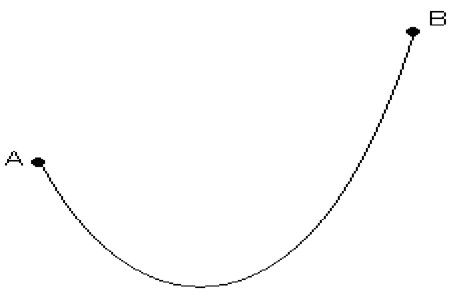
Kædelinjen og det bærende kabel i en hængebro.

1. Kædelinjen.



En uelastisk, fuldkommen bøjelig kæde er ophængt i to punkter A og B.

Massen pr længdeenhed er overalt den samme.

Hvilken kurve vil kæden danne?

Eller med andre ord, hvilken funktion vil beskrive kæden?

1.0 , hvor vi husker lidt gammel lærdom.

Undervejs får vi brug for, at det for en differentiabel funktion f(x) gælder, at

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\quad .$$

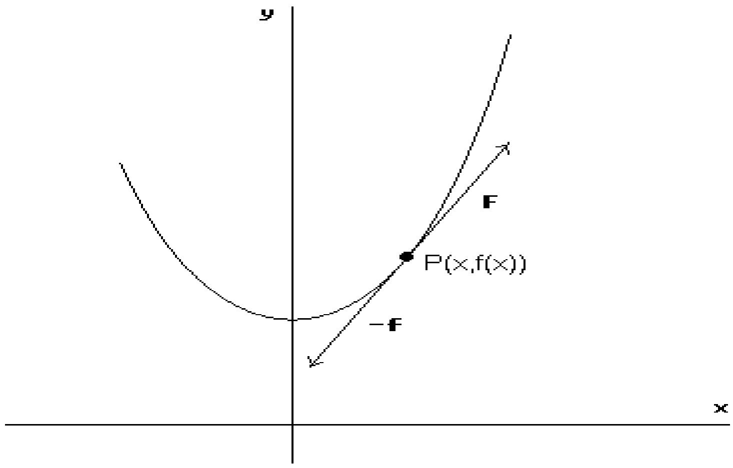
Heraf kan vi slutte, at det for små h-værdier gælder, at

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\Leftrightarrow h\cdot f'(x)\approx f(x+h)-f(x)\,.$$

Hvis $f'(x)$ er differentiabel, gælder det tilsvarende at $h\cdot f''(x)\approx f'(x+h)-f'(x)$.

1.1, hvor vi ser på de kræfter der holder kæden i ro.

Vi indlægger et koordinatsystem og betragter et punkt $P(x, f(x))$ på kæden.



De to dele af kæden (på hver side af P) påvirker hinanden med modsatrettede og lige store kræfter i kurvetangentens retning.

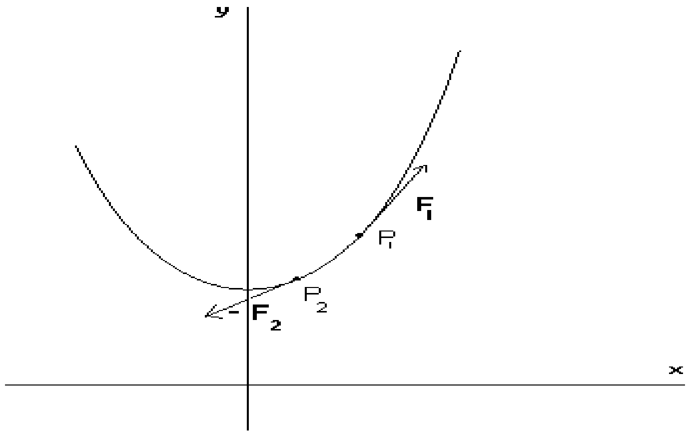
$\vec{F}$ (snorkraften) er altså parallel med vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$ og vi kan skrive

$$\vec{F} = a(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \text{ og } -\vec{F} = -a(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix},$$

hvor faktoren *a(x)* afhænger af x.

1.2, hvor vi viser at *a(x)* er en konstant.

Vi betragter 2 punkter $P_1(x_1, f(x_1))$ og $P_2(x_2, f(x_2))$ på kurven.



