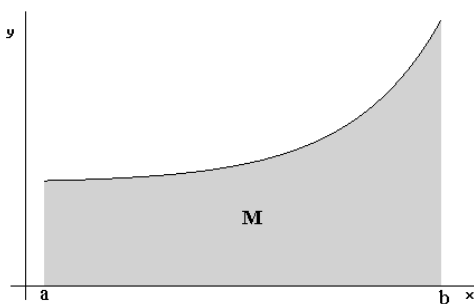


Integralregning i lyset af begreberne grænseværdi og kontinuitet

I denne opgave vil integralregningens analytiske hovedsætning blive bevist ud fra mere detaljeret begreber og definitioner. Idet selve kernen i integralregning ikke er blevet bevist med samme detaljeniveau i gymnasiet, som hovedsætningen ønskes bevist, ville det ikke være god praksis, at bevise den omtalte sætning ud fra tidligere beviser eller definitioner. Alt nødvendig teori omkring integralet, integrable funktioner, kontinuitet og grænseværdi, som er nødvendig for at bevise sætningen, vil derfor blive bevist med samme detaljegråd som hovedsætningen. Idet denne opgave ikke kan rumme alle beviserne, vil der blive refereret til andre kilder i tilfælde, hvor værdien af beviset i forhold til dets indflydelse på den detaljeret gennemgang af det omtalte ikke er betydelig nok.

Beviserne og gennemgang vil følge en naturlig rækkefølge, og derfor vil jeg starte med analysering af arealet "under" en graf.



Hvis man betragter en vilkårlig begrænset positiv¹ funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, så vil punktmængden M , som er afgrænset af grafen, x-aksen og linjerne $x = a$ og $y = b$ kunne skrives som følgende: $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ og } 0 \leq y \leq f(x)\}$

Arealet af punktmængden M , $\alpha(M)$, kan ikke bestemmes direkte ved udelukkende at betragte M . Jeg vil derfor

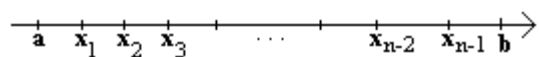
betragte nogle figurer med kendte arealer, som er større og mindre end $\alpha(M)$, og derved analysere mig frem til arealet $\alpha(M)$.

Før jeg begynder på de egentlige beviser, vil jeg først definere nogle begreber og sætninger, som er påkrævet for den videre gennemgang.

Definition 1: Inddeling og delinterval

En inddeling af intervallet $[a, b]$ kan forstås, som en opdeling af intervallet $[a, b]$ i mindre stykker således, at inddelingen $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ består af tal x_i således, at $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

En inddeling af intervallet $[a, b]$, hvor $a = x_0$ og $b = x_n$,



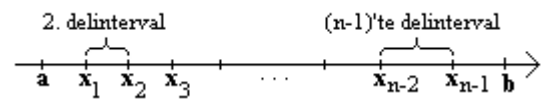
Figur 1

kunne fx se ud, som inddelingen på figur 1.

Et delinterval af inddelingen D kan derved forstås som et af de stykker, som intervallet $[a, b]$ er inddelt i. Delintervallet $[x_{i-1}, x_i]$ kaldes det i 'te delinterval af inddelingen D (figur 2).

¹ $\forall x \in [a, b]: f(x) \geq 0$

Delintervallerne i en inddeling kan have forskellige størrelser, men hvis de alle er lige store, så siges det, at inddelingen er ækvidistant.



Figur 2

Definition 2: Supremum og infimum

Supremum og infimum er defineret som den mindste øvre grænse hhv. største nedre grænse, og de skrives som $b = \sup A$ og $a = \inf A$, hvor A er en delmængde af \mathbb{R} og b er supremum hhv. infimum til A .

Definition 2.1: Mindste øvre grænse:

Lad A være en delmængde af \mathbb{R} , så vil det reelle tal b være den mindste øvre grænse, hvis følgende betingelser er opfyldt²:

$$\forall a \in A : a \leq b$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > b - \varepsilon$$

Definition 2.2: Største nedre grænse:

Lad A være en delmængde af \mathbb{R} , så vil det reelle tal a være en nedre grænse for A , hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall a \in A : b \leq a$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a < b + \varepsilon$$

Begreberne supremum og infimum vil blive brugt meget i de videre beviser og definitioner, da de for det første vil blive brugt til at definere figurerne med de kendte arealer som fx i næste definition. Ud over det vil begreberne også blive brugt til at beskrive grænserne mellem mængder.

