Logik

Matematisk fagprojekt

Vejleder
Kjeld Bagger Laursen

Udarbejdet af
Line Marie Svensson
Tina Su Lyn Lim

Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet
August 2005

Indhold

1 Indledning

Dette projekt er lavet med henblik på den nye gymnasiereform, hvor fagene i langt højere grad skal integreres og arbejde sammen. Vi har her lavet et forslag til hvordan fagene matematik og engelsk kan arbejde sammen, og der er mulighed for at udvide fagrækken med filosofi.
Formålet er at indføre eleverne i matematisk logik gennem en engelsk tekst af Lewis Carrol, samt at udvikle elevernes engelske sprogkendskab. Vi har valgt netop denne tekst, da den både kan forstås rent sprogligt, men også matematisk set. Under introduktionen til både den matematiske og sproglige logik stilles forskellige opgaver, så eleven kan blive familiær med sprogbrug og de givne værktøjer.
Materialet er lavet til at kunne bruges direkte til undervisningen. Vi har dog lavet det således at opgaverne er uafhængige af hinanden. Derfor er der mulighed for at tilrettelægge individuelle undervisningsforløb, så en underviser kan udvælge de opgaver han/hun finder bedst til klassen. Flere af opgaverne er stillet, så eleverne selv skal finde oplysninger, og mange af opgaverne lægger op til at uddybe andre perspektiver indenfor matematik og engelsk.
Vi har bestræbt os på at materialet har så meget indhold, at det også er muligt at vælge en engelsk eller matematisk vinkel på emnet, således at man kan nedtone det ene eller det andet fag uden at løbe tør for materiale.
Materialet er stilet mod elever, der har matematikkundskaber svarende til gammelt b-niveau. Det kan altså passende ligge på 3. års matematikundervisning, eventuelt som valgfrit forløb i slutningen af 2. års matematikundervisning. Eleverne skal have en god forståelse af det engelske sprog, samt kendskab til basal tekstanalyse.
God fornøjelse!

2 Zenons paradoks

De gamle grækere havde mange jern i ilden: de beskæftigede sig blandt andet med filosofi, matematik, astronomi og de var også meget glade for paradokser. Hos Aristoteles finder vi flere af sådanne paradokser, skrevet af Zenon af Elea, der levede i det femte århundrede før vor tidsregning.
Et af disse paradokser er historien om Achilleus og skildpadden. Achilleus og skildpadden beslutter sig for at løbeomkap.Da Achilleus kan løbe dobbelt så hurtigt som skildpadden, giver han den et langt forspring. Men, forklarer Zenon, når Achilleus når frem til skildpaddens udgangspunkt, så har den bevæget sig et stykke fremad, der svarer til halvdelen af dens forspring. Og når Achilleus så når frem til dét punkt, vil den igen have bevæget sig fremad, hvad der svarer til halvdelen af dette forspring. Og sådan kan man blive ved ad infinitum. Achilleus kan altså aldrig nå op på siden af skildpadden, fordi der hver gang sker det, at den, når han når frem til dens udgangspunkt, vil have bevæget sig den halve længde af forspringet fremad. Så Achilleus overhaler aldrig skildpadden. [8]

Opgave 1 *Hvordan forstår du logikken i dette paradoks? Kan påstanden passe i den virkelige verden? Hvad med i den matematiske?*

Den matematiske forklaring på Zenons paradoks

En af forklaringerne svarer til at tage en del af tallinien, f.eks. stykket fra 0 til 1. Lad os forestille os, at Achilleus starter ved 0 og skildpadden ved $\frac{1}{2}$. Når Achilleus når frem til det sted, hvor skildpadden startede, har Achilleus løbet længden $\frac{1}{2}$. Tilsvarende har skildpadden bevæget sig videre, nemlig halvdelen af, hvad Achilleus har løbet. Sådan bliver kapløbet ved, så hver gang Achileus når til der, hvor skildpadden var sidst, vil denne have bevæget sig et lille stykke videre. Problemet med dette argument er, at det ikke tager hensyn til hastighederne. Så Achilleus vil altså overhalde skildpadden.

I afsnit 4 står endnu en beretning om Achilleus og skildpadden. For at kunne forstå paradokset matematik, må vi først kigge på den klassiske logik.

3 Logik

3.1 Lidt historie

Logik i den vestlige verden stammer fra det antikke Grækenland. Ordet *logik* kommer af det græske ord *logos*, der kan betyde ”ord, det talte ord, tanke, årsag,...”. En af de helt centrale figurer er Aristoteles (384-322 f.v.t.), der boede meget af sit liv i Athen.

Opgave 2 *Find ud af noget mere om Aristoteles. Hvilke andre grene af videnskaben har han haft indflydelse på?*

Aristoteles formulerede nogle *syllogismer*, der består af to præmisser, dvs. forudsætninger, og en konklusion. Et typisk eksempel på dette er:

Alle mennesker er dødelige.
Sokrates er et menneske.
Altså er Sokrates dødelig.

Sidenhen blomstrede andre grene af filosofi og matematik, mens det gik lidt trægt med at udvikle logikken. Til gengæld skete der en opblomstring i midten af 1800-tallet, hvor mænd som Gottlob Frege (1848-1925) og Bertrand Russel (1872-1970) for alvor satte skub i det, vi i dag kalder moderne logik.
Senere hen har logikken også bredt sig til datalogiens verden, hvor man bl.a. har *logisk programmering*, der består af en mængde aksiomer og regler. Dette kan man bl.a. bruge til forskningen i kunstig intelligens, men mere nærliggende bruges det også til at programmere forskellige spil.

3.2 Matematisk logik

Der har alle dage været stor diskussion om, hvordan man definerer logik. Det vil vi ikke bekymre os så meget om her, hvor vi blot vil skelne mellem *sproglig logik* og *matematisk logik*. Vi behandler først den matematiske logik, som også kunne kaldes *formel* eller *symbolsk* logik.
Vi benytter os meget af logikken i vort matematiske arbejde. Vor tankegang træner vi til at være logisk, og vi bruger ofte tegn og udtryk fra logikken. Det ses typisk i beviser af matematiske påstande, eksempelvis er *biimplikationen* $\Leftrightarrow$ et logisk tegn, der bruges flittigt, ligesom *alkvantoren* $\forall$ og *eksistenskvantoren* $\exists$.
Kort sagt er logikken et *sæt af regler* for vor tænkning, hvor *aksiomerne* er vore byggestene, som vi kan kombinere på passende vis ved hjælp af nogle identiteter og slutningsregler, der på forhånd er fastlagte. I den matematiske logik er alting reduceret til en ren manipulation af symboler. På denne måde fås et smukt, elegant og stringent system, hvor man ved brug af symboler og de givne regler kan vise gyldigheden af et argument. Desværre taber man umiddelbart argumentets betydning, når man blot arbejder med symboler. Vi kan altså sige, at logikken er uafhængig af kontekst, dvs. den er uafhængig af det univers, vi arbejder i. Men inden vi ser på, hvad dette betyder, skal vi kigge lidt nærmere på, hvad der menes med kontekst.

3.3 Kontekst

En kontekst består af et univers, hvori der er forskellige objekter. Et sådant univers kunne være de naturlige tal $\mathbb{N}$. Objekterne heri er tallene $1, 2, 3, \ldots$. Faktisk er alle vore talmængder universer, hvor de forskellige tal er objekterne, såsom de hele tal, de rationale tal osv.
Til konteksten hører udsagn, der knytter objekterne i universet sammen. Et udsagn siger noget om, hvordan objekterne forholder sig til hinanden. Hvis vi befinder os i universet de naturlige tal, er ”$2 \cdot 3 = 6$” et udsagn, ligesom ”$4 + 4 = 8$” er et udsagn, og ”$a = b$” og ”$a \leq b$” er udsagn.
Udsagnene deler sig i to grupper: de *atomiske udsagn*, der er specielt simple udsagn såsom ”$a \cdot b$”, og de *komplicerede udsagn*, der bliver dannet ud fra de atomiske. Et kompliceret udsagn kunne være ”$a \leq b$ og $b \neq a$”.
Blandt disse to typer udsagn falder aksiomerne, der er altid sande udsagn. Allerede her støder vi på problemer, for hvad betyder ”et altid sandt udsagn”? Men lad os kigge mere på sandhed senere og indtil videre blot stole på vores intuition omkring sandhed.
Blandt aksiomerne finder vi

* hvis der gælder $a = b$, så gælder også $b = a$
* $a + b = b + a$
* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

for de naturlige tal a, b, c.

