TI-InterActive manual for ASK.

Indhold

Forord

Denne manual er tænkt som en praktisk vejledning til kursister ved Aalborg Studenterkursus i brugen af CAS-matematikprogrammet TI-InterActive i den daglige undervisning og til eksamen. Vægten er således lagt på at beskrive de vigtigste kommandoer og genveje samt give praktiske anvisninger på, hvordan man bruger TI i en konkret situation. Vejledningerne er som oftest suppleret med eksempler, hvor typiske opgaver indenfor de pågældende emner er gennemgået. Derimod indeholder manualen ingen beviser eller lignende for de anvendte formlers rigtighed, og den gør heller ikke krav på at beskrive alle TI's faciliteter, hvoraf mange er irrelevante for en dansk gymnasieelev. Udvalget af emneområder og eksempler er derimod foretaget ud fra en vurdering af relevans i undervisningen og til eksamen. Det er ikke meningen, at manualen skal læses fra ende til anden, men at den skal kunne bruges som opslagsbog. Derfor er mange af henvisningerne til de vigtigste faciliteter og kommandoer gentaget flere gange undervejs i vejledningen.

I sammenligning med flere andre regneprogrammer er TI umiddelbart ret let at gå til. Ligeledes er der m.h.t. kommandoer og øvrig opbygning en lang række fællestræk mellem TI og grafregnerne TI-82/83/84 og TI-89, ligesom brugen af programmet flere steder er direkte illustreret i skolens lærebogssystem i matematik. Omvendt skal det dog også anføres, at TI har nogle svagheder. En af de væsentligste er, at programmet bliver ret tungt at arbejde med, hvis det enkelte dokument bliver mere end 2 - 3 sider. Ligeledes kan enkelte forkerte kommandoer få det til at lukke uden varsel. Det anbefales derfor kraftigt, at man gemmer hyppigt undervejs, samt at man eventuelt opretter et nyt dokument, hvis beregningerne strækker sig over mere end de omtalte 2 - 3 sider. Endvidere kan det give problemer at arbejde med decimaltal i TI's lister. Der henvises til afsnittet om opsætning nedenfor.

TI har i et vist omfang tekstbehandlingsfaciliteter, men sideopsætningen kan aldrig blive så pæn som i et almindeligt Word-dokument. Typisk vil den matematiske notation ikke kunne stå på linje med den øvrige tekst, man vil ikke kunne sætte to streger under facit o.s.v., og man vil derfor dårligt kunne leve op til de udseendemæssige krav til en ordentlig opgavebesvarelse. Hvis man alligevel ønsker, at besvarelsen skal foreligge elektronisk, kan det derfor anbefales, at beregninger og grafer klippes over i et almindeligt Word-dokument, hvor den øvrige tekstbehandling så foregår. I pressede situationer - herunder til eksamen, hvor tiden er vigtig - vil det normalt være betydeligt hurtigere at regne sine opgaver i hånden og blot aflevere sine (behørigt nummererede) grafer og beregninger som bilag.
Bemærk at TI i enkelte tilfælde tegner grafer, der ikke stemmer overens med forskriften. Kontroller derfor altid om det udprintede er som forventet og ret om nødvendigt i hånden.