Definition 3: Over- og undersummen

Lad f være en reel begrænset funktion defineret på det reelle intervallet $[a, b]$. Oversummen $O(D)$ og undersummen $U(D)$ hørende til funktionen f og inddelingen D er derved defineret ved, at

$$O(D) = \sum_{i=1}^n G_i (x_i - x_{i-1}) \text{ og } U(D) = \sum_{i=1}^n g_i (x_i - x_{i-1}), \text{ hvor}$$

$$G_i = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \} \text{ og } g_i = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}^3.$$

Oversummen danner det føromtalte kendte ”figur”, som skal indeholde M , og undersummen den, som er indeholdt i M . Dette kan være svært at gennemskue udelukkende ud fra definitionen, men

² Betingelsen er skrevet med kvantorer og læses \forall : For ethvert \exists : Findes der
³ Alle senere omtaler af $O(D)$, $U(D)$, G_i og g_i refererer til disse definitioner.

hvis en vilkårlig positiv reel begrænset funktion f betragtes, kan sammenhængende lettere fremvises.

De to nedenstående funktioner $G(x)$ hhv. $g(x)$ skal repræsentere oversummen hhv. undersummen.

Hvis man betragter $G(x)$ og $g(x)$, fremgår det, at de begge er konstante for de indre punkter⁴ i de individuelle delintervaller.

Hvis $G(x)$ betragtes, når $x_0 \leq x < x_1$, så fremgår det, at $G(x)$ vil have værdien G_1 , hvilket svarer til supremum for funktionen f 's værdimængde i det 1. delinterval. Hvis

$$G(x) = \begin{cases} G_1 & \text{for } x_0 \leq x < x_1 \\ G_i & \text{for } x_i < x < x_{i+1} & 1 < i < n-1 \\ G_n & \text{for } x_{n-1} < x \leq x_n \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} g_1 & \text{for } x_0 \leq x < x_1 \\ g_i & \text{for } x_i < x < x_{i+1} & 1 < i < n-1 \\ g_n & \text{for } x_{n-1} < x \leq x_n \\ \min(g_i, g_{i+1}) & \text{for } x = x_i & 1 \leq i < n \end{cases}$$

x derimod er beliggende i det i 'te delinterval, som ikke er det første eller sidste delinterval i

inddelingen D , og heller ikke på grænsen⁵ mellem to delintervaller, så vil $G(x)$ have værdien G_i .

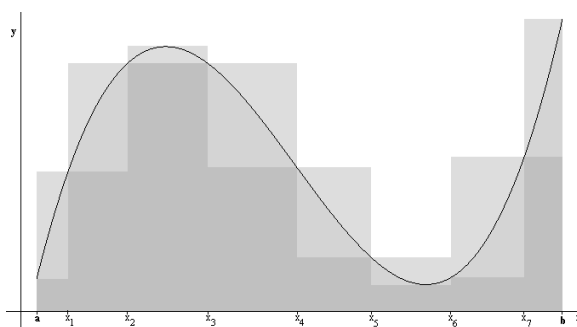
Hvis x derimod ligger på grænsen mellem to delintervaller ($x = x_i$), så vil $G(x)$ have værdien af det supremum hørende til det delinterval af de to, der er størst.

$g(x)$ opføre sig på samme måde som $G(x)$ bortset fra, at der benyttes g_i i stedet for G_i , og i tilfælde hvor x ligger på grænsen mellem to intervaller, så vil $g(x)$ have værdien af det infimum hørende til det delinterval af de to, der er mindst.

De to funktioner $G(x)$ og $g(x)$ kan bruges til at opstille to punktmængder Y (ydre mængde) og I (indre mængde), som kan illustreres visuelt (se figur 3).

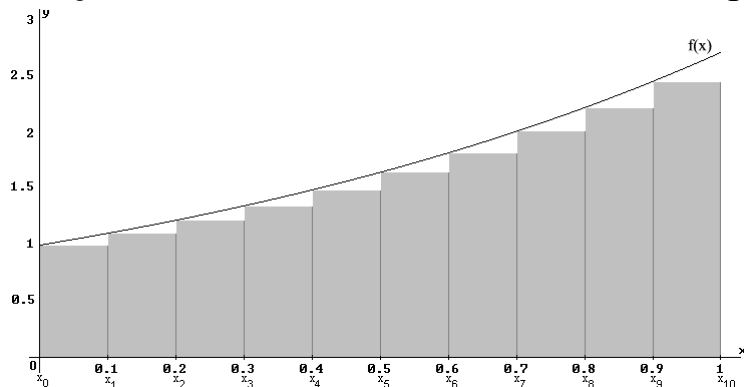
$$Y(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ og } 0 \leq y \leq G(x)\}$$

$$I(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ og } 0 \leq y \leq g(x)\}$$



$Y(D)$: Det hele $I(D)$: Det mørkegrå (figur 3)

Figur 4



Undersummen kan yderligere illustreres, hvis grafen med den tilhørende inddeling og undersum hørende til *del a* i opgaven betragtes på figur 4.

Det er yderligere muligt at regne på

⁴ Hverken start- eller endepunkt i delintervallerne.