Eksempel

En anden kontekst kunne være geometri, hvor universet er vores sædvanlige plangeometri. Objekterne heri er punkter, linier, trekanter, cirkler osv. Her kan man også opstille udsagn såsom ”den korteste afstand mellem to punkter er en ret linie” eller ”$\triangle\ ABC$ er en ligesidet trekant hvis $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$”.

Eksempel

Endnu en kontekst kunne være alle funktioner af én variabel. Universet er altså alle disse funktioner og de forskellige udsagn, der knytter sig til vores sædvanlige opfattelse af en funktion. Et sådant udsagn kunne være ”for alle reelle tal x findes netop et reelt tal y, således at $f(x) = y$ for en given forskrift f”. Taler vi om injektive funktioner kunne vi inkludere definitionen ”hvis $x_1 \neq x_2$ så er $f(x_1) \neq f(x_2)$”.

Vi har et fælles krav til de kontekster, vi arbejder indenfor. *Identitet* mellem de forskellige objekter skal give mening. Et af de atomiske udsagn er altså

"$x = y$" når x og y er objekter, ligesom identiteten $x = x$ altid er sand. Ligeledes skal gælde, at hvis $x = y$ og $y = z$, så er $x = z$. Der er flere krav, men dette er nogle af de vigtigste.
Som tidligere sagt er logikken uafhængig af kontekst. Det betyder, at vi kan arbejde på et højere og mere abstrakt niveau, hvor vi kan bevise nogle relationer mere generelt. Vi kan sagtens have to kontekster, hvis objekter og relationer er nogenlunde ens, men hvor udsagnene i de to kontekster er forskellige fra hinanden.

Eksempel

Det er lettest med et eksempel fra hverdagen. Betragt de to universer: børn og forældre. Objekterne i disse to universer er begge mennesker, relationerne er også i mange tilfælde de samme, såsom det at være søskende. Til gengæld er "Peter er gift med Louise" et udsagn, der kun hører sig til det ene univers, nemlig forældrene.

Opgave 3 *Hvortil hører udsagnene "Bente er ældre end Søren", "Ulrikke og Tanja er tvillinger" og "Caroline er mor til David"?*

Hvis vi lader os begrænse af kontekst, skal vi muligvis bevise den samme slutningsregel i forskellige forklædninger - slutningsregler ser vi nærmere på senere - hvorimod uafhængighed af kontekst giver et bredere og mere generelt billede.
Selvom logikken altså er *kontekstuafhængig*, hjælper det os ofte at tænke på en bestemt kontekst, når vi arbejder med logik, så vi vil fortsætte med at give eksempler indenfor forskellige kontekster.

3.4 Udsagnsvariable

Udsagnene er vigtige i logikken. Det er dem, der siger noget om vores objekter og relationerne mellem dem. De forskellige udsagn er bygget op af aksiomer og andre udsagn, og vi skal blot specificere udsagnene indenfor den valgte kontekst. Den slags udsagn kaldes "konkrete udsagn", fordi man arbejder i en konkret kontekst. For at simplificere og standardisere vores arbejde, indfører vi *udsagnsvariable*.

Eksempel: Variable

En *variabel* er en sjov størrelse. Vi møder typisk variable, når vi taler om funktioner. Der har vi de to variable x og y, hvor vi kalder x for den uafhængige variabel og y den afhængige variabel. Dette kan vi ydermere understrege ved at skrive $f(x) = y$. Vi kan altså frit lade x variere indenfor funktionens definitionsmængde, dvs. vi kan vælge at tillægge x en (så godt som

vilkårlig) talværdi. Den anden variabel, y, varierer også, men dens værdi er helt afhængig af x.
Lad os betragte kvadratfunktionen $f(x) = x^2$, der som definitionsmængde har alle de reelle tal. x kan altså antage en *hvilken som helst talværdi*. Eksempelvis kan vi lade x være lig med værdien 2. Eller vi kunne lade $x = -3$. Selvom x dermed får en specifik talværdi, er x stadig en variabel. Det er det, der giver os grafen for en funktion, nemlig at x kan antage forskellige værdier.

I logik taler vi altså også om variable. Her hedder de udsagnsvariable, da de værdier en sådan variabel kan antage, er udsagn! En udsagnsvariabel er som sådan blot et bogstav, f.eks. $P, Q, R, \ldots, P_1, P_2, \ldots$, som vi kan lade stå for et hvilket som helst udsagn, vi skal blot specificere udsagnet indenfor den valgte konteksts rammer.

Eksempel

Lad konteksten være de naturlige tal. Så er ”4+4=8” et udsagn, som vi kunne knytte til bogstavet P. Til P kunne vi også knytte udsagnet ”hvis $a \leq b$ og $b \leq c$ så er $a \leq c$” eller udsagnet ”$2 \cdot 3 = 6$”. Prøv at sammenligne med det at være variabel, når vi taler om funktioner.

Eksempel

Lad nu kontekst være plangeometrien. Så kunne vi have følgende konkrete udsagn:

P : cirklen med centrum i (0,0) og radius 4
Q : den rette linie med hældning 2 gennem punktet (0,1)
R : $(-2, 4)$

Her er vores udsagnsvariable netop P, Q og R, men vi har valgt at tillægge hver udsagnsvariabel en specifik *værdi* nemlig henholdsvis: ”cirklen med centrum i (0,0) og radius 4”, ”den rette linie med hældning 2 gennem punktet (0,1)” og ”$(-2, 4)$”.
Vi kan altså tænke på en udsagnsvariabel som vi kan tænke på variable for ”almindelige” funktioner.

Opgave 4 *Lad kontekst være de naturlige tal. Prøv at skrive nogle udsagn ned, både atomiske og komplicerede udsagn. Prøv også at formulere nogle aksiomer.*

3.5 Sandhedstavler

Når vi har givet udsagnsvariablene specifikationer, kan vi betragte deres *sandhedsværdi*. Et konkret udsagn kan enten være ”sandt” eller ”falsk”. I den klassiske logik, som vi arbejder med, er ethvert konkret udsagn enten sandt eller falsk - aldrig begge dele.

Eksempel

I afsnittet om paradokser så vi på Epimenides' paradoks. Kald udsagnet ”Alle kretanere er løgnere” for P. I en af fortolkningerne af dette udsagn tillagde vi P sandhedsværdien ”sand” - paradokset var netop, at hvis P er sand, så er P falsk!

Eksempel

Hvis vi igen betragter Epimenides' paradoks, og igen lader P være udsagnet ”Alle kretanere er løgnere”, kan vi opstille en *sandhedstavle* for P:

P
sand
falsk

og derefter diskutere, hvordan vi kan analysere de to værdier.

For nemheds skyld benytter vi *sandhedsværdierne* 0 og 1, hvor 0 betegner falsk og 1 betegner sandt. Hvis vi har to (uspecificerede) udsagnsvariable P og Q kan vi opskrive de mulige sandhedsværdier for disse i følgende sandhedstavle:

P	Q
1	1
1	0
0	1
0	0

Første linie betyder altså, at begge udsagn er sande, mens det kun er P, der er sand i anden linie.
Sandhedstavler giver et godt overblik over ens udsagnsvariable. De gør det også lettere at afgøre, om en *udsagnsform* er sand eller falsk. En *udsagnsform* er et udsagn, der er sammensat af udsagnsvariable.

Eksempel

Hvis vi har ovenstående sandhedstavle for udsagnsvariablene P og Q, kunne vi forestille os at sammensætte disse to udsagn på en bestemt vis. Dette giver anledning til en udsagnsform, vi kunne kalde U. Vi bruger i øvrigt typisk bogstaverne $U, V, W, \ldots, U_1, U_2, \ldots$ til at betegne udsagnsformer. En sandhedstavle kunne da have følgende form:

P	Q	U
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Her har vi ikke specificeret, hvad P, Q og U egentlig er, men hvis vi befinder os i konteksten de naturlige tal og lader P være udsagnet ”$a < b$” og Q være udsagnet ”$b \leq c$” kunne vi lade U være ”$a < c$”. Hvis vi da knytter P, Q og U sammen ved at sige, at hvis både P og Q er sande, så er U sand, vil dette give den første række i sandhedstavlen. Man kan sagtens forestille sig med nogle andre udsagn, at sandhedsværdierne for U for eksempel altid vil være 0 eller 1.