Kædestykket mellem P_1 og P_2 holdes i ligevægt af $\overrightarrow{F_1}$ og $-\overrightarrow{F_2}$.

$\overrightarrow{F_1} = a(x_1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_1) \end{pmatrix}$ og $-\overrightarrow{F_2} = -a(x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_2) \end{pmatrix}$.

De to kræfter tilsammen skal ophæve tyngdekraften (kæden er i ro), dvs. deres sum skal være en vektor der peger lodret opad og dermed er førstekoordinaten i deres sum 0.

Vi får førstekoordinaten $a(x_1) - a(x_2) = 0 \Leftrightarrow a(x_1) = a(x_2)$. Da det gælder for alle *x*-værdier, kan vi slutte at *a(x)* er en konstant og vi sætter *a(x) = a*.

Summen af de to kræfter bliver så:

$$\overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2} = a\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_1) \end{pmatrix} - a\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_2) \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ f'(x_1) - f'(x_2) \end{pmatrix}.$$

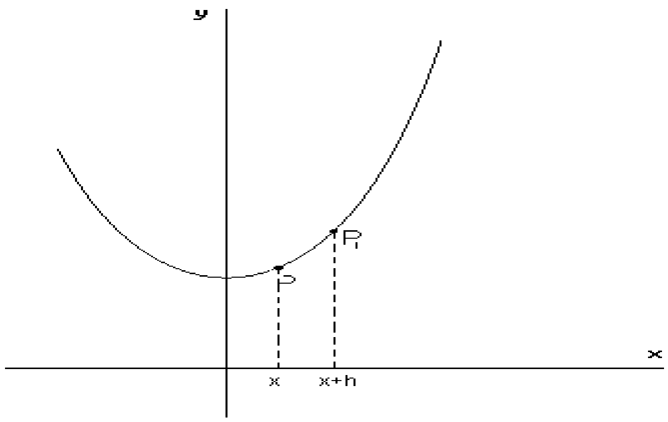
Andenkoordinaten i denne vektor kalder vi S.

$S = a(f'(x_1) - f'(x_2))$ skal ophæve tyngdekraften, da kæden er i ro.

1.3, hvor vi inddrager tyngdekraften.

Vi betragter nu to punkter på kædelinjen, der ligger tæt på hinanden:

$P(x, f(x))$ og $P_1(x+h, f(x+h))$, hvor h>0.



Vi regner lidt på andenkoordinaten i den kraft, der skal ophæve tyngdekraften, og får ved brug af overvejelserne i afsnit 1.0:

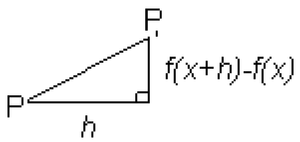
$$\boxed{S = a(f'(x+h) - f'(x)) \approx a \cdot h \cdot f''(x)}.$$

Tyngdekraften er proportional med massen af kædestykket fra P til P_1, der igen er proportionalt med længden af buen PP_1. Vi har altså

$T = k \cdot længden\ af\ buenPP_1$, hvor k er størrelsen af tyngdekraften pr. længdeenhed af snoren.

Hvis vi kan finde længden af buen PP_1, kan vi således skrive tyngdekraften som k · længden af denne bue.

Længden af buen PP_1 er, når h er lille, tilnærmelsesvis det samme som længden af linjestykket PP_1.
$|PP_1|$ kan bestemmes vha. Pythagaros:



$$|PP_1|^2 = h^2 + (f(x+h) - f(x))^2 \approx h^2 + (h \cdot f'(x))^2 = h^2(1 + f'(x)^2)$$
$$\Updownarrow$$
$$|PP_1| = h \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Buen PP_1 er altså tilnærmelsesvis lig med $h \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}$, og dermed er tyngdekraften

$$\boxed{T = k \cdot h \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}}.$$

1.4, hvor vi opstiller en differentialligning.