⁵ Endepunktet for det i 'te delinterval og startpunktet for det $(i+1)$ 'te delinterval

størrelsen af undersummen, hvilket *del b af opgaven* handler om:

Definitionen af undersummen siger, at $U(D_n) = \sum_{i=1}^n g_i (x_i - x_{i-1})$,

og da f er en voksende kontinuert funktion, og inddelingen D_n er ækvidistante, er

$$g_i = f(x_{i-1}) \quad \text{og} \quad x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \text{ når } n \text{ er antallet af delintervaller i } D_n \text{ og } [a,b] \text{ det}$$

interval, som D_n er en inddeling af. Hvis det antages, at $a = 0$ og $\sqrt[n]{e} \neq 1$, kan undersummen for f da

$$\text{skrives som: } U(D_n) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n e^{x_{i-1}} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n e^{\frac{b-a}{n}(i-1)} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=2}^n \sqrt[n]{e}^{-(b-a)(i-1)}.$$

Undersummen fra del a af opgaven vil da give følgende endelige kvotientrække:

$$U(D_n) = \frac{1}{10} \sum_{i=2}^{10} \sqrt[10]{e}^{i-1}$$

Hvis man ønsker en undersum eller oversum, hvor inddelingen er finere, kan man fx lade $n \rightarrow \infty$, som i *del c af opgaven*:

$$U(D_n) = \sum_{i=1}^n \frac{e^{\frac{i-1}{n}}}{n} = \frac{e-1}{n \left(\frac{1}{e^n} - 1 \right)}, \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{e^n} - 1 \right) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U(D_n) = e-1$$

Hvis man udtrykker $O(D)$ via $U(D)$, kan oversummen ligeledes let bestemmes, når $n \rightarrow \infty$:

$$O(D_n) = U(D_n) + \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Rightarrow$$

$$O(D_n) = U(D_n) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Leftrightarrow O(D_n) = U(D_n) + \sum_{i=1}^n \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))}{n} = U(D_n) + \frac{e-1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e-1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} O(D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(D_n) + 0 = e-1$$

Ud fra definitionen af over- og undersummer samt figur 3, fremgår det, at følgende kan siges om sammenhængen mellem $O(D)$, $U(D)$ og $\alpha(M)$:

$$U(D) \leq \alpha(M) \leq O(D)$$

Ud fra denne ulighed kan det yderligere siges, at $O(D)$ er en øvre grænse til $\alpha(M)$, idet $O(D)$ er større eller lig med $\alpha(M)$:

$$\alpha(M) \leq \inf \{ O(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b] \}.$$

Tilsvarende er $U(D)$ en nedre grænse til $\alpha(M)$, idet $U(D)$ er mindre eller lig med $\alpha(M)$:

$$\alpha(M) \geq \sup \{ U(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b] \}$$

De to sidste uligheder kan skrives sammen til, at

$$\sup \{ U(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b] \} \leq \alpha(M) \leq \inf \{ O(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b] \}$$

Derved ville der kun være en mulig værdi af $\alpha(M)$, hvis følgende var tilfældet,

$$\sup\{U(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b]\} = \inf\{O(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b]\}.$$

Nemlig $\alpha(M) = \sup\{U(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b]\} = \inf\{O(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b]\}$

Jeg agter derfor at bevise, at der for enhver inddeling og reel begrænset funktion gælder, at

$$\sup\{U(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b]\} \leq \inf\{O(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b]\} \text{ (Sætning 6),}$$

og at der findes tilfælde, hvor

$$\sup\{U(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b]\} = \inf\{O(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b]\} \text{ (Sætning 8).}$$

I disse tilfælde vil værdien af supremum og infimum nemlig være $\alpha(M)$.

Definition 4: Øvre og nedre integral

Lad f være en begrænset reel funktion på det lukkede begrænset interval $[a,b]$.

Det øvre integral $\overline{\int_a^b} f(x) dx$ af f er defineret ved

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf\{O(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b]\}$$

og det nedre integral $\underline{\int_a^b} f(x) dx$ af f ved

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup\{U(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b]\}$$

Hvis $\underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx$, så siges det, at f er integrabel over intervallet $[a,b]$, og i et sådanne

tilfælde defineres integralet: $\int_a^b f(x) dx = \underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx$

Lemma⁶ 5:

Lad f være en reel begrænset funktion på et lukket begrænset interval $[a,b]$. Hvis D og Δ er to vilkårlige inddelinger af $[a,b]$ er:

$$U(D) \leq O(\Delta)$$

Bevis: Beviset falder naturligt i 3 dele.

Del 1) $U(D) \leq O(D)$ for enhver inddeling af D :

Ud fra definitionen af g_i og G_i gives følgende uligheder:

$$g_i \leq f(x_i) \quad \text{og} \quad f(x_i) \leq G_i$$

⁶ En forberedende sætning, som vil blive brugt i et kommende bevis, men som ikke i sig selv har nogen forbindelse til opgaven.