Eksempel

Lad kontekst være plangeometri. Givet de to udsagn

$$\begin{aligned} P &: \quad A \text{ er en trekant} \\ Q &: \quad A \text{ er en ligesidet polygon} \end{aligned}$$

kan vi definere udsagnsformen U ved at kombinere udsagnene P og Q på passende vis, således at U er udsagnet ”A er en ligesidet trekant”. Heraf får vi følgende sandhedstavle

P	Q	U
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Opgave 5 *Igen er vi i konteksten plangeometri. Lad P være udsagnet ”A er en trekant” og Q være udsagnet ”A har en ret vinkel”. Lad nu udsagnsformen U være givet ved ”A er en retvinklet trekant” og opskriv sandhedstavlen.*

Eksempel

Kontekst er plangeometri. Lad

$$\begin{aligned} P &: \text{ A er en ligesidet polygon} \\ Q &: \text{ A er en rektangel} \\ R &: \text{ A har fire rette vinkler} \end{aligned}$$

Vi kan betragte udsagnsformen U: A er et kvadrat. Dermed har vi sandhedstavlen

P	Q	R	U
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Opgave 6 *Prøv at forklare sandhedstavlen i ord. Følger sandhedsværdierne for U din intuition?*

Eksempel

Hvis vi har udsagnsvariablene P, Q og R, kan vi danne en udsagnsform, U, sammensat af disse tre udsagnsvariable. U's sandhedsværdi kan vi definere ud fra nedenstående sandhedstavle. Da der er to muligheder, nemlig sandt eller falsk, for hver af de tre udsagnsvariable, er der $2^3 = 8$ mulige kombinationer af sandhedsværdier i sandhedstavlen:

P	Q	R	U
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Af sandhedstavlen kan vi eksempelvis se, at ved en bestemt specifikation af udsagnsvariablene P, Q og R, hvor P og Q er falske, mens R er sand, så er U sand.

3.6 Logisk ækvivalens

Logisk ækvivalens betyder, at to (eller flere) udsagnsformer har samme sandhedsværdi, og vi skriver $U \equiv V$ hvis U og V er logisk ækvivalente.

Eksempel

Antag, at vi har givet sandhedstavlen for tre udsagnsformer, U, V og Z som følger:

U	V	Z
1	0	1
1	0	1
1	0	1
0	1	0

Af sandhedsværdierne kan vi læse, at U og Z er logisk ækvivalente, dvs. $U \equiv Z$, mens hverken U og V eller V og Z er logisk ækvivalente, ligesom alle tre udsagnsformer ikke er logisk ækvivalente med hinanden.

3.7 De logiske konnektiver

Der er fire *logiske konnektiver*, der er centrale i logikken. En konnektiv er som regel en forbindelse mellem to udsagn, såsom ”A er en rektangel *og* A er en firkant” eller ”*hvis* det regner, *så* skal vi have regntøj på”. De konnektiver vi bruger i logikken er

1. KONJUNKTION: $P \wedge Q$ er *konjunktionen* af P og Q, og læses ”P og Q”. $P \wedge Q$ betyder ”både og”, således at $P \wedge Q$ er sand, netop når både P er sand og Q er sand.
   Eksempel: Kontekst er de naturlige tal. Lad P være udsagnet ”$a < b$” og Q være udsagnet ”$b < c$”, så er $P \wedge Q$ udsagnet ”$a < b$ OG $b < c$”. Sandhedstavlen for P, Q og $P \wedge Q$ er da

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

   Eksempel: Lad os betragte intervaller, dvs. kontekst er de reelle tal. Udtrykket $x \in [-2; 5[$ betyder, at x skal ligge indenfor det halvåbne interval fra og med -2 til (men ikke med) 5. Sagt på en anden måde skal x være større end eller lig med -2, og samtidig skal x være skarpt mindre end 5. Formelt kan vi skrive denne udsagnsform op ved hjælp af konjunktionen: $x \geq -2 \wedge x < 5$.

2. DISJUNKTION: $P \vee Q$ er *disjunktionen* af P og Q, og læses ”P eller Q”. $P \vee Q$ betyder ”enten eller” forstået matematisk som enten den ene eller den anden *eller* begge. Disjunktionen af to udsagn er altså sand, så længe blot det ene af udsagnene er sandt.

Eksempel: Nulreglen er et godt eksempel på en disjunktion. Den siger, at hvis $a \cdot b = 0$ så er enten $a = 0$ eller $b = 0$, eller $a = 0$ og $b = 0$.
Eksempel: Kontekst er plangeometri. Lad P være udsagnet "l er tangent til cirklen C" og lad Q være udsagnet "l er en ret linje", så er $P \vee Q$ udsagnet "enten er l en tangent til C eller l er en ret linje, eller også er l både en tangent til C og en ret linje."

3. NEGATION: $\neg P$ er *negationen* af P. Man læser det som "non-P" eller "negationen af P".
Eksempel: Lad kontekst være de naturlige tal. Hvis P er udsagnet "$a = b$", så er $\neg P$ udsagnet "$a \neq b$"
Eksempel: I rent dagligdagssprog oversættes "negationen af P" oftest til "ikke P". Hvis P er udsagnet "Det regner" er $\neg P$ udsagnet "Det regner ikke".

4. IMPLIKATION: $P \Rightarrow Q$ er *implikationen* af P og Q. Typisk læser vi $\Rightarrow$ som "medfører" eller "hvis . . . , så . . . ". Udsagnet er kun falsk, hvis noget sandt medfører noget falsk:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Eksempel Lad os tage eksemplet fra plangeometrien, hvor præmissen er P: "l er tangent til cirklen C" og konklusionen er Q: "l er en ret linje". Så er $P \Rightarrow Q$ udsagnet "hvis l er en tangent til cirklen C, så er l en ret linje." På den måde lyder anden linie i sandhedstavlen, at "l er tangent til cirklen C og l er ikke en ret linie" og derfor vil P ikke medføre Q.

Opgave 7 *Formuler de resterende tre tilfælde i sandhedstavlen for implikationen i ord, hvor du bruger udsagnene P og Q fra ovenstående eksempel, og se om sandhedstavlen stemmer overens med din egen fornemmelse af logik.*

Opgave 8 *Hvilke logiske konnektiver binder P, Q og U sammen, når*

$$\begin{array}{lcl} P & : & \textit{A er en trekant} \\ Q & : & \textit{A er en ligesidet polygon} \end{array}$$

og U er "A er en ligesidet trekant", jævnfør eksemplet på side 8.

Opgave 9 *Opskriv sandhedstavlerne for P, Q, $\neg P$, $P \vee Q$. Bestem en kontekst og giv eksempler på P og Q således at du får alle sandhedsværdierne i sandhedstavlen.*

Opgave 10 *Se på sandhedstavlen fra eksemplet i afsnit 3.6 og afgør, om følgende ækvivalenser gælder:*

$$\begin{aligned} U &\equiv \neg V \\ U \vee V &\equiv Z \end{aligned}$$

De logiske konnektiver giver en kort og præcis måde at sammenfatte to (eller flere) udsagn. Vi har allerede brugt konnektiverne implicit i forskellige eksempler.

Eksempel: biimplikationen

Der er faktisk endnu en konnektiv, nemlig *biimplikationen* $\Leftrightarrow$. Vi kan benytte de andre konnektiver til at definere biimplikationen ved ækvivalensen:

$$U \Leftrightarrow V \equiv (U \Rightarrow V) \wedge (V \Rightarrow U)$$ [1]

Biimplikationen læses ofte som ”hvis og kun hvis” eller ”netop når/præcis når”. Hvis vi igen tænker på nulreglen, kan vi formulere denne som ”produktet af to reelle tal, a og b, er nul, hvis og kun hvis mindst ét af tallene er nul”. Skrevet formelt:

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$$

Vi kan også illustrere biimplikationen i en sandhedstavle

U	V	$U \Rightarrow V$	$V \Rightarrow U$	$U \Leftrightarrow V$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Opgave 11 *I sandhedstavlen kan vi se, at hvis U er falsk, men V er sand, så er implikationen $U \Rightarrow V$ sand. Prøv at formulere dette i ord - du kan eventuelt kigge på eksemplet under punkt 4 i introduktionen om de logiske konnektiver.*

Opgave 12 *Bestem sandhedstavlen for udsagnene*

$$P \Rightarrow \neg Q \text{ og } P \Leftrightarrow (P \Rightarrow \neg Q)$$

[1] Parenteser er højere i hierakiet end de logiske konnektiver, fuldstændig ligesom parenteser har højere prioritet end de fire regneoperationer multiplikation, division, addition og subtraktion. $(U \Rightarrow V) \wedge (V \Rightarrow U)$ betyder altså, at man først afgør sandhedsværdien af $(U \Rightarrow V)$ og $(V \Rightarrow U)$ og derefter bruger disjunktionen på disse to sandhedsværdier.