Da S og T skal ophæve hinanden, får vi ligningen

$$a \cdot h \cdot f''(x) = k \cdot h \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$f''(x) = \frac{k}{a}\sqrt{1 + f'(x)^2}$$

eller, hvis vi sætter $\frac{k}{a} = q$ (hvor k er tyngdekraften pr. længdeenhed af snoren og a er en konstant, der afhænger af snorens fysiske egenskaber)

$$\boxed{f''(x) = q \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}} \qquad \text{eller} \qquad \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = q \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}. \qquad (*)$$

Denne differentialligning er ikke sådan at løse, men man kan konstatere, at hvis *f(x)* er løsning til (*), så er $f'(x)$ løsning til differentialligningen

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = q \cdot \sqrt{1 + z^2}}. \qquad (**)$$

Med andre ord, hvis vi kan finde en løsning til (**), så kan vi også finde en løsning til (*).

Differentialligningen (**) er dog heller ikke lige til at løse med de redskaber vi har til rådighed, men den er løst og en løsning er

$$z = \frac{e^{qx} - e^{-qx}}{2}.$$

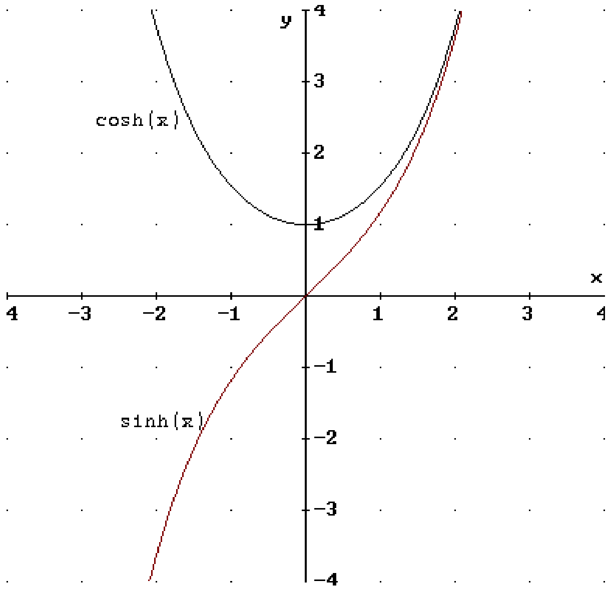
1.5, hvor vi indfører to nye funktioner.

Funktionerne cosh (læses: cosinus hyperbolsk) og sinh (læses: sinus hyperbolsk) defineres således:

$$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

Graferne for de to funktioner ser således ud:



Der gælder følgende formler:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$

$$\sinh'(x) = \cosh(x)$$

Opgave:

Bevis de tre formler.

1.6, hvor vi går tilbage til løsningen af de opstillede differentialligninger.

Man kan godt ved direkte regning vise, at $z = \dfrac{e^{qx} - e^{-qx}}{2}$ er en løsning til differentialligningen (**),

men det går betydelig nemmere hvis man omskriver z til :

$$z = \sinh(qx)$$

og bruger formlerne fra afsnit 1.5.

1.7, hvor vi løser differentialligningen (**).

I stedet for blot at vise at funktionen $z = \sinh(qx)$ er en løsning til differentialligningen

$\dfrac{dz}{dx} = q \cdot \sqrt{1+z^2}$ kan vi med lidt snilde løse denne differentialligning:

Ved separation af de variable fås:

$$\frac{dz}{dx} = q \cdot \sqrt{1+z^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dz = \int q dx$$

For at bestemme integralet på venstre side bruges omvendt substitution.

Vi sætter $z = \sinh t \quad \Leftrightarrow \quad t = \sinh^{-1} z$, hvor $\sinh^{-1}$ er den omvendte funktion til sinh (den omvendte funktion eksisterer, da sinh er en voksende funktion).

Endvidere får vi $\dfrac{dz}{dt} = \cosh t \quad \Leftrightarrow \quad dz = \cosh t dt$.

Vi indsætter og får så:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 t}} \cdot \cosh t dt = \int q dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 t}} \cdot \cosh t dt = \int q dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\int dt = \int q dx \quad \Leftrightarrow \quad t = qx + c \quad \Leftrightarrow$$

$$\sinh^{-1} z = qx + c \quad \Leftrightarrow \quad z = \sinh(qx + c)$$

Hvis vi lægger koordinatsystemet således, at løsningskurven går gennem (0,0), bliver c = 0, og vi har så løsningen

z = sinh(*qx*).