Disse udsagn kan omskrives til $g_i \leq G_i$, som igen kan omskrives ved brug af definitionen af over- og undersummer til:

$$U(D) = \sum_{i=1}^n g_i (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n G_i (x_i - x_{i-1}) = O(D) \Leftrightarrow U(D) \leq O(D)$$

Del II) Videreledning af D:

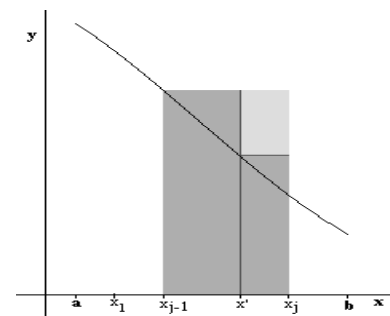
Lad D' være en inddeling, som er fremkommet ved tilføjelse af et delepunkt $x' \in [a, b]$ til inddelingen D , så gælder at $U(D') \geq U(D)$ og $O(D') \leq O(D)$.

Bevis:

$$D = \{x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_n\} \text{ hvor } a = x_0 < x_1 < \dots < x_{j-1} < x_j < \dots < x_n = b$$

$$D' = \{x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x', x_j, \dots, x_n\} \text{ hvor } a = x_0 < x_1 < \dots < x_{j-1} < x' < x_j < \dots < x_n = b$$

Den eneste forskel på D og D' er i delintervallet $[x_{j-1}, x_j]$, da alle andre delintervaller i de to inddelinger er ens. Det j 'te delinterval i D og D' bidrager med $G_j(x_j - x_{j-1})$ (det hele, figur 5) og $G_j^v(x' - x_{j-1}) + G_j^h(x_j - x')$ (det mørkegrå, figur 5) til $O(D)$ hhv. $O(D')$. G_j^v og G_j^h er her supremumværdierne for f i det venstre hhv. højre delinterval af intervallet $[x_{j-1}, x_j]$:



Figur 5

$$G_j^v = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x']\} \quad \text{og} \quad G_j^h = \sup\{f(x) \mid x \in [x', x_j]\}$$

G_j er ifølge definitionen supremum på det j 'te delinterval $[x_{j-1}, x_j]$ i inddelingen D og D' , og derved også en øvre grænse for f på hele intervallet $[x_{j-1}, x_j]$. G_j er derfor også øvre grænse til delintervallerne $[x_{j-1}, x']$ og $[x', x_j]$ af intervallet $[x_{j-1}, x_j]$ og derved gælder, at

$$G_j^v \leq G_j \quad \text{og} \quad G_j^h \leq G_j \Rightarrow G_j^v(x' - x_{j-1}) + G_j^h(x_j - x') \leq G_j(x' - x_{j-1}) + G_j(x_j - x') = G_j \underbrace{((x' - x_{j-1}) + (x_j - x'))}_{\text{det } j\text{'te delinterval i inddelingen } D} = G_j(x_j - x_{j-1})$$

Da den eneste forskel på inddelingen D og D' er i det j 'te delinterval, siger den ovenstående ulighed, at $O(D') \leq O(D)$.

Beviset for, at $U(D') \geq U(D)$ er helt analogt⁷, da det kun krævet at G_j erstattes med g_j , og ulighederne vendes om igennem hele beviset.

⁷ Beviset er tilsvarende.

Del III) $U(D) \leq O(\Delta)$ for enhver inddeling D og Δ :

Lad D og Δ være vilkårlige inddelinger og lad $D \cup \Delta$ betegne den inddeling, som består af samtlige delepunkter fra D og Δ . Det kan da realiseres, at inddelingen $D \cup \Delta$ kan fremkomme af D ved tilføjelse af delepunkter til D . Delepunkterne kunne tilføjes enkeltvis, og derved følger af del II, at $U(D) \leq U(D \cup \Delta)$.

Det samme kan yderligere realiseres om inddelingen Δ og derved følger, at

$$O(\Delta) \geq O(D \cup \Delta)$$

Af del I følger derved også, at

$$U(D \cup \Delta) \leq O(D \cup \Delta)$$

idet del I gælder for alle enhver inddeling og derved også for inddelingen $D \cup \Delta$.