Opgave 13 *Skal der være biimplikation i følgende? Forklar.*

$$f \text{ er differentiabel i } x_0 \;\Leftrightarrow\; \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ har en grænseværdi for } h \to 0$$

Opgave 14 *Betragt sandhedstavlen fra eksemplet lige før afsnit 3.6 og afgør, hvorvidt der gælder følgende ækvivalens: $U \wedge V \equiv Q \wedge R$, når $V = P \vee Q$. (Hint: opskriv den givne sandhedstavle og indsæt sandhedsværdier for V, $U \wedge V$ og $Q \wedge R$ og sammenlign derefter deres sandhedsværdier.)*

3.8 Tautologien og absurditeten

For at kunne tale om udsagnsformer, der enten altid er sande eller altid er falske, defineres *tautologien* som *det altid sande udsagn* og vi skriver kort **1**. Analogt defineres *absurditeten* som *det altid falske udsagn*, der betegnes **0**. Tautologien vil altså altid have sandhedsværdien 1, mens absurditeten vil have sandhedsværdi 0. Dette er helt uafhængigt af, hvilke udsagnsvariable, de to udsagnsformer er sammensat af.

Eksempel

Lad udsagnsformen U være tautologien og V være absurditeten. Antag, at U og V er sammensat af blot en udsagnsvariabel P, der kan være sand eller falsk. Sandhedstavlen er da givet ved

P	U	V
1	1	0
0	1	0

Eksempel

Hvis vi nu kalder tautologien og absurditeten for henholdsvis S og T og antager, at de på en eller anden måde er sammensat af to udsagnsvariable P og Q, som altså kan være sande eller falske, får vi sandhedstavlen

P	Q	S	T
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	0

Da U og S har samme sandhedsværdi, er de to udsagnsformer logisk ævkivalente, dvs. $U \equiv S$. Ligeledes er $V \equiv T$. Dette er netop årsagen til, at vi tildeler både tautologien og absurditeten et specielt symbol, nemlig **1** og **0**, da alle udsagnsformer der enten altid er sande eller falske vil være ækvivalente.

3.9 Logisk konsekvens

Vi definerer *logisk konsekvens* af to udsagnsformer U og V som følger: V er en logisk konsekvens af U, hvis og kun hvis implikationen $U \Rightarrow V$ er sand. Egentlig skal denne implikation være sand ved en *vilkårlig specifikation*. Det vil altså sige, at V af rent logiske grunde følger af U, uanset hvilken kontekst vi er i. Dette vil vi dog ikke hænge os så meget i her. Vi skriver "$U \models V$" for "V er en logisk konsekvens af U".

Eksempel

Lad P være udsagnet "A har tre sider" og Q være udsagnet "A er en polygon", så kan vi danne udsagnsformen U ved at tage konjunktionen af P og Q, dvs. $U = P \wedge Q$. Hvis vi da lader V være udsagnet "A er en trekant", så er V en logisk konsekvens af U. Vi kan altså skrive

$$U \models V$$

der betyder, at implikationen "hvis A har tre sider og A er en polygon, så er A en trekant" er sand.

Eksempel

Lad nu kontekst være familie, og lad P være udsagnet "Christian er bror til Sussi" og Q være udsagnet "Sussi er Pias datter", så kan vi danne udsagnsformen $U = P \wedge Q$. Lad nu V være "Pia er mor til Christian", så gælder $U \models V$.

3.10 Formelle beviser

Vi kan nu bevise gyldigheden af en udsagnsform ved hjælp af sandhedstavler. Men hvis vi skal stille et *formelt* bevis op, har vi brug for at definere et *logisk argument*. Et logisk argument er et skema af formen

$$\begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \\ \hline \\ V \end{array}$$

hvor $U_1, U_2, \ldots, U_n$ og V er udsagnsformer. Vi kalder $U_1, \ldots, U_n$ for argumentets *præmisser*, mens V kaldes argumentets *konklusion*. Argumentet er gyldigt, hvis der gælder, at såfremt konjunktionen af alle præmisserne er sande, så er konklusionen også sand. Bemærk, at dette skal gælde for enhver specifikation af udsagnsvariablene i præmisserne og i konklusionen. Igen behøver vi ikke at bekymre os så meget om dette, da vi ikke har brug for at gøre os fri af kontekster og specifikationer. Formelt skriver vi

$$U_1 \wedge U_2 \wedge \cdots \wedge U_n \models V$$

der altså betyder

$$U_1 \wedge U_2 \wedge \cdots \wedge U_n \Rightarrow V$$

Eksempel

Vi kender strukturen fra mange af vore sætninger og beviser. Betragt eksempelvis sætningen:

Hvis funktionerne f og g er differentiable i x_0,
så er produktfunktionen fg også differentiabel i x_0.

Lad P være udsagnet "f er differentiabel i x_0" og lad Q være udsagnet "g er differentiabel i x_0". Konklusionen V er da, at fg også er differentiabel i x_0, dvs.

$$U \models V$$

hvor U er konjunktionen af udsagnene P og Q, dvs. $U = P \wedge Q$. Vi kan altså også skrive

$$P \wedge Q \models V \;\; \text{eller} \;\; P \wedge Q \Rightarrow V$$

Opgave 15 *Find nogle sætninger og beviser, du kan opskrive som et logisk argument.*

3.11 Nogle udsagnslogiske identiteter

Som vi nævnte i begyndelsen er logik et regelsæt for vor tænkning. Det er vigtigt for os at definere disse regler, ellers kan vi faktisk ikke slutte noget som helst. Vi har allerede lavet nogle regler i forbindelse med de logiske konnektiver, og hvad et formelt bevis er. Nedenfor følger flere regler, som vi kalder for de *udsagnslogiske identiteter*:

$$
\begin{aligned}
U \vee V &\equiv V \vee U && (1)\\
U \wedge V &\equiv V \wedge U && (2)\\
T \vee (U \vee V) &\equiv (T \vee U) \vee V && (3)\\
T \wedge (U \wedge V) &\equiv (T \wedge U) \wedge V && (4)\\
T \vee (U \wedge V) &\equiv (T \vee U) \wedge (T \vee V) && (5)\\
T \wedge (U \vee V) &\equiv (T \wedge U) \vee (T \wedge V) && (6)\\
U \vee \neg U &\equiv \mathbf{1} && (7)\\
U \wedge \neg U &\equiv \mathbf{0} && (8)\\
U \vee \mathbf{0} &\equiv U && (9)\\
U \wedge \mathbf{1} &\equiv U && (10)\\
U &\equiv \neg(\neg U) && (11)\\
U \Rightarrow V &\equiv \neg U \vee V && (12)\\
U \Rightarrow V &\equiv \neg V \Rightarrow \neg U && (13)\\
\neg(U \vee V) &\equiv \neg U \wedge \neg V && (14)\\
\neg(U \wedge V) &\equiv \neg U \vee \neg V && (15)
\end{aligned}
$$

Reglerne (1) og (2) siger, at konjunktion og disjunktion er *kommutative*, mens reglerne (3) og (4) siger, at de er *associative*. Disse regler kan vi bruge, når vi skal bevise gyldigheden af logiske argumenter.

Eksempel

Ordene *kommutative* og *associative* kender du måske fra de reelle tal. Addition og multiplikation af to reelle tal er kommutativ, hvilket betyder ombyttelige. Lad x og y være reelle tal, så gælder der

$$
\begin{aligned}
x + y &= y + x\\
x \cdot y &= y \cdot x
\end{aligned}
$$

At multiplikation og addition er associative betyder, at den rækkefølge vi multiplicerer eller adderer vore tal er underordnet. Sagt på en anden måde kan man sætte og hæve parenteser, uden at det har en konsekvens for resultatet. Lad x, y og z være reelle tal, så gælder der

$$
\begin{aligned}
x + (y + z) &= (x + y) + z\\
x \cdot (yz) &= (xy) \cdot z
\end{aligned}
$$

Eksempel

De udsagnslogiske identiteter kan være noget af en mundfuld at overskue. Det kan hjælpe at prøve at arbejde med dem, for eksempel ved at bevise dem ved hjælp af sandhedstavler. Vi beviser nogle af dem her:

Regel (1):

U	V	$U \vee V$	$V \vee U$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Fra sandhedstavlen kan vi se, at $U \vee V$ og $V \vee U$ har samme sandhedsværdier, dvs. de er logisk ækvivalente. Ergo gælder der, at $U \vee V \equiv V \vee U$.

Reglerne (7) og (8):

U	$\neg U$	$U \vee \neg U$	$U \wedge \neg U$
1	0	1	0
0	1	1	0

Da $U \vee \neg U$ udelukkende har sandhedsværdien 1, er $U \vee \neg U$ tautologien, altså et altid sandt udsagn, og derfor er $U \vee \neg U \equiv \mathbf{1}$. Ligeledes kan vi se, at $U \wedge \neg U$ er absurditeten, dvs. $U \wedge \neg U \equiv \mathbf{0}$ som ønsket.