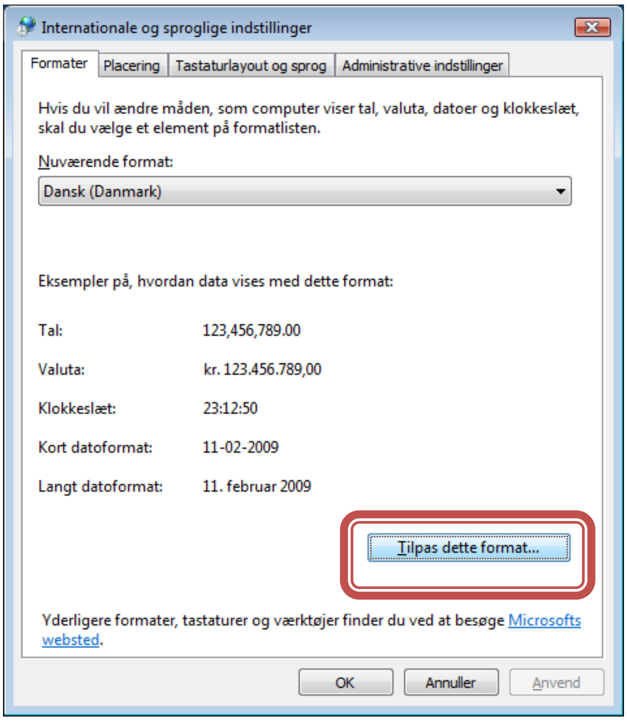
Forslag til rettelser og forbedring modtages meget gerne.

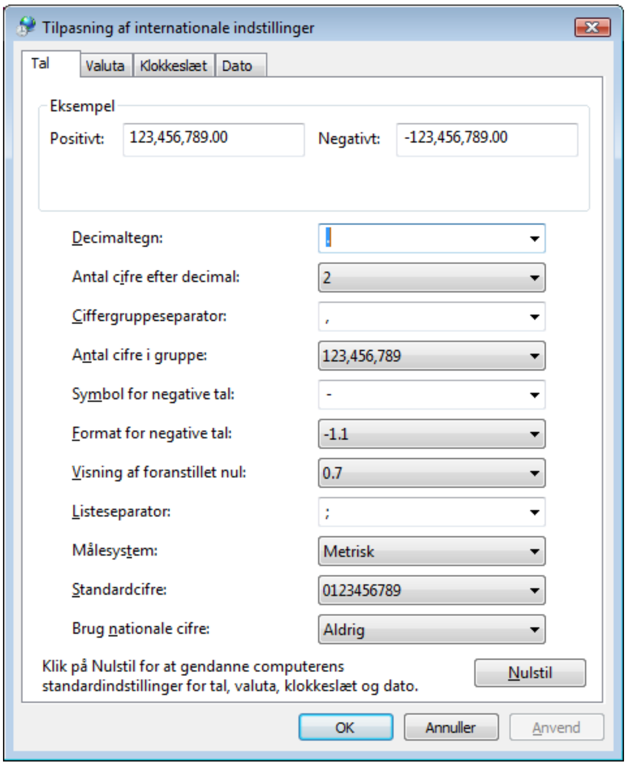
Kirsten Mortensen
Jan B. Sørensen
Henning Schoop
Aalborg Studenterkursus

Decimalpunktum!

Da TI er amerikansk, bruges decimalpunktum frem for decimalkomma, som vi ellers bruger i Danmark, så man skriver *19.95* i stedet for *19,95*. Dette er ikke et problem i hovedparten af brugen af TI, men i forbindelse med indtastning af decimaltal i lister vil det give problemer, hvis ikke computeren er sat rigtigt op. For at undgå dette problem

skal computerens **Internationale og Sproglige Indstillinger** ændres i kontrolpanelet. Afhængigt af versionen af Windows ser det lidt forskelligt ud, men man kan f.eks. få følgende skærmbillede:

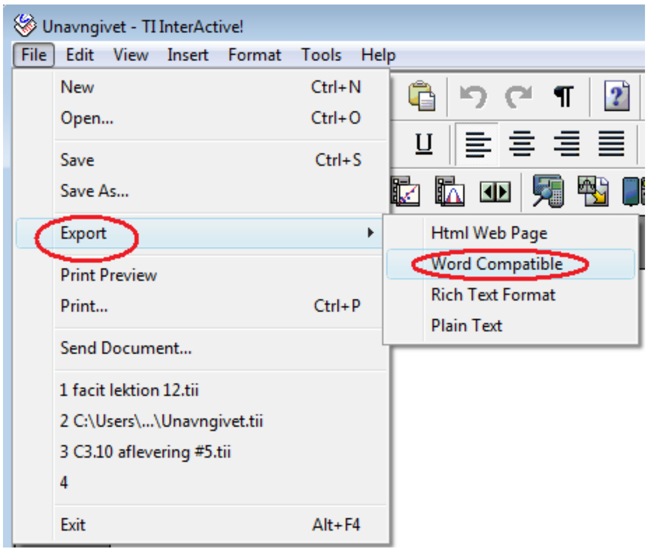




Skift decimaltegn i første række til et punktum og ciffergruppeseparatoren i tredje række til et komma. Bemærk, at ændring ikke har effekt på en åbnet TI, men først virker næste gang TI startes.

Vigtigt! TI-InterActive til eksamen

USB



Hvis man vil skrive ud fra TI-InterActive, men sidder ved en bærbar uden direkte adgang til printer, og derfor via USB skal skrive ud på en af skolens computere, kan dette give problemer. Konkret kan tabeller med kommatal blive forkerte, når de flyttes til skolens computer, fordi den ikke er indstillet til punktum i stedet for komma. Af hensyn til diverse andre programmer, som skolens kursister også skal kunne benytte, må skolens computere nemlig ikke stilles om, sådan at de opererer med decimalpunktum, da dette vil kunne medføre andre problemer.

Løsningen på dette problem er at benytte Export … Word Compatible fra TI-InterActive til USB, for så at printe den derved gemte fil ud.

Bemærk – dette er kun et problem, hvis man vil printe ud direkte fra TI-InterActive. Der er ikke noget problem, hvis man printer fra Word.

Grafer

Hvis man skriver grafer fra TI-InterActive ud kan disse i sjældne tilfælde se anderledes ud på print end på computeren.

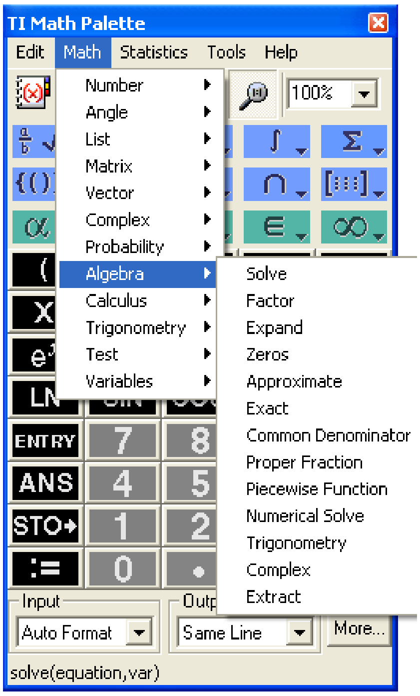
Check altid, at det, der er kommet ud på papir, er det ønskede.

Hvis ikke problemet kan løses på anden måde, så ret fejlen med kuglepen.

Genveje

Ctrl+M	Åbner Math-box
Ctrl+G	Åbner grafvindue
Ctrl+F	Danner brøkstreg i Math-boxen
Ctrl+K	Indsætter Math Section Break - en fed brun linje (bør indsættes mellem alle opgaver, da den annullerer alle definitioner tilbage til den foregående Math Section Break)
Ctrl+H	Hævet indeks: a^x
Ctrl+L	Sænket indeks: $\vec{r}_l$
Ctrl+T	Åbner tabel (må ikke forveksles med liste)
Ctrl+Enter	Sideskifte
Ctrl+C	Kopierer det markerede til udklipsholder
Ctrl+V	Indsætter fra udklipsholder
Ctrl+A	Marker alt - typisk med henblik på kopiering - Desværre vil TI normalt ikke kopiere mere end et formelfelt ad gangen, så hvis man vil sætte formler ind i et word-dokument, må man for det meste kopiere formlerne en for en.
Ctrl+S	Gemmer dokumentet
Ctrl+P	Åbner Math Box Properties, hvor man indstiller skrifttype og -størrelse, symbol mellem input og output, etc. (kan også gøres ved at klikke på "more" på Math-paletten)
F9	Åbner Mode Settings (indstilling af enheder)
F1	Åbner hjælp og slår op på det aktuelle emne (engelsksproget)