De tre uligheder kan skrives sammen, så de giver det ønskede resultat:

$$U(D) \leq U(D \cup \Delta) \leq O(D \cup \Delta) \leq O(D) \Leftrightarrow U(D) \leq O(D)$$

Sætning 6:

Hvis $[a, b]$ er et lukket begrænset interval og f er en begrænset reel funktion på $[a, b]$, så er

$$\int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b f(x) dx}.$$

Bevis:

Vælg først en vilkårlig inddeling Δ og hold den først. Af Lemma 5 følger, at $O(\Delta)$

er en øvre grænse til mængden $\{U(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a, b]\}$, hvilket også kan skrives som:

$$O(\Delta) \geq \sup\{U(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a, b]\}$$

Ud fra definitionen af det nedre integral kan det skrives videre til:

$$O(\Delta) \geq \sup\{U(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a, b]\} = \int_a^b f(x) dx$$

Da Δ var valgt frit og Lemma 5 gælder for enhver inddeling Δ , medføre ovenstående ulighed, at

det nedre integral $\int_a^b f(x) dx$ også er nedre grænse for mængden $\{O(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a, b]\}$:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \inf\{O(\Delta) \mid \Delta \text{ er en inddeling af } [a, b]\}$$

Ud fra definitionen af det øvre integral kan det skrives videre til:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \inf \{O(\Delta) \mid \Delta \text{ er en inddeling af } [a,b]\} = \overline{\int_a^b f(x)dx} \Leftrightarrow \\ \underline{\int_a^b f(x)dx} \leq \overline{\int_a^b f(x)dx}$$

Korollar⁸ 7: Sammenfatning af sætning 6

$$U(D) \leq \underline{\int_a^b f(x)dx} \leq \overline{\int_a^b f(x)dx} \leq O(\Delta)$$

Sætning 8: Integrabel funktion

Lad $[a,b]$ være et lukket begrænset interval og lad f være en begrænset reel funktion på $[a,b]$. Så gælder, at f er integrabel, hvis og kun hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes en inddeling D af $[a,b]$ således, at

$$O(D) - U(D) = \sum_{i=1}^n (G_i - g_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Bevis:

Beviset falder naturligt i to dele, da der først vil blive bevist, at ovenstående udsagn er sandt, når f er integrabel, og derefter at udsagnet ikke er sandt, når f ikke er integrabel. Den anden del af beviset er nødvendigt idet, den første del ikke beviser, at der ikke findes en ikke integrabel funktion, som også opfylder, at der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes en inddeling D af $[a,b]$ således, at

$$O(D) - U(D) = \sum_{i=1}^n (G_i - g_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon. \text{ Det ville derfor være muligt, at der fandtes en funktion,}$$

der ikke var integrabel, men opfyldte udsagnet. Derved ville sætningen ikke være korrekt, da en funktion ikke både kan være integrabel og ikke integrabel.

Del I)

Det antages, at f er integrabel, som i følge definition 4 siger, at

$$\overline{\int_a^b f(x)dx} = \underline{\int_a^b f(x)dx}$$

Ud fra definitionen af det øvre integral følger, at

$$\overline{\int_a^b f(x)dx} = \inf \{O(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b]\}$$

og ifølge definitionen af infimum vil der eksistere en inddeling D_1 , som opfylder, at

⁸ En sætning, som er resultat af en anden. Det er kun sætningerne, som er en del af hovedpunkterne i opgaven, som vil blive kaldt "Sætning ...".

$$\underbrace{O(D_1)}_{\text{a i def.}} < \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{b i def.}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{\varepsilon \text{ i def.}}$$

Ud fra definitionen af det øvre integral følger ligeledes, at

$$\int_a^b f(x)dx = \sup\{U(D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a, b]\}$$

og ifølge definitionen af supremum vil der eksistere en inddeling D_2 , som opfylder, at

$$U(D_2) > \int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}$$

Hvis inddelingen D sættes til $D_1 \cup D_2$ følger af Lemma 5 II, at

$$O(D) \leq O(D_1)$$

$$U(D_2) \leq U(D)$$

idet D kan ses som en videredeling af D_1 . Ud fra de to første uligheder i dette bevis kan ovenstående yderligere omskrives således, at

$$O(D) \leq O(D_1) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow O(D) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} \text{ og}$$

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < U(D_2) \leq U(D) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} \leq U(D),$$

som så kan skrives sammen til

$$O(D) + \left(\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} \right) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} + U(D) \Leftrightarrow$$

$$O(D) - U(D) < \int_a^b f(x)dx - \left(\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow,$$
~~$$O(D) - U(D) < \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow$$~~

$$O(D) - U(D) < \varepsilon$$

da det netop blev antaget, at $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Del II)

Det antages, at f ikke er integrabel, som i følge definition 4 siger, at

$$\int_a^b f(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx.$$

Ud fra Korollar 7 vides det, at $U(D) \leq \int_a^b f(x)dx$ og $\int_a^b f(x)dx \leq O(D)$,

hvilket kan omskrives til $O(D) - U(D) \geq \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$.

Hvis ε sættes til $\varepsilon = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$, kan det yderligere ses, at

$$O(D) - U(D) \geq \overline{\int_a^b f(x) dx} - \underline{\int_a^b f(x) dx} = \varepsilon \Leftrightarrow O(D) - U(D) \geq \varepsilon.$$

Ud fra dette kan det ses, at Sætning 8 altid være korrekt idet, at $O(D) - U(D) < \varepsilon$ for ethvert $\varepsilon > 0$ kun vil være sandt, hvis funktionen er integrabel.