Regel 9:

U	$\mathbf{0}$	$U \vee \mathbf{0}$
1	0	1
0	0	0

Af sandhedstavlen kan vi se, at U og $U \vee \mathbf{0}$ har samme sandhedsværdi, dvs. $U \vee \mathbf{0} \equiv U$.

Regel 14:

U	V	$\neg U$	$\neg V$	$U \vee V$	$\neg(U \vee V)$	$\neg U \wedge \neg V$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

Heraf kan vi se, at $\neg(U \vee V) \equiv \neg U \wedge \neg V$.

Opgave 16 *Bevis resten af de udsagnslogiske identiter ved hjælp af sandhedstavler.*

Eksempel

Nu nævnte vi tidligere, at vi kunne bevise gyldigheden af et udsagn uden at bruge sandhedstavlerne. Dette kan vi gøre ved at udnytte de udsagnslogiske identiteter. Hvis vi for eksempel vil bevise

$$U \wedge (U \Rightarrow V) \models V$$

skal vi ifølge definitionen vise, at $(U \wedge (U \Rightarrow V)) \Rightarrow V$. Vi gør dette ved at benytte de udsagnslogiske identiteter:

$$\begin{aligned}
(U \wedge (U \Rightarrow V)) \Rightarrow V &\equiv (U \wedge (\neg U \vee V)) \Rightarrow V \\
&\equiv ((U \wedge \neg U) \vee (U \wedge V)) \Rightarrow V \\
&\equiv (\mathbf{0} \vee (U \wedge V)) \Rightarrow V \\
&\equiv (U \wedge V) \Rightarrow V \\
&\equiv \neg(U \wedge V) \vee V \\
&\equiv (\neg U \vee \neg V) \vee V \\
&\equiv \neg U \vee (\neg V \vee V) \\
&\equiv \neg U \vee \mathbf{1} \\
&\equiv \mathbf{1}
\end{aligned}$$

Da udsagnsformen $(U \wedge (U \Rightarrow V)) \Rightarrow V$ er en tautologi, har vi bevist gyldigheden.

Opgave 17 *Gennemgå hvert trin i ovenstående bevis og opskriv, hvilken udsagnslogisk identitet, der er brugt.*

Opgave 18 *Bevis udsagnet $(U \wedge (U \Rightarrow V)) \Rightarrow V$ ved hjælp af en sandhedstavle, ved at opskrive sandhedsværdierne for $U, V, U \Rightarrow V, U \wedge (U \Rightarrow V)$.*

3.12 Slutningsregler

Vi har brug for flere regler i logikken. Det er her *slutningsreglerne* kommer ind i billedet. En af de vigtigste *slutningsregler* for os, hedder *modus ponens*. Formelt set skriver vi

$$\begin{array}{l} U \Rightarrow V \\ U \\ \hline \\ V \end{array}$$

Dette betyder altså, at hvis V følger af U og U er sand, så er V sand. Modus ponens gennemgås i dybde i afsnit 5.
[1]

Opgave 19 *Kan du bevise gyldigheden af denne regel, altså $((U \Rightarrow V) \wedge U) \Rightarrow V$?*

4 Paradoks

In 1895 Lewis Carroll, the Oxford logician and author of *Alice in Wonderland*, published a playful dialogue between Achilles and the Tortoise in the journal *Mind*.

Opgave 20 *Read the following dialogue and make sure you understand all the words. Look up difficult words.*

What the Tortoise Said to Achilles
by Lewis Carroll

Achilles had overtaken the Tortoise, and had seated himself comfortably on his back.

"So you've got to the end of our race-course?" said the Tortoise. "Even though it DOES consist of an infinite series of distances? I thought some wiseacre or other had proved that the thing couldn't be done?"

"It CAN be done," said Achilles. "It HAS been done! Solvitur ambulando. You see the distances were constantly DIMINISHING; and so -:"

"But if they had been constantly INCREASING?" the Tortoise interrupted. "How then?"

"Then I shouldn't be here," Achilles modestly replied; "and YOU would have got several times round the world, by this time!"

"You flatter me - FLATTEN, I mean," said the Tortoise; "for you ARE a heavy weight, and NO mistake! Well now, would you like to hear of a race-course, that most people fancy they can get to the end of in two or three steps, while it REALLY consists of an infinite number of distances, each one longer than the previous one?"

"Very much indeed!" said the Grecian warrior, as he drew from his helmet (few Grecian warriors possessed POCKETS in those days) an enormous note-book and pencil. "Proceed! And speak SLOWLY, please! SHORTHAND isn't invented yet!"

"That beautiful First Proposition by Euclid!" the Tortoise murmured dreamily. "You admire Euclid?"

"Passionately! So far, at least, as one CAN admire a treatise that won't be published for some centuries to come!"

"Well, now, let's take a little bit of the argument in that First Proposition - just TWO steps, and the conclusion drawn from them. Kindly enter them in your note-book. And in order to refer to them conveniently, let's call them A, B, and Z:-

(A) Things that are equal to the same are equal to each other.
(B) The two sides of this Triangle are things that are equal to the same.
(Z) The two sides of this Triangle are equal to each other.

Readers of Euclid will grant, I suppose, that Z follows logically from A and B, so that any one who accepts A and B as true, MUST accept Z as true?"

"Undoubtedly! The youngest child in a High School - as soon as High Schools are invented, which will not be till some two thousand years later - will grant THAT."

"And if some reader had NOT yet accepted A and B as true, he might still accept the SEQUENCE as a VALID one, I suppose?"

"No doubt such a reader might exist. He might say, 'I accept as true the Hypothetical Proposition that, if A and B be true, Z must be true; but I DON'T accept A and B as true.' Such a reader would do wisely in abandoning Euclid, and taking to football."

"And might there not ALSO be some reader who would say 'I accept A and B as true, but I DON'T accept the Hypothetical'?"

"Certainly there might. HE, also, had better take to football."

"And NEITHER of these readers," the Tortoise continued, "is AS YET under any logical necessity to accept Z as true?"

"Quite so," Achilles assented.

"Well, now, I want you to consider ME as a reader of the SECOND kind, and to force me, logically, to accept Z as true."

"A tortoise playing football would be -" Achilles was beginning.

"- an anomaly, of course," the Tortoise hastily interrupted. "Don't wander from the point. Let's have Z first, and football afterwards!"

"I'm to force you to accept Z, am I?" Achilles said musingly. "And your present position is that you accept A and B, but you DON'T accept the Hypothetical -"

"Let's call it C," said the Tortoise.

"- but you DON'T accept

(C) If A and B are true, Z must be true."

"That is my present position," said the Tortoise.

"Then I must ask you to accept C,"

"I'll do so," said the Tortoise, "as soon as you've entered it in that notebook of yours. What else have you got in it?"

"Only a few memoranda," said Achilles, nervously fluttering the leaves: "a few memoranda of - of the battles in which I have distinguished myself!"

"Plenty of blank leaves, I see!" the Tortoise cheerily remarked. "We shall need them ALL!" (Achilles shuddered.) "Now write as I dictate: -

(A) Things that are equal to the same are equal to each other.

(B) The two sides of this Triangle are things that are equal to the same.
(C) If A and B are true, Z must be true.
(Z) The two sides of this Triangle are equal to each other.

"You should call it D, not Z," said Achilles. "It comes NEXT to the other three. If you accept A and B and C, you MUST accept Z."

"And why must I?"

"Because it follows LOGICALLY from them. If A and B and C are true, Z MUST be true. You can't dispute THAT, I imagine?"

"If A and B and C are true, Z MUST be true," the Tortoise thoughtfully repeated. "That's another Hypothetical, isn't it? And, if I failed to see its truth, I might accept A and B and C, and STILL not accept Z, mightn't I?"

"You might," the candid hero admitted; "though such obtuseness would certainly be phenomenal. Still, the event is POSSIBLE. So I must ask you to grant ONE more Hypothetical."

"Very good, I'm quite willing to grant it, as soon as you've written it down. We will call it

(D) If A and B and C are true, Z must be true.

Have you entered that in you note-book?"

"I HAVE!" Achilles joyfully exclaimed, as he ran the pencil into its sheath. "And at last we've got to the end of this ideal race-course! Now that you accept A and B and C and D, OF COURSE you accept Z."

"Do I?" said the Tortoise innocently. "Let's make that quite clear. I accept A and B and C and D. Suppose I STILL refused to accept Z?"

"Then Logic would take you by the throat, and FORCE you to do it!" Achilles triumphantly replied. "Logic would tell you, 'You can't help yourself. Now that you've accepted A and B and C and D, you MUST accept Z.' So you've no choice, you see."