Vigtige kommandoer



TI har en lang række kommandoer, som bruges ved ligningsløsning og beregninger. De fleste findes i Math Palette, som automatisk kommer frem, når man åbner en Math-box. I øverste værktøjslinje går man ind i henholdsvis *Edit, Math, Statistics og Tools* og vælger den relevante kommando.

Kommandoerne kan dog også skrives direkte i den Math-box, hvor man foretager sin beregning. De fleste af kommandoerne er gennemgået senere i manualen i forbindelse med de kapitler, hvor de naturligt indgår. Her gennemgås kun de allervigtigste.

Solve

Bruges til ligningsløsning - bemærk variablen efter kommaet. TI skal vide, hvilken størrelse man ønsker isoleret/beregnet. Husk alle parenteser og kontrollér specielt, at der er lige mange start- og slutparenteser i komplicerede udtryk - ellers svarer TI med en fejlmelding.

$$\text{solve}\left(x^2 = 9,\ x\right) \Rightarrow x = 3.\ \text{or}\ x = -3.$$
$$\text{solve}\left((x-3)\cdot(x-2) = 2,\ x\right) \Rightarrow x = 4.\ \text{or}\ x = 1.$$

Factor

Bruges til at faktorisere et udtryk eller sætte udenfor parentes:

$$\text{factor}\left(x^2 - 5\cdot x + 6\right) = (x-3.)\cdot(x-2.) \qquad \text{factor}\left(4\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot y\right) = 2.\cdot x\cdot(2.\cdot x + y)$$

Expand

Opdeler et udtryk i summer (det ”modsatte” af faktorisering)

$$\text{expand}\left((x-3)\cdot(x-2)\right) = x^2 - 5.\cdot x + 6.$$

Zeros

Finder nulpunkterne i et udtryk

$$\text{zeros}\left(x^4 - 6.\cdot x^3 + 11.\cdot x^2 - 6.\cdot x,\ x\right) = \{0,\ 1.,\ 2.,\ 3.\}$$

Approximate

Omregner fra eksakt symbolsk værdi til decimaltal

$$\text{approx}\left(\sqrt{2}\right) = 1.41421$$

Exact

Omregner fra decimaltal til eksakt symbolsk værdi (ofte en brøk)

$$\text{exact}(0.375) = \frac{3}{8}$$

Common Denominator

Sætter på fælles brøkstreg

$$\text{comDenom}\left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}\right) = \frac{2\cdot x^2 + 2\cdot y^2}{x^2 - y^2}$$

Proper Fraction

Opdeler en uægte brøk i en heltalsdel + en ægte brøk (forudsætter indstillingen *Excact* i *mode Settings*) - kan bruges til polynomiers division

$\text{PropFrac}\left(\frac{49}{12}\right) = 4 + \frac{1}{12}$ $\text{PropFrac}\left(\frac{2\cdot x^4 - 3\cdot x^2 + x + 3}{x + 1}\right) = \frac{1}{x+1} + 2\cdot x^3 - 2\cdot x^2 - x + 2$

deSolve

Standardkommando ved løsning af differentialligninger

ans og right(ans)

Med kommandoen "*ans*" kan man undgå at kopiere eller gentage en indskrivning ved i stedet at referere direkte til resultatet af den foregående operation i Math-boxen. Man opnår samtidig, at beregningerne stadig stemmer, selvom den foregående operation eventuelt ændres.
Eksempel:

$\text{solve}(4\cdot x - 2\cdot y - 10 = 0, y) \Rightarrow y = 2\cdot x - 5$, $f(x) := ans \Rightarrow \text{"Done"}$, $f(x) \Rightarrow y = 2\cdot x - 5$