Et eksempel på en integrabel funktion kunne fx være e^x fra del *d af opgaven*, idet den opfylder, at

$$\forall \varepsilon > 0 : O(D) - U(D) < \varepsilon.$$

Dette vides, da grænseværdierne fra del *c af opgaven* gav, at

$$O(D_{n \rightarrow \infty}) - U(D_{n \rightarrow \infty}) = e - 1 - (e - 1) = 0 < \varepsilon,$$

og derved er e^x integrabel og integralet $\int_0^1 e^x$ eksistere, og dets værdi er $\int_0^1 e^x = e - 1$

Korollar 9: Indskudsreglen

Lad f være en reel kontinuert funktion defineret på et reelt interval I , som er integrabel over ethvert lukket begrænset delinterval af I , så gælder det, at

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ for alle } a, b, c \in I.$$

Beviset for Korollar 9 kan findes i "Funktioner af en og flere variable" side 173.

Korollar 10: Middelværdisætningen for integraler

Lad f være en reel kontinuert funktion defineret på det reelle begrænset interval I , og lad $a, b \in I$ være vilkårlige. Der vil da eksistere et c mellem a og b således, at

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Beviset for Korollar 9 kan findes i "Funktioner af en og flere variable" side 175.

Jeg har nu bevist via Sætning 6 og Sætning 8, at det øvre og nedre integral faktisk beskriver $\alpha(M)$.

Yderligere har jeg bevist, at hvis der findes en inddeling D , der opfylder, at

$$\forall \varepsilon > 0 : O(D) - U(D) < \varepsilon, \text{ findes integralet og har værdien af } \alpha(M).$$

Som det næste vil jeg bevise integralregningens analytiske fundamentalsætning, men da den omhandler kontinuerte funktioner, vil jeg først bevise, at alle kontinuerte funktioner er integrable.

Dette kræver dog først en definition af kontinuitet og kontinuerte funktioner.

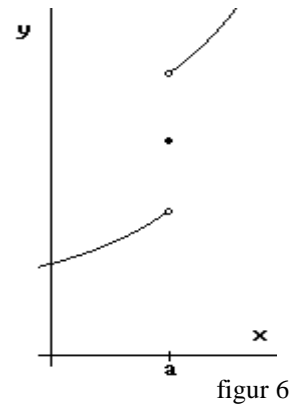
Definition 11.1: Kontinuitet i et punkt

Lad intervallet $A \subseteq \mathbb{R}$, lad f være en reel funktion defineret på A og lad $a \in A$.

f er da kontinuert i punktet a , hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Definitionen betyder, at hvis f er kontinuert i punktet a , så skal man for enhver given tolerance ε , kunne angive et positivt tal δ , som bevirker, at afvigelsen mellem funktionsværdierne er mindre en ε . Med andre ord skal afvigelsen $|f(x) - f(a)|$ kunne blive vilkårlig lille, når forskellen $|x - a|$ bliver vilkårlig lille. Funktionen, som er afbillede på figur 6, ville derfor ikke være kontinuert i punktet a idet, der er en grænse for, hvor tæt funktionsværdierne kan komme på hinanden, når x nærmer sig a , og derved kan $|f(x) - f(a)|$ ikke blive vilkårlig lille.



Definition 11.2: Kontinuerte funktioner

Lad intervallet $A \subseteq \mathbb{R}$ og lad f være en reel funktion defineret på A . Funktionen f siges da at være kontinuert, hvis f er kontinuert i ethvert punkt af A .

$$\forall x \in A \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in A : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

Definition 11.3: Uniform kontinuitet

Lad intervallet $A \subseteq \mathbb{R}$ og lad f være en reel funktion defineret på A . Funktionen f siges da at være uniform kontinuert, hvis f opfylder, at

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b] : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Forskellen på definitionen af en kontinuert funktion og en uniform kontinuert funktion, kan let overses, idet den eneste ændring i definitionen, er rækkefølgen af kvantorerne relateret til x og y . Forskellen er dog tydeligere, hvis man kigger på definitionernes indgangsvinkel. Definition 11.2 siger, at hvis funktionen f er kontinuert i alle punkter i hele det givet interval, så er f kontinuert. Denne definition er derfor baseret på, at alle de lokale⁹ observationer kan kædes sammen til en

⁹ Ved en lokal observation menes, at der kun kigger på et enkelt punkt i det givet interval.

global¹⁰ realisering omkring f . I uniform kontinuitet betragtes derimod hele intervallet, og derved laves en global realisering om en global observation.

Sætning 11.4: Kontinuerte funktioner på lukket begrænset intervaller er uniform kontinuerte

Lad f være en reel begrænset funktion defineret på et lukket reelt begrænset interval A . f er da uniform kontinuert.

Beviset for sætning 11.4 kan findes i "Funktioner af en og flere variable" side 121¹¹.