"Whatever LOGIC is good enough to tell me is worth WRITING DOWN," said the Tortoise. "So enter it in you book, please. We will call it

(E) If A and B and C and D are true, Z must be true.

Until I've granted THAT, of course I needn't grant Z. So it's quite a NECESSARY step, you see?"

"I see," said Achilles; and there was a touch of sadness in his tone.

Here the narrator, having pressing business at the Bank, was obliged to leave the happy pair, and did not again pass the spot until some months afterwards. When he did so, Achilles was still seated on the back of the much enduring Tortoise, and was writing in his notebook, which appeared to be nearly full. The Tortoise was saying, "Have you got that last step written down? Unless I've lost count, that makes a thousand and one. There are several millions more to come. And WOULD you mind, as a personal favour, considering what a lot of instruction this colloquy of ours will provide for the Logicians of the Nineteenth Century - WOULD you mind adopting a pun that my cousin the Mock-Turtle will then make, and allowing yourself to be renamed TAUGHT-US?"

"As you please," replied the weary warrior, in the hollow tones of despair, as he buried his face in his hands. "Provided that YOU, for YOUR part, will adopt a pun the Mock-Turtle never made, and allow yourself to be renamed A KILL-EASE!"

Opgave 21 *Which puns, i.e. play on words, do you find in the text? Explain them.*

Opgave 22 *The Tortoise refers to Euclid in line 23 - find out more about Euclid. What is the First Proposition?*

Opgave 23 *Læs nu Lewis Carrolls tekst som en matematisk tekst. Prøv at stille den op formelt med præmisser og konklusion (kig på linierne 31-36 og linierne 77-83 i paradokset). Du kan få inspiration i afsnit 3.10 om formelle beviser.*

Opgave 24 *Er argumenterne i teksten gyldige? Hvis nej, hvorfor går det galt? Hvad sker der, hvis du bruger modus ponens på præmisser og konklusion?*

4.1 What is a paradox?

Originally a paradox was merely a view which contradicted accepted opinion. Later it came to mean an apparently true statement, or group of statements, that seems to lead to a contradiction or to a situation that defies intuition, such as Hamlet's line "I must be cruel only to be kind".[3] Typically, either the statements in question do not really imply the contradiction, the puzzling result is not really a contradiction, or the premises themselves are not all really true (or, cannot all be true together). The recognition of ambiguities, equivocations, and unstated assumptions underlying known paradoxes has often led to significant advances in science, philosophy and mathematics. [7] Following are examples of well-known paradoxes:

- The barber paradox: Imagine a town with a male barber, who daily shaves every man who does not shave himself, and no one else. Then if the barber does not shave himself, he must be one of the men that he himself shaves. But if he does shave himself, he will not shave himself according to the rule. Tricky.

- Russel's paradox: Bertrand Russell, a British mathematician, logician and philosopher, discovered this paradox in 1901. Let the set M be "The set of all sets that do not contain themselves as members".[2] This means that the set A is an element of M if and only if A is not an element of A, which we can formally write as

  $$M = \{A | A \notin A\}$$

  Does M contain itself? It if does, then M is not a member of M according to the definition, and if it doesn't M must be a member of M. The two statements ”M is a member of M” and ”M is not a member of M” both lead to contradictions. This contradiction in naive set theory has since been ”repaired” by Russell himself, and especially by Ernst Zermelo and Abraham Fraenkel.

- Epimenides' paradox: Epimenides of Knossos was a Cretan, who lived around 600 BC. One variation of his statement is ”All Cretans are liars”. This statement has several different interpretations.

  1. If we take a ”liar” to mean someone whose every statement is false, the paradox translates to ”Everything a Cretan says is false”. This being said by the Cretan Epimenides makes the statement not true.
  2. If we take the two statements ”Epimenides said all Cretans are liars” and ”Epimenides is a Cretan” as true, this implies that a Cretan has truthfully said no Cretan speaks the truth. Then Epimenides' statement is a counterexample of this, since he is Cretan who has just spoken the truth actually contradicting himself rendering his own statement ”All Cretans are liars” false.

Opgave 25 *Look at Epimenides' paradox again and try to take ”liar” to mean a person, who usually makes false statements but not always. How do you now interpret the statement by Epimenides? Is the paradox intact?*

Opgave 26 *Can you explain what the paradox is in the text by Lewis Carroll?*

Opgave 27 *Do you know any other paradoxes? For more paradoxes look at http://en.wikipedia.org/wiki/Paradox.*

[2]”Set” er det engelske ord for *mængde*. En mængde er en samling af objekter, for eksempel har vi mængder af tal, mængder af geometriske objekter, mængder af mennesker osv.

5 Logik i sproget

Matematik og logik kaldes formelle sprog. Men der findes også logik inden for det talte sprog. I dette afsnit vil vi kigge nærmere på logikken i vores sprog. Vi vil her kalde det sproglig logik, men det bliver også benævnt *propositionel* eller *udsagns* logik. Der er en del ligheder, men selvfølgelig også forskelle på den matematiske logik og på den sproglige logik. Det er især forskellene, der vil være interessante for os at kigge på.
I logikken kalder vi de simpleste tegn for primitiver. I den sproglige logik kaldes de tilsvarende simpleste tegn for semantiske primitiver. [3]
Semantiske primitiver er ord, der ikke selv kan forklares, da der ikke findes simplere tegn til at klargøre deres betydning. Eksempler er *og, ikke* og *jeg*. De semantiske primitiver kan ikke forklares uden at de tegn som skal forklares selv kommer til at optræde i definitionsformlen. Eksempelvis er *lærer* ikke et semantisk primitiv, da man kan forklare betydningen ved at sige, at det er en person, der underviser elever. Her kan ord som *elever* og *undervisning* igen forklares. Til sidst vil forklaringerne bestå af semantiske primitiver. Denne omskrivning kaldes en definitionsformel.

Opgave 28 *Prøv selv at finde et ord, som du laver en definitionsformel for. Hold dig til korte, enkle ord.*

5.1 Modus ponens

Modus ponens er en slutningsregel, der er forbundet med hvis/så operatoren. Modus ponens siger, at hvis forudsætningen for en betingelse er sand, da må følgeslutningen også være sand.
Forestil dig, at vi har følgende betingelsessætning: " Hvis det regner, så er der skyer på himlen". Formelt vil vi skrive det som

$$p \to q : \text{“Hvis det regner, så er der skyer på himlen.”}$$

I dette udtryk er "Hvis det regner" forudsætningen og "Der er skyer på himlen" er følgeslutningen. Hvis vi ved, at det regner, må vi konkludere, at der er skyer på himlen, dvs. hvis forudsætningen ("Det regner") er opfyldt, må følgeslutningen ("Der er skyer på himlen") også være opfyldt ifølge modus ponens. Vi kan skrive disse skridt formelt:

$$\begin{array}{l} p \to q : \text{“Hvis det regner, så er der skyer på himlen.”} \\ p : \text{“Det regner”} \\ \hline q : \text{“Der er skyer på himlen”} \end{array}$$

Betingelsen $p \to q$ og det givne p er over linjen, og konklusionen q som fås ved at bruge modus ponens er under linjen.

[3] Semantik er den del af sprogvidenskaben, der beskæftiger sig med sprogets indholdsside, altså betydning.

Opgave 29 *I ovenstående eksempel gælder der så $q \rightarrow p$? Begrund dit svar.*

Eksempel

Her er et andet eksempel på modus ponens:

$V \rightarrow S$: Hvis vejret er godt, kan vi tage på stranden.
V : Vejret er godt

S : Vi kan tage på stranden

Opgave 30 *Find selv på et eksempel, hvor du bruger modus ponens.*

Opgave 31 *Med*

$$\begin{array}{lll} g & : & \textit{Vandet er 100 grader varmt} \\ k & : & \textit{Vandet koger} \end{array}$$

hvilke af følgende gælder: $g \rightarrow k, k \rightarrow g$?

5.2 Sandhedstavler i sproglig logik

I den sproglige logik beskæftiger man sig også med sandhedstavler. I disse kan man fastlægge sandhedsværdien af de såkaldte "logiske konstanter". Det vil sige tegnene *ikke* og konnektiverne/konjunktionerne[4] *og, eller* og *hvis*. Vi vil her kun kigge på den sproglige logiks definition af *og* og *eller*.