Ønsker man dernæst at anvende højresiden af funktionen som udtryk i graftegnerfaciliteten, anvendes kommandoen: $\text{right}(ans) = 2\cdot x - 5$ og dernæst $g(x) := ans = \text{"Done"}$ samt $g(x) = 2\cdot x - 5$.
Herefter kan grafen tegnes ved blot at skrive g(x) i indskrivningsfeltet.

|-operator/"with" operator

Placeres efter formel/ligning/udtryk i Math-boxen for at tildele konstanter en talværdi eller afgrænse definitionsmængden - kan ofte erstattes af eller bruges sammen med kommandoen *and*. Tasten | findes på de fleste PC-tastaturer til højre for + og bruges sammen med Alt Gr-tasten.

$\text{solve}(a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos(va), a) \mid b = 5 \text{ and } c = 9 \text{ and } va = 55 \text{ and } a > 0$
$\Rightarrow a = 7.37$

- Bemærk, at TI ikke skelner mellem store og små bogstaver. Man kan således f.eks. ikke bruge betegnelsen *A* for en vinkel i en trekant og *a* som betegnelse for den modstående side, men må derimod omdøbe en af størrelserne. f.eks. kan vinklen i stedet kaldes *VA*.

- Bemærk, at TI underforstår gangetegn mellem tal og bogstaver. derimod skal der sættes gangetegn mellem to bogstaver, hvis de skal ganges sammen. Ellers opfatter TI de to bogstaver som en samlet variabel.

Altså ikke sådan: $\text{solve}(2\cdot ax + b = 0, x) \Rightarrow 0 = -(b + 2\cdot ax)$

hvorimod et enkelt supplerende gangetegn giver: $\text{solve}(2\cdot a\cdot x + b = 0, x) \Rightarrow x = \frac{-b}{2\cdot a}$

Samme problem findes ved parenteser, som ganges med et bogstav, jvfr. at

$a\cdot\left(\frac{3+x}{2\cdot a}\right) = \frac{x+3}{2}$

giver god mening, mens et glemt gangetegn i bedste fald resulterer i en fejlmelding:

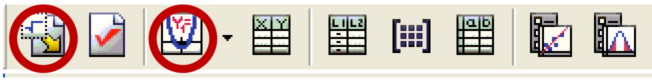
$a\left(\frac{3+x}{2\cdot a}\right)$ EVAL ERROR: Invalid implied multiply

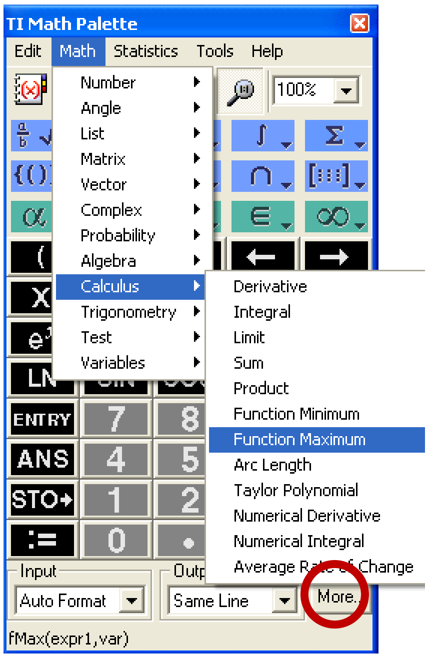
TI som lommeregner

TI har ligesom "almindelige" grafregnere en lang række faciliteter til løsning af ligninger og til talbehandling i øvrigt. De vigtigste er:

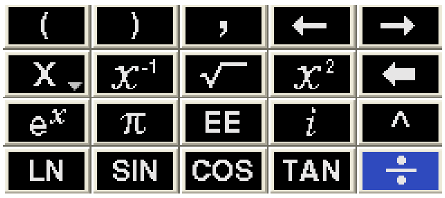
- *Math-box*, som kan åbnes ved enten at klikke på ikonet længst til venstre i værktøjslinjen eller ved at bruge genvejstasten *ctrl + M.* Når Math-boxen er åbnet, får man endvidere en *Math Palette*, hvor man som undermenuer kan finde en lang række kommandoer. Math paletten nedenfor viser f.eks., hvordan man finder den relevante kommando, hvis man skal finde en funktions maksimum. Hvis man kan huske disse kommandoer udenad, er det dog som regel lettest at skrive dem direkte i Math-boxen.

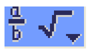
- Grafisk løsning, som foretages ved - ligesom på en almindelig grafregner - at indskrive den funktion, man vil behandle, og derefter løse det aktuelle problem med udgangspunkt i funktionens graf. Man skal i dette tilfælde klikke på det tredje ikon fra venstre i værktøjslinjen.





I Math paletten finder man desuden stort set de samme kommandoer, som man har på en almindelig grafregners tastatur. Det drejer sig bl.a. om:



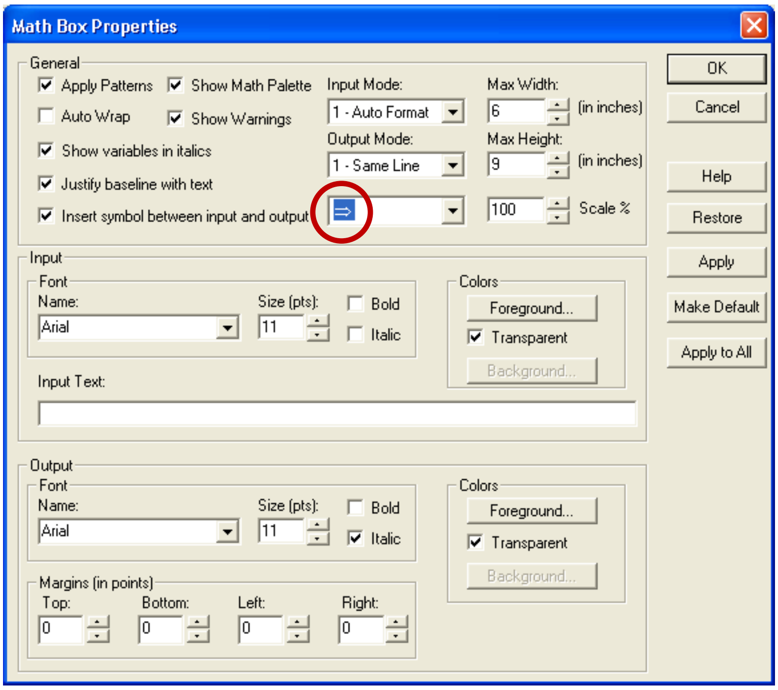
- Parenteser
- Adskillelseskomma (som ikke må forveksles med decimalkomma - se ovenfor under kommatal i indledningen)
- Variablen x (navnet kan om nødvendigt ændres)
- x $^{-1}$, d.v.s. en størrelses reciprokværdi
- Kvadratrod
- Skal man finde andre rødder end kvadratrødder, skal man bruge symbolet , som findes i palettens øverste venstre hjørne og f.eks. skrive: $\sqrt[3]{8} = 2$
- Kvadratet på en størrelse
- Eksponentialfunktion med grundtal *e* (her kan bogstavet *e* fra pc-tastaturet ikke benyttes)
- Konstanten *pi*
- *EE* som bruges, når man vil skrive et tal som en potens af 10
- **Λ** , som bruges, når man vil skrive en potens
- *LN*, som er symbolet for den naturlige logaritme
- De trigonometriske funktioner, sinus, cosinus og tangens. Har man brug for de inverse trigonometriske funktioner, kan man anvende kommandoerne *arcsin, arccos og arctan*, eller løse opgaven som en ligning.