Sætning 11.5: Kontinuerte funktioner har en største og mindste værdi

Lad f være en reel kontinuert funktion på et begrænset lukket interval, så vil f have en største- og mindsteværdi.

Beviset for sætning 11.5 kan findes i "Funktioner af en og flere variable" side 93¹¹.

Sætning 12: Kontinuerte funktioner er integrable

Lad f være en reel begrænset kontinuert funktion defineret på $[a, b] \in \mathbb{R}$. f vil da være integrabel.

Bevis:

For at f er integrabel, skal følgende være opfyldt for ethvert $\varepsilon > 0$ ifølge Sætning 8

$$O(D) - U(D) < \varepsilon,$$

hvilket derved skal bevises for alle kontinuerte funktioner. Definition 11.4 vil derfor blive brugt som udgangspunkt for dette bevis.

Fra Sætning 11.4 vides det, at f vil opfylde, at

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b] : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ved erstatning af ε med $\frac{\varepsilon}{b-a}$ fås, at

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b] : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Lad D være en ækvidistant inddeling af $[a, b]$, hvor der om længden af delintervallerne gælder, at

$$x_i - x_{i-1} < \delta.$$

Da D er en ækvidistant inddeling, er der en direkte sammenhæng mellem længden af delintervallerne og antallet af delintervaller i inddelingen og derved følger, at

¹⁰ Realisering om hele funktionen på det givet interval og ikke kun et enkelt punkt i intervallet.

¹¹ Sætningen vil ikke blive bevidst her, da beviset ville nødvendiggøre inddragelsen af teorien omkring talfølger mm., som ikke ønskes dækket, da det ligger for langt uden for opgavens område, og derved optage plads for mere kritiske beviser.

$$\frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1} < \delta, \text{ hvor } n \text{ er antallet af delintervaller i inddelingen } D \text{ af intervallet } [a,b].$$

Da f er kontinuert har den ifølge sætning 11.5 en største- og mindsteværdi, hvorved supremum og infimum for ethvert delinterval af D er funktionsværdier. Der findes derfor to værdier x'_i og x''_i i ethvert delinterval $[x_{i-1}, x_i]$ for $1 \leq i \leq n$, hvor $f(x'_i)$ og $f(x''_i)$ er supremum hhv. infimum i delintervallet. Af disse grunde kan G_i og g_i omskrives til

$$G_i = f(x'_i) \text{ og } g_i = f(x''_i).$$

Da $x'_i, x''_i \in [x_{i-1}, x_i]$ kan afstanden mellem x'_i og x''_i maksimalt være lig delintervallets længde, og derved følger det, at $|x'_i - x''_i| \leq x_i - x_{i-1} < \delta$,

og da f er kontinuert følger, at

$$x_i - x_{i-1} < \delta \Rightarrow G_i - g_i = |G_i - g_i| = |f(x'_i) - f(x''_i)| < \frac{\epsilon}{b-a} \Leftrightarrow G_i - g_i < \frac{\epsilon}{b-a}^{12}.$$

Ud fra definitionen af over- og undersummer og ovenstående følger, at

$$\begin{aligned} O(D) - U(D) &= \sum_{i=1}^n G_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n g_i (x_i - x_{i-1}) \Leftrightarrow O(D) - U(D) = \sum_{i=1}^n (G_i - g_i)(x_i - x_{i-1}) \\ G_i - g_i &< \frac{\epsilon}{b-a} \Rightarrow \\ O(D) - U(D) &= \sum_{i=1}^n (G_i - g_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{b-a} (x_i - x_{i-1}) \stackrel{\frac{\epsilon}{b-a} \text{ er konstant}}{\Leftrightarrow} \\ O(D) - U(D) &< \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Af Definitionen af inddelinger og delintervaller følger, at summen af alle delintervallernes længde er lig forskellen mellem start- og endepunktet af det interval, som inddelingen er en inddeling af.

Derfor følger, at

$$\begin{aligned} O(D) - U(D) &< \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \Leftrightarrow \\ O(D) - U(D) &< \frac{\epsilon}{\cancel{b-a}} (\cancel{b-a}) \Leftrightarrow O(D) - U(D) < \epsilon \end{aligned}$$

Definition 8 siger, at en funktion er integrabel på et interval, hvis der blot findes en inddeling D af intervallet, som opfylder, at $\forall \epsilon > 0 : O(D) - U(D) < \epsilon$. Derfor er det ikke nødvendigt, at bevise sætningen for inddelinger, som ikke er ækvidistant, da det er bevist, at den påkrævet inddeling kan findes udelukkende ved at betragte på ækvidistant inddelinger.

¹² $G_i \geq g_i$ og derfor kan numerisk hæves, da det altid vil være gældende, at $G_i - g_i \geq 0$.

I beviset for analysens fundamentalsætning benytter jeg grænseværdier, og derfor vil jeg først definere, hvad en grænseværdi præcist er.

