alpha-\jmath\beta} = \mathrm{e}^{(\alpha-\jmath\beta)\ln x} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}[\cos(\beta \ln x) - \jmath \sin(\beta \ln x)] \tag{C.4}$$

Men de to fundne løsninger er komplekse funktioner. For at skaffe os nogle reelle løsninger danner vi linearkombinationer af y_1^* og y_2^*:

$$y_1 = \frac{y_1^* + y_2^*}{2} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \cos(\beta \ln x) = x^\alpha \cos(\beta \ln x) \tag{C.5}$$

$$y_2 = \frac{y_1^* - y_2^*}{2\jmath} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \sin(\beta \ln x) = x^\alpha \sin(\beta \ln x) \tag{C.6}$$

Vi mangler blot at vise, at y_1 og y_2 er lineært uafhængige. Gør det! Og får så:

$$y_h = x^\alpha[c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)]$$

Hermed er beviset ført.
Opgaver:

1. $x^2y'' + xy' - 12y = 0$
2. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$
3. $4x^2y'' + 8xy' - 3y = 0$
4. $2x^2y'' + 5y = 0$
5. Løs begyndelsesværdiproblemet $2x^2y'' + 5y = 2\sqrt{x} \quad \wedge \quad y(1) = y'(1) = 0$

Facit:

1. $y_h = c_1 x^{2\sqrt{3}} + c_2 x^{-2\sqrt{3}}$
2. $y_h = x^2[c_1 + c_2 \ln x]$
3. $y_h = c_1\sqrt{x} + c_2 x^{-\frac{3}{2}}$
4. $y_h = \sqrt{x}\ [c_1 \cos(\frac{3}{2} \ln x) + c_2 \sin(\frac{3}{2} \ln x)]$
5. Brug integralformelen og *husk på*, hvad der skal stå foran y''.

D Bevis for fuldstændighed

Lad os antage, at funktionerne y_1 og y_2 begge er løsninger til (2.2). Vi ser nu på Wronskideterminanten for de to funktioner. I det tilfælde, hvor vi har at gøre med den simple andenordensdifferentialligning $y'' = my$ er det vist i de fleste gymnasielærebøger, at Wronskideterminanten W er konstant. Dette gælder desværre ikke længere, når vi har at gøre med den almindelige ligning (2.2).

Vi har nu at $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$. Da både y_1 og y_2 er to gange differentiable, er også W differentiabel. Ved differentiation fås:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 \tag{D.1}$$

Nu udnytter vi, at både y_1 og y_2 er løsninger til (2.2) og får:
$y_1'' = -p(x) y_1' - q(x) y_1$ og $y_2'' = -p(x) y_2' - q(x) y_2$. Ved at indsætte dette i (D.1) fås efter lidt udregning:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W = -p(x) W \tag{D.2}$$

Differentialligningen (D.2) har naturligvis som en af sine løsninger nulfunktionen, altså den funktion, der er identisk $= 0$.
Vi antager nu at $W \neq 0$ og får:

$$\int \frac{\mathrm{d}W}{W} = -\int p(x)\mathrm{d}x + k \Leftrightarrow \ln|W| = -\int p(x)\mathrm{d}x + k \Leftrightarrow |W| = \mathrm{e}^k \cdot \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

Vi er nået frem til, at enten er $W = 0$ konstant, eller også er $W = k_0 \cdot \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ hvor konstanten $k_0 \neq 0$.[2]

Lad os nu antage, at vi har to løsninger y_1 og y_2 til (2.2), som *ikke* er proportionale. Det vil sige at $W \neq 0$, men W er *ikke* nødvendigvis konstant. Antag derefter, at y er en tredie løsning til (2.2). Nu skal vi vise, at y er en linearkombination y_1 og y_2.
Vi kan argumentere således: Da både y og y_1 er løsninger til (2.2) gælder der:

$$W(y, y_1) = k_1 \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{D.3}$$

Tilsvarende da både y og y_2 er løsninger:

$$W(y, y_2) = k_2 \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{D.4}$$

[2]Den opmærksomme læser vil måske indvende, at funktionen ganget på konstanten k_0 ikke nødvendigvis er en eksponentialfunktion. Overvej hvad der sker, hvis $p(x) = -\frac{1}{x}$.

Ved udregning af de to determinanter fås derefter:

$$yy_1' - y'y_1 = k_1 \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{D.5}$$

$$yy_2' - y'y_2 = k_2 \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{D.6}$$

Vi vil opfatte de to ligninger som to ligninger med to ubekendte, nemlig y og y'. Vi er kun interesseret i y. Vi løser ligningerne med lige store koefficienters metode: Vi ganger den øverste med y_2 og den nederste med y_1:

$$yy_2y_1' - y'y_1y_2 = y_2k_1 \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{D.7}$$

$$yy_1y_2' - y'y_1y_2 = y_1k_2 \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{D.8}$$

Ved at trække (D.7) fra (D.8) fås:

$$y(y_1y_2' - y_2y_1') = y_1k_2 \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} - y_2k_1 \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{D.9}$$

eller

$$y \cdot W = y_1k_2 \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} - y_2k_1 \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{D.10}$$

Nu kan vi isolere y:

$$y = k_2 \frac{\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}{W} y_1 - k_1 \frac{\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}{W} y_2 \tag{D.11}$$

Da vi fra tidligere har $W = k_0 \cdot \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ får vi nu:

$$y = \frac{k_2}{k_0} y_1 - \frac{k_1}{k_0} y_2 \tag{D.12}$$

Altså det ønskede resultat: $y = c_1y_1 + c_2y_2$, således at løsningen y er vist at være en linearkombiation af de to givne løsninger y_1 og y_2.

Litteratur

[1] Carstensen & Frandsen: MAT 3A, Systime 1999

[2] Edwards & Penney: Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems, Prentice–Hall 1993

[3] Matematisk Formelsamling Gymnasiet