  D.v.s. sådan: $\arctan(1) = 45$ eller sådan: $\text{solve}(\tan(x) = 1, x) \mid x > 0 \text{ and } x < 90 \Rightarrow x = 45$.
  Kommandoerne kan evt. findes i Math Palette →Math →Trigonometry
  Bemærk også kommandoen "|" (findes på de fleste PC-tastaturer øverst til højre - bruges sammen med Alt Gr). Den oversættes ved "givet at" eller "for hvilket det gælder". Den bruges til tildele

konstanter bestemte talværdier eller begrænse det interval, som de kan forekomme i - typisk for at undgå flere/uendeligt mange løsninger eller negative tal.

Nederst på Math paletten fås kommandoen *Output.* Her vælges, om resultatet skal stå på samme linje som opgaven, om det skal stå på næste linje eller eventuelt skjules.

Allernederst til højre på Math paletten findes kommandoen *More.* Den giver adgang til *Math Box Properties*, hvor man bl.a. kan vælge skrifttype og -størrelse. Endvidere kan man vælge at indsætte et symbol mellem opgaven og resultatet - typisk "⇨" eller "=" ("⇔" findes desværre ikke). Husk at sætte flueben efter valget. Et klik på knappen *ok* betyder, at indstillingen gælder for den Math-box, som man aktuelt arbejder med, mens et klik på *Make Defaults* medfører, at indstillingen bruges på alle kommende Math-boxe (indtil indstillingen igen ændres).

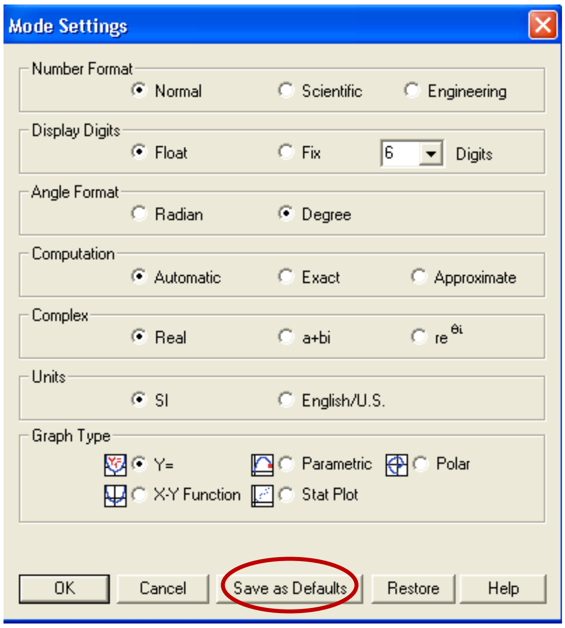


Ligesom lommeregneren har TI en række grundindstillinger, som man skal være opmærksom på. De findes ved i værktøjslinjen at klikke på ikon nummer to fra venstre (eller brug genvejstasten F9):

Her kan man bl.a. vælge:

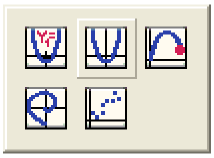
- Talformat (normal eller som titalspotens i forbindelse med symbolet EE (virker kun i forbindelse med decimaltal))
- Antal decimaler
- Om man i forbindelse med trigonometriske funktioner regner i grader eller radianer
- Om facit skal angives eksakt (d.v.s. om nødvendigt i kvadratrødder eller andre ikke-rationelle tal) eller som tilnærmet værdi, d.v.s. omregnet til decimaltal
- grafformer