1.8, hvor vi drager konklusionen.

Den differentialligning vi egentlig skal løse er

$$f''(x) = q \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} \,. \qquad (*)$$

I afsnit 1.4 konstaterede vi, at hvis f(x) er løsning til (*), så er f '(x) løsning til

$$\frac{dz}{dx} = q \cdot \sqrt{1 + z^2} \,. \qquad (**).$$

Vi har nu fundet en løsning til (**) og har dermed

$$f'(x) = \sinh(qx) \,.$$

Opgave:

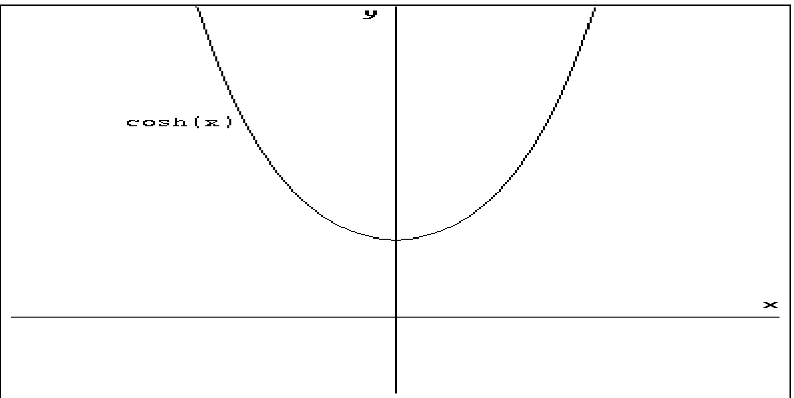
Bestem en forskrift for *f(x),* når $f'(x) = \sinh(qx)$.

Med løsningen til differentialligningen (*): $f''(x) = q \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}$

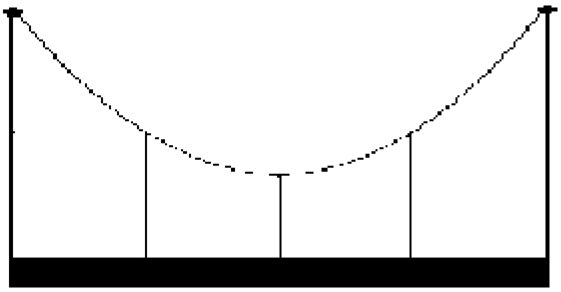
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{q}\cosh(qx) = \frac{1}{q} \cdot \frac{e^{qx} + e^{-qx}}{2}}$$

har vi besvaret det spørgsmål, vi startede med: ”hvilken funktion beskriver kædelinjen?”.

Konklusion:
Den funktion, hvis graf beskriver kædelinjen, er en hyperbolsk cosinusfunktion.



2. Det bærende kabel i en hængebro.



Vi vil nu finde den funktion, der beskriver det bærende kabel i en hængebro.

2.1

Overvejelserne om S er præcis de samme som ved kædelinjen, så vi har

$$S \approx a \cdot h \cdot f''(x)$$

2.2

Med hensyn til tyngdekraften er overvejelserne anderledes.

For en hængebro vil det gælde, at vægten af kablet er forsvindende lille i forhold til vægten af vejbanen. Vi ser derfor bort fra kablets masse.

Tyngdekraften kan udtrykkes ved

$$T = k \cdot h$$

(hvor k er størrelsen af tyngdekraften pr. længdeenhed af vejbanen).

2.3

Vi får så differentialligningen

$$a \cdot h \cdot f''(x) = k \cdot h$$

$$\Updownarrow$$

$$f''(x) = \frac{k}{a}$$

og hvis vi sætter $\frac{k}{a} = q$ får vi

$$f''(x) = q \qquad (***).$$

Opgave:

Vis, at løsningen til differentialligningen (***) er $f(x) = \frac{1}{2}qx^2 + c_1 x + c_2$.

Med passende valg af koordinatsystem er $c_1 = 0$, dvs. løsningen er

$$f(x) = \frac{1}{2}qx^2 + c.$$

Konklusion:

Den kurve en hængebros kabel beskriver, er en parabel.