Definition 13: Grænseværdi

Lad intervallet $A \subseteq \mathbb{R}$, lad f være en reel funktion defineret på A , lad $a, b \in \mathbb{R}$. f har da en grænseværdi b for x gående mod a , hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

og det skriver, at $f(x) \rightarrow b$ for $x \rightarrow a$.

Betingelsen for grænseværdien kan forstås ved, at forskellen $|f(x) - b|$ skal kunne blive vilkårlig lille, når $|x - a|$ bliver vilkårlig lille.

Sætning 14: Analysens fundamentalsætning

Lad I være et interval og lad $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Lad endvidere $a \in I$ og lad funktionen $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ være defineret ved $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Så er F differentiabel i det indre af I med differentialkvotienten $F'(x) = f(x)$

Bevis: Beviset falder naturligt i tre dele.

Del I)

Lad x og $y \in I$ være vilkårlige. Det fås fra Korollar 9, indskudssætningen, at

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^y f(t) dt.$$

Af Korollar 10, middelværdisætningen, fås det, at

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^y f(t) dt = f(c)(y - x),$$

hvor c er et tal mellem x og y .

Del II) F er kontinuert i x

Lad $x \in I$. Da f er kontinuert har den en størsteværdi inden for et begrænset interval, og derved kan der findes en konstant K og et tal $r > 0$ således, at $|t - x| < r$ og $t \in I \Rightarrow |f(t)| \leq K$.

Lad $y \in I$ være et vilkårligt tal, der opfylder $|y - x| < r$, og lad yderligere c være et tal mellem x og y , så del I er opfyldt for c . Idet c er placeret mellem x og y , opfylder c også, at $|c - x| < r$, og herved

$$\text{fås fra del I, at } |f(c)| \leq K \Leftrightarrow |f(c)| = \left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} \right| \leq K \Leftrightarrow |F(y) - F(x)| \leq \underbrace{K|y - x|}_{\varepsilon}.$$

Ud fra ovenstående ligning og ulighed, kan det let ses, at F er kontinuert i x , hvis r anses som δ .

Del III) $F'(x) = f(x)$

Ud fra definitionen af grænseværdi kan det ses, at det der skal bevises er, at

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |y - x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) \right| < \varepsilon.$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da f er kontinuert vides det, at der eksisterer et $\delta > 0$ således, at

$$\forall t \in I : |t - x| < \delta_1 \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Idet x er et indre¹³ punkt i I , eksisterer der et $p > 0$ således, at

$$\forall t \in \mathbb{R} : |t - x| < p \Rightarrow t \in I.$$

Hvis man sætter $\delta = \min(\delta_1, p)$ ¹⁴ og lader y være givet med $0 < |y - x| < \delta$, kan det resoneres, at

$|y - x| < \delta \leq p$, og videre ud fra dette, at $y \in I$. Da både y og $x \in I$ findes der et punkt c mellem x og y , som opfylder del I og derved $c \in I$, hvilket medfører, at

$$\begin{aligned} 0 < |c - x| < \delta \leq \delta_1 &\Rightarrow |f(c) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \\ 0 < |y - x| < \delta &\Rightarrow \left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) \right| < \varepsilon \\ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} &\rightarrow f(x) \text{ for } y \rightarrow x \Rightarrow F'(x) = f(x), \end{aligned}$$

da f er kontinuert i c . Ud fra definitionen af grænseværdi, kan det let ses, at det ønsket er bevist.

Konklusion

I denne opgave er det lykkedes mig at bevise bl.a. analysens fundamentalsætning via en række definitioner og begreber, som er mere detaljeret end de tilsvarende, jeg har mødt i gymnasiet. Jeg synes derfor, at denne opgave har givet mig en større og bredere indsigt i teorien bag integralregningen, kontinuitet m.f., som jeg ellers ikke ville kunne have tilegnet mig.

¹³ Punktet er hverken start- eller endepunkt i intervallet I , og derfor denne egenskab.

¹⁴ δ vil besidde værdien af den af δ_1 eller p , som har den mindste værdi.

Integralregning i lyset af begreberne grænseværdi og kontinuitet
Af Kaspar Bomholtz, Christianshavns Gymnasium
16 af 16 sider

Litteraturliste

- 1) Funktioner af en og flere variable, Ebbe Thue Poulsen, 1. udgave 2. oplag 2002 Gads forlag
- 2) Matematik 2.1, Erik Kristensen og Ole Rindung, 2. udgave 2. oplag Gads forlag 1984
- 3) Integralregning og differentiallyigninger, Flemming Clausen, Poul Printx og Gert Schomacker, 1. udgave 2. oplag 1996 Munksgaard
- 4) Højniveaumatematik 2, Thomas Hebsgaard og Hans Slothm, 1. udgave 1. oplag 1999 Trip Forlag