Husk også her at klikke på enten *ok* eller *Save as Defaults.*

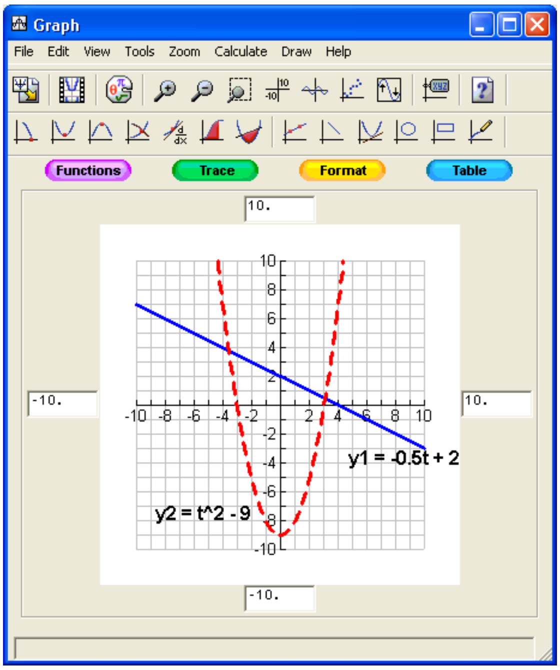


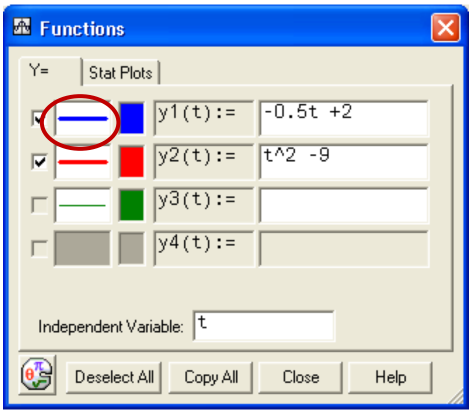
Grafer

TI's grafvindue aktiveres ved at klikke på det tredje ikon fra venstre på værktøjslinjen. Til ikonet hører nogle underinddelinger, så man kan vælge forskellige graftyper, bl.a. parameterfremstillinger/banekurver og forskellige former for statistiske plots. Disse underliggende menuer behandles andetsteds i denne vejledning.

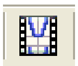
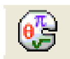
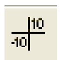
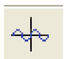
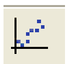


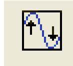
Når man åbner, får man først et vindue til indskrivning af grafer. Bemærk, at variablen ikke nødvendigvis behøver at hedde x, men at man frit kan vælge dens navn. Funktionerne vises herefter i et grafvindue med grundindstillingen [-10;10] x [-10;10]. Rammerne kan dog lynhurtigt ændres ved at skrive i de respektive felter. Bemærk også, at man kan gøre graferne fede og give dem forskelligt udseende og farve for at holde dem ude fra hinanden. Klik på feltet markeret på figuren og vælg blandt de viste muligheder.

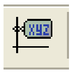




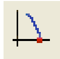
Grafvinduet er forsynet med to værktøjsbjælker med en række ikoner. Det drejer sig om:

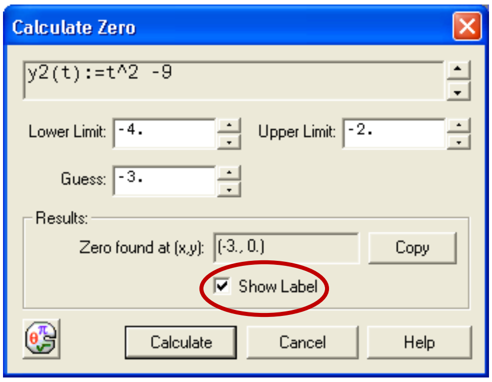
- Save to Document: (genvejstast: ctrl + s) indsætter figuren I dokumentet, hvorfra den eventuelt kan kopieres til et almindeligt Word-dokument. 
- Animate Graph: muliggør animation af et forløb over tid eller lign. - især interessant i forbindelse med vektorfunktioner og anvendelser i fysik 
- Palette: åbner for symboler til indskrivning af formler og tilsvarende (TI kan ikke altid genkende symboler hentet fra computerens tastatur). 
- