Matematiske Fiskerimodeller.

De første matematiske fiskerimodeller blev skabt i Storbritannien i 50' erne. Målet med modellerne var at regne sig frem til, hvordan man på længere sigt får den størst mulige fangst.

Man så på hver fiskeart for sig (kaldes én-arts-model) og var således ikke opmærksom på, at der kunne være et samspil mellem de forskellige fiskebestande. Man gik således ud fra, at en regulering af fiskeriet på en bestand ikke havde afsmittende virkning på andre bestande.

I starten af 70' erne begyndte danske fiskeribiologer med kendskab til matematik at sætte spørgsmålstegn ved denne antagelse. Ved brug af matematiske modeller skabte de en model af Nordsøen, den såkaldte *Nordsømodel*

Vi skal i det følgende se på en matematisk en-arts-model.

Definitioner:

N(t) = antal af fisk til tidspunktet t

$w(t)$ = vægten af en enkelt fisk til tidspunktet t

Bertalanffys ligning:

Vi husker, at $w'(t)$ angiver den hastighed hvormed vægtændringen foregår til tidspunktet t.
Bertalanffy opstillede følgende model for vægtændringen:

$$w'(t) = \mathrm{h} \cdot (w(t))^{\frac{2}{3}} - \mathrm{k} \cdot w(t)$$, hvor h og k er positive tal.

Begrundelse for denne model findes i bilaget om Bertalanffy-modellen.

ØVELSE 1. Argumenter for at Bertalanffy's ligning er en Bernouilli-ligning, og vis at den fuldstændige læsning til ligningen er:

$$w(t) = \left(-\tfrac{\mathrm{h}}{\mathrm{k}} \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot kt} + \tfrac{\mathrm{h}}{\mathrm{k}}\right)^3$$

eller: $$w(t) = \left(\tfrac{\mathrm{h}}{\mathrm{k}}\right)^3 \left(1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot kt}\right)^3$$

når vi antager at $w(t)$ = 0 til tidspunktet t =0 (fisken vejer ikke meget til at starte med).

ØVELSE 2. Gør rede for at grafen for w har en vandret asymptote når $t \to \infty$
Prøv at tegne grafen for w når $\left(\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{k}}\right)^3 = 5$, I hvert af tilfældende:
k = 0,4, k = 0,8 og k = 1,2
Vi vender nu tilbage til N(t) = antallet af fisk til tidspunktet t og antager at fiskebestanden ikke er udsat for fiskeri.

ØVELSE 3. Argumenter for at N(t) må opfylde :

$$N'(t) = -a \cdot N(t),$$

hvor a er den brøkdel af fiskene, der dør pr tidsenhed.

Bestem herefter N(t).

ØVELSE 4. B(t) = den samlede fiskemængde til tidspunktet t
Argumenter for at B(t) = N(t)·$w(t)$
Gør rede for at B(t) er størst når $t = -\frac{3}{k} \cdot \ln(\frac{a}{a+k})$
(*vink: skriv* $B(t) = N(t) \cdot (G(t))^3$ *, hvor* $G(t) = (-\frac{h}{k} \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot kt} + \frac{h}{k})$,
Bestem ud fra dette: $B'(t) = N(t) \cdot (G(t))^2 \cdot (-aG(t) + 3G'(t))$,
løs ligningen $B'(t) = 0$ *og indsæt udtrykkene for G(t) og* $G'(t)$)
Giv en sproglig fremstilling af, hvad du har fundet ud af.

Fangstligningen

Den samlede biomasse af én årgang er ifølge det foregående:

B(t) = N(t)·$w(t)$

hvor: N(t): antal fisk til tiden t
w(t): gennemsnitsvægten af en fisk til tiden t.

ØVELSE 5. I øvelse 3 så vi på, at N(t) må opfylde :

$$N'(t) = -a \cdot N(t),$$

hvor a er den brøkdel af fiskene, der dør pr tidsenhed.
Tallet a består af et bidrag fra naturlig død, M og et bidrag fra fiskeriet, f så ligningen kan forfines til: $N'(t) = -(M + f) \cdot N(t)$,
hvor M er den brøkdel af fiskene, der pr tidsenhed dør naturligt, og f er fiskeriintensiteten, dvs den brøkdel af fiskene, der pr tidsenhed fanges (f er feks 0,2 eller 20%).
Ved at løse ligningen får vi:

$$N(t) = k \cdot e^{-(M+f)t}$$

Denne ligning gælder fra og med vi begynder at fiske. Lad os antage, at vi først begynder at fiske efter t_c år, dvs efter at årgangen har nået en vis størrelse.
Før vi begynder at fiske udvikler antallet af fisk sig efter udtrykket følgende udtryk:

$N(t) = N_0 \cdot e^{-Mt}$, hvor N_0 angiver antallet af nyklækkede fisk (feks 2 millioner)

Vis at $k = N_0 \cdot e^{f\,t_c}$

Ud fra Øvelse 5 finder vi ved indsættelse:

$N(t) = N_0 \cdot e^{f \cdot t_c} \cdot e^{-(M+f)t}$, der er gyldig for $t > t_c$, hvor:

t_c er det tidspunkt, vi begynder at fange af årgangen (feks når fiskene er 2 år gamle)
N_0 er antallet af nyklækkede fisk, som "starter" årgangen (N_0 er feks 2 million);
t regnes ud fra "fødslen" af denne årgang.
M er den brøkdel af fiskene, der pr tidsenhed dør naturligt,

f er fiskeriintensiteten, dvs den brøkdel af fiskene, der pr tidsenhed fanges.

Vi fandt tidligere, at den enkelte fisk's vægt kunne beskrives ved:

$$w(t) = (\tfrac{h}{k})^3 (1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot kt})^3 \ ,$$

samt at tallet $w_\infty = (\frac{h}{k})^3$ er den maksimale vægt for pågældende fiskeart (den asymptotiske grænse for *w(t)*).

k er en proportionalitetskonstant fra "nedbrydningsleddet" ved differentialligningen for *w(t)*.

Sættes de to udtryk ind får vi følgende:

$$B(t) = w_\infty \cdot N_0 \cdot e^{f \cdot t_c} \cdot e^{-(M+f)t} \cdot (1 - e^{-\frac{k}{3} \cdot t})^3$$

Den samlede biomasse og den samlede fangst.

Vi antager alle årgange har samme startværdi N_0.

Et bestemt år indeholder Nordsøen fisk fra mange årgange: 1 år gamle, 2 år gamle osv ... T år gamle, hvis vi siger denne type fisk højst bliver T år i alt.

Den samlede biomasse af denne fiskeart er således summen af alle årgangenes bidrag.

Fangsten sker med en intensitet på f. Fiskenes årgange er spredt mellem hinanden, så vi fanger samme andel af alle årgange ældre end t_c.

ØVELSE 6

Argumenter for, at den samlede fangst Y er

$$Y = f \cdot \int_{t_c}^{T} B(t)\, dt$$

dvs: $$Y = f \cdot \int_{t_c}^{T} w_q \cdot N_0 \cdot e^{f \cdot t_c} \cdot e^{-(M+f)t} \cdot (1 - e^{-\frac{k}{3} \cdot t})^3\, dt$$

ØVELSE 7

Indsæt følgende konstanter: $f = 1$, $t_c = 2$, $T = 16$, w_q A $N_0 = 10^6$, $k = 1{,}5$, $M = 0{,}1$.

1) Vis: $(1 - e^{-0,5 \bullet t})^3 = 1 - 3\, e^{-0,5\, t} + 3\, e^{-t} - e^{-1,5\, t}$

2) Indsæt dette og beregn integralet ved hjælp af stamfunktioner:

Vis: $$Y = 10^6 \cdot e^2 \left[-\frac{1}{1{,}1} e^{-1,1\, t} + \frac{3}{1{,}6} e^{-1,6\, t} - \frac{3}{2{,}1} e^{-2,1\, t} + \frac{1}{2{,}6} e^{-2,6\, t} \right]_2^{16}$$

3) Udregn Y for disse værdier af konstanterne.

ØVELSE 8

Tilsvarende kan det vises med bogstaver:

$$Y = f \cdot w_q \cdot N_0 e^{f\, t_c} \cdot \Big[-\frac{1}{f+M} \cdot e^{-(f+M)t} + \frac{3}{f+M+k/3} \cdot e^{-(f+M+k/3)t} - \frac{3}{f+M+2k/3} \cdot e^{-(f+M+2k/3)t} + \frac{1}{f+M+k} \cdot e^{-(f+M+k)t} \Big]_{t_c}^{T}$$

Vi er interesseret i at finde sammenhængen mellem Y og f, samt mellem Y og t_c. f kan reguleres ved kvoter, antal trawlere osv. t_c kan reguleres ved garnmaskernes størrelse (overvej!).
Disse to sammenhænge kan vi finde på flere måder. Vælg én af følgende:

ØVELSE 9. (Version A)
Indtast formlen i din *lommeregner* med *bogstaver* på bogstavernes plads.
Læg samme talstørrelser ind på konstanternes plads, som i 2b.
Begynd nu at *variere* f: Udregn værdien Y for f = 0,05, 0,1, 0,15,... 1.
Værdierne plottes ind i et koordinatsystem.
Hvilken fiskeriintensitet giver maksimalt udbytte?
Hold dernæst f fast på feks 0,15, og varier t_c: 0,5, 1, 1,5, 2,5, ... 8.
Plot igen ind og find den værdi af t_c der giver bedste resultat.

ØVELSE 9 (Version B)
Indtast formlen i *multimat-programmet* med de givne konstanter bortset fra f, der skrives med bogstavet f. Lav *numerisk integration* med varierende f-værdier, Gennemfør så samme procedure som i 3a.
Gentag processen med t_c.

ØVELSE 9 (Version C)
Udnyt et regneark. Formlen *er* indtastet i et ark, kaldet "intensit", som du kan kalde frem.
Lav nu tabelværdier for f, og beregn de tilsvarende Y-værdier ved hjælp af regnearket.
Tegn grafen og find maksimum.
Når dette er gjort, kan du prøve at variere de øvrige konstanter, og se om du kan drage nogle konklusioner heraf.
Lav derefter det tilsvarende for t_c benyt arket "rekrut".
Hvad er det bedste rekrutteringsår?
Kan du finde et samlet svar: Hvilke værdier af f og t_c vil vi anbefale.
Kan du forklare hvorfor vi ikke får det bedste resultat ved blot at fiske los.

Vend tilbage til udledningen af modellen. Gennemgå de forskellige antagelser vi laver undervejs, og giv et skøn på, hvor sikre vi kan være i fastlæggelsen af konstanterne og i vurderingen af hvordan tingene spiller sammen.