5.2.1 Konjunktionen *og*

Et semantisk primitiv som *og* kan som nævnt ikke forklares ved hjælp af andre ord. Derfor fastlægger logikken betydningen ved at fastsætte de betingelser, som skal være opfyldt for, at en sætning/et udsagn, som kombinerer to sætninger ved hjælp af *og*, er sand. Lad os som eksempel tage sætningerne *Emma har en kat* og *John har en hund*. Dem kan vi kalde henholdsvis P og Q. Hvis de to sætninger P og Q bliver forbundet med *og*, får vi en helt ny sætning/nyt udsagn, nemlig *Emma har en kat og John har en hund*. Dette udsagn kalder vi P *og* Q, eller $P\&Q$.
Logikken er interesseret i at vide under hvilke omstændigheder udsagnet $P\&Q$ er sandt, og det kan gøres i tabelform, som vi har set det i den matematiske logik. Her får delsætningerne P og Q og den samlede sætning $P\&Q$ tildelt en sandhedsværdi, nemlig falsk og sand, som vi forkorter f og s. Nedenfor opstiller vi sanhedstavlen for udtrykket $P\&Q$, og dermed for

[4] Dvs. forbindelsesled.

tegnet & i den sproglige logik kaldet konjunktion:

P	Q	$P\&Q$
f	f	f
f	s	f
s	f	f
s	s	s

Opgave 32 *Forklar denne sandhedstabel. Hvad betyder linjerne hver for sig?*

Opgave 33 *Sammenlign med sandhedstavlen for det matematiske konnektiv* $\wedge$.

5.2.2 Konjunktionen *eller*

Når vi skal beskæftige os med den sproglige logiks brug af *eller*, skal vi først berøre en vigtig forskel fra det matematiske *eller*. I den sproglige logik opererer man med inklusivt og eksklusivt *eller*. Hvis vi bruger sætningerne P og Q fra før, så kan forskellen illustreres ved, at det inklusive *eller* kan omskrives til *P eller Q eller begge dele*. Det vil sige sætningen *Emma har en kat eller John har en hund* er sand når enten Emma har en kat *eller* når John har en hund, *eller* hvis både Emma har en kat og John har en hund. Det eksklusive *eller* kan derimod omskrives til *P eller Q men ikke begge dele*. Udsagnet er altså kun sandt, når Emma har en kat og John ikke har en hund, eller når Emma ikke har en kat og John har en hund. Her er sandhedstabellen for det inklusive *eller*:

P	Q	P eller Q
s	s	s
s	f	s
f	s	s
f	f	f

Opgave 34 *Prøv at opstille sandhedstabellen for det eksklusive* eller *og sammenlign den med sandhedstabellen for det inklusive* eller. *Hvad svarer den matematiske konnektiv* $\vee$ *til?*

5.3 Logik i sproget vs. dagligsprog

Den betydning som vi her har tillagt *og*/& i den sproglige logik tilsvarer stort set vores brug af *og* i vores dagligsprog. Men der kan dog findes eksempler, hvor logikkens brug af *og* adskiller sig fra vores daglige brug af *og*, og hvor brugen slet ikke er forenelig med logikkens måde at bruge *og* på.

I dagligdags sprogbrug bruges *og* til at binde elementer på et lavere niveau end sætningsplanet sammen, f.eks. *Emma har en kat og en hund*. Da den

sproglige logik kun interesserer sig for *og* som sætningskonnektiv, må logikken analysere ovenstående sætning som værende to udsagn: *Emma har en kat og Emma har en hund*.
I dagligsproget kan *og* sættes mellem to sætninger, der ikke forholder sig til hinanden på samme måde som sætningerne *P* og *Q* vi brugte i sandhedstavlen, f.eks. *Gift dig og du vil fortryde det*. I logikken ville det betyde, at sætningen kun var sand, hvis man først gifter sig og dernæst fortryder. Dette giver ikke mening i almindelig sprogbrug, her ville man nok fortolke sætningen som *Hvis du gifter dig, så fortryder du det*. Det sproglige *og* er altså ikke ombytteligt, da det her vil svare til *hvis...så*. *Hvis...så* findes også blandt den sproglige logiks konnektiver, men den har en anden sandhedsværdi end *og*. Et andet eksempel er: "jeg rejser mig, og står af bussen" hvor det sprogligt set er underforstået, at jeg først rejser mig, og derefter står af bussen.

Opgave 35 *Prøv selv at opstille sandhedstavlen for* hvis...så.

Endelig skal det nævnes, at i dagligsproget kan *og* kun bruges mellem sætninger eller udsagn, der har noget med hinanden at gøre. Der skal være etableret en forbindelse mellem de to udsagn, der knyttes sammen af *og*. Denne distinktion laver den sproglige logik ikke. Her beskæftiger man sig kun med sandhedsværdierne af udsagnene, og kigger ikke på relevansen af de to sætninger. *P & Q*s sandhedsværdi afhænger udelukkende af om *P* og *Q* er sande, ikke om de har nogen indbyrdes sammenhæng. Logisk set er *Emma har en hund og Kreta er en græsk ø* ikke anderledes end andre eksempler.
Det samme gælder for dagligsprogbrugen af inklusivt *eller*. Her skal de to udsagn knyttet sammen af *eller* have noget med hinanden at gøre. Derudover er der den betingelse knyttet til sådan et udsagn, at de to delsætninger er relevante i samme kontekst. I den sproglige logik er der ikke dette krav om relevans og kontekst, så sætningen *Emma har en hund eller John er ked af det* er sand hvis én eller begge delsætninger er sande.

5.4 Nye ord - nye betydninger

Man kan kalde sprog et system af tegn, kaldet sprogtegn. Tegn kan være mere eller mindre komplekse og bøjningsendelser, ord, fraser og sætninger er alle tegn. Fælles for alle tegn er, at de består af et udtryk (en betydningsbærer) og et indhold (en betydning). Hvis vi betragter det danske ord *bord*, er det helt klart, at vi her har at gøre med et tegn. Tegnet har et udtryk og en betydning. Vi kan betragte det som et tegn sammensat af udtrykselementer.

Eksempel

Tag udtrykselementerne $b + o + r + d$. Disse udtrykselementer har ikke i sig selv betydning, og er derfor ikke tegn. Man kan ikke sige, hvad b betyder. Det er kombinationen af disse udtrykselementer, der giver udtrykket $bord$ og en bestemt betydning, der giver tegnet $bord$. Nogle andre kombinationer af disse fire udtrykselementer ville ikke give et acceptabelt dansk udtryk: *rdob, rbod,* osv. er ikke acceptable kombinationer på dansk. Derimod er *brod* en kombination på dansk, der er et udtryk og har betydning, og som derfor er et tegn.

Der er altså visse regler for hvilke lyde man kan sætte sammen, så de giver mening og kan danne et udtryk. Der er sproglige regler for hvilke lyde i et sprog, der kan kombineres. Disse regler er $sprogspecifikke$, dvs. de varierer fra sprog til sprog. For eksempel er kombinationen pf ikke mulig i forlyd (første lyd i et ord) på dansk og engelsk, men er helt almindelig på tysk f.eks *Pferd*. Tilsvarende gælder der for komplekse tegn, at der er visse grammatiske regler, som skal overholdes, for at en kombination af de enkelte simple tegn er mulig, dvs. kan fungere som et acceptabelt udtryk for det komplekse tegn. *Bord et* er ikke en mulig kombination på dansk, men *et bord* er.

Eksempel

Et engelsk eksempel kan være ordet *hat*, der er et tegn sammensat af udtrykselementerne $h + a + t$. Denne kombination overholder reglerne for sammensætning af lyde på engelsk. Igen giver det ikke mening at spørge hvad for eksempel *h* eller *t* betyder, hvorimod *a* kan være et ubestemt kendeord, for eksempel "a table, a boy" osv. Det er kombinationen af udtrykselementerne, der gør, at vi får udtrykket *hat,* og en bestemt betydning, der giver tegnet *hat*. Vi kan ikke finde en anden kombination af disse tre udtrykselementer, der vil give et acceptabelt engelsk udtryk : *ath, tha*, osv. er ikke acceptable kombinationer på engelsk.

Men selvom alle disse udtryksregulerende regler er overholdt, er det ikke enhver tænkelig sekvens af udtrykselementer som fungerer som udtryk for et tegn på engelsk. $Shunk$ er ikke noget tegn på engelsk, men det kunne det blive, hvis englænderne blev enige om det. Det kræver blot, at denne kombination af udtrykselementer blev forsynet med en betydning. Betydning er altså hvad der gør en tilfældig, men velformet, lydkombination til et tegn. F.eks. var *cyberpunk* ikke et udtryk i engelsk for 20 år siden, men nu er det et tegn som alle andre: en kombination af et velformet udtryk og en betydning. $Shunk$ er ikke et tegn nu, men det kan det måske blive om 20 år. Det opfylder reglerne for sammensætning af lyde, men mangler endnu betydningen. **Der findes ikke et tegn uden indhold (betydning), ligesom der ikke findes tegn uden udtryk.**

Strukturalismens[5] betydningsbegreb bygger på den antagelse, at der foreligger en verden (bestående af konkrete ting, ideer, følelser, egenskaber, etc.), og at det er sprogets funktion at sætte os i stand til at tale om denne verden.
Det er nærliggende at sige, at sprogets tegn står for ting, steder osv. i omverdenen. Ordet *gymnasieelev* står for hver af de unge mennesker, der sidder i dette klasseværelse. Det viser sig ikke at være så let endda at præcisere, hvad det egentlig betyder at et tegn "står for" noget.
Som nævnt ovenfor kan man gøre velformede udtryk til tegn ved at give dem en betydning. Sådanne leksikalske nydannelser er f.eks. ordene *realpolitiker, proton* og *punkrock*, som alle er dannet efter anden verdenskrig. De betegner fænomener, som tidligere enten ikke eksisterede (punkrock), eller som man ikke kendte til (proton), eller som man i det mindste ikke kendte under dette navn (realpolitiker). Den betydning som disse ord har er imidlertid ikke ny. Disse tegn kan betragtes som forkortelser af allerede eksisterende sammensatte tegn : en bestemt slags politiker, en bestemt slags elementarpartikel, en bestemt slags rock.
Når vi skal finde ud af hvad nye ord betyder, får vi dem forklaret netop ved en sådan omskrivning til simple kendte tegn. En sådan omskrivning kaldes en definitionsformel, som vi stiftede bekendtskab med tidligere. Denne omstændighed, at nye ord kan omskrives i en sådan definitionsformel viser en vigtig pointe: Nye ord har ikke nye betydninger, men er så at sige nye forkortelser af en kombination af allerede eksisterende betydninger.
[2]

Opgave 36 *Diskuter om disse ord er dannet før eller efter 2. Verdenskrig:* napalm, tæppebombning, børskrak.

Opgave 37 *Giv hinanden ord og diskuter, om de er dannet før eller efter 2. Verdenskrig.*

Opgave 38 *Kom med et eksempel på et dansk ord, der er dannet efter 2. Verdenskrig. Prøv at lave en definitionsformel for dette ord.*

Opgave 39 *Prøv at finde ord på engelsk, der er formet efter 2. Verdenskrig. Kan du lave en definitionsformel for dette ord?*

[5]Videnskabelig systemlære bygget på vidensbegrebet struktur.

6 Lewis Carroll

6.1 Biography

Lewis Carroll is the pseudonym of the English writer and mathematician Charles Lutwidge Dodgson, born January 27, 1832, dead January 14, 1898. Most of his publications were mathematical treatises, but his fame rests on the strange pair of books he wrote for children: ALICE'S ADVENTURES IN WONDERLAND (1865) and THROUGH THE LOOKING GLASS (1872), children's books that are also distinguished as satire and as examples of verbal wit. Carroll invented his pen name by translating his first two names into the Latin "Carolus Lodovicus"and then anglicizing it into "Lewis Carroll".
The son of a clergyman and the firstborn of 11 children, Carroll began at an early age to entertain himself and his family with magic tricks, marionette shows, and poems written for homemade newspapers. From 1846 to 1850 he attended Rugby School; he graduated from Christ Church College, Oxford, in 1854. Carroll remained there, lecturing on mathematics and writing treatises and guides for students. Although he took deacon's orders in 1861, Carroll was never ordained a priest, partly because he was afflicted with a stammer that made preaching difficult and partly, perhaps, because he had discovered other interests.
Many of Lewis Carroll's philosophies were based on games. His interest in logic came purely from the playful nature of its principle rather than its uses as a tool. He primarily wrote comic fantasies and humorous verses that were often very childlike. As a mathematician, Carroll was conservative and derivative. As a logician, he was more interested in logic as a game than as an instrument for testing reason. In his diversions as a photographer and author of comic fantasy, he is most memorable and original – he is the man who contributed in ”Jabberwocky” the word chortle, a portmanteau[6] word that combines ”snort” and ”chuckle” to the English language.
[4]

Opgave 40 *Find out more about the life of Lewis Carroll on the internet. You can try and search* Google*,* Mathworld *and* Yahoo*.*

7 Jabberwocky

Read the following poem by Lewis Carroll:

'Twas brillig, and the slithy toves

[6]Literally a large suitcase.

Did gyre and gimble in the wabe:
All mimsy were the borogoves,
And the mome raths outgrabe.

"Beware the Jabberwock, my son!
The jaws that bite, the claws that catch!
Beware the Jubjub bird, and shun
The frumious Bandersnatch!"

He took his vorpal sword in hand:
Long time the manxome foe he sought –
So rested he by the Tumtum tree,
And stood awhile in thought.

And, as in uffish thought he stood,
The Jabberwock, with eyes of flame,
Came whiffling through the tulgey wood,
And burbled as it came!

One, two! One, two! And through and through
The vorpal blade went snicker-snack!
He left it dead, and with its head
He went galumphing back.

"And, has thou slain the Jabberwock?
Come to my arms, my beamish boy!
O frabjous day! Callooh! Callay!'
He chortled in his joy.

'Twas brillig, and the slithy toves
Did gyre and gimble in the wabe;
All mimsy were the borogoves,
And the mome raths outgrabe.
[4]

Opgave 41 *What is the rhyme scheme for this poem?*

Opgave 42 *What is the structure of the poem?*

Opgave 43 *How would you describe the tone of the poem.*

Opgave 44 *Are there any of the nonsense words that you think have a certain meaning?*

Opgave 45 *What do you think is the writers intention with this poem? Do you think that this poem has a meaning?*

Opgave 46 *Find a Danish version of this poem (the internet is a good place to look). Does it make more sense to you in Danish? Explain your answer.*

7.1 Humpty Dumpty's explication of Jabberwocky

Lewis Carroll explains the nonsense words from *Jabberwocky* through the character Humpty Dumpty. This he does in his book *Through the Looking-Glass* (1871) where Humpty Dumpty explains to Alice what all the strange words in the poem *Jabberwocky* means.
Here are some examples of what Humpty Dumpty tells Alice:

- ’Brillig’ means four o’clock in the afternoon – the time when you begin broiling things for dinner.
- ’slithy’ means ’lithe and slimy’. ’Lithe’ is the same as ’active’. You see it’s like a portmanteau – there are two meanings packed up into one word.
- ’toves’ are something like badgers – they’re something like lizards – and they’re something like corkscrews.

[4]
If you would like to see further explanations of the nonsense words, you can read the book ”Through the Looking Glass”. The book has been translated into Danish and is called ”Bag Spejlet”.

7.2 Literary theory/terms

Light verse is a term applied to a great variety of poems that use an ordinary speaking voice and a relaxed manner to treat their subjects gaily, or playfully, or wittily, or with a good-natured satire. The subjects of light verse need not be in themselves petty or inconsequential; the defining quality is the tone of voice used, and the attitude of the lyric or narrative speaker toward the subject.
Nursery rhymes and other children’s verses are another type of light verse. Edward Lera (“The Jumblies”, “The Owl and the Pussy Cat”) and Lewis Carroll with his *Jabberwocky* made children’s nonsense verses into a Victorian speciality. Nursery rhymes belong to an oral tradition of literature. A nursery rhyme consists of a verse or verses recited or sung by a mother or other adult to the very young members of the family. The origins of most nursery rhymes are very obscure and are thought to be of considerable antiquity. Certainly a large number of them are known to have been alive in the oral tradition for two or three hundred years.
[3],[5]

Opgave 47 *Find out more about the Victorian Period either in a book on litterary theory or on the internet.*

Opgave 48 *Somewhat more than eight hundred nursery rhymes are known to exist in English. Find English nursery rhymes on the internet.*

Opgave 49 *Do you know any Danish nursery rhymes?*

Litteratur

[1] *Introduktion til abstrakt matematik*, Brudstykker af den matematiske logik (s. 1-27), Flemming Topsøe, HCØ-Tryk, 2000

[2] *Semantik og logik, en indledning*, Steen Schousboe, Kompendieudsalg - Humaniora

[3] *A Glossary of Literary Terms*, M.H. Abrams, Seventh edition, Harcourt Brace College Publishers, 1998

[4] *The Norton Anthology, English Literature*, Seventh edition, Volume 2, Abrams & Greenblatt, Norton & Company, 2000

[5] *The Penguin Dictionary of Literary Terms and Literary Theory*, J.A. Cuddon, Fourth edition, Penguin Books, 1999

[6] *LOGIC A Very Short Introduction*, Graham Priest, Oxford University Press, 2000

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Paradox

[8] http://www.math.ku.dk/famos/17-1/alt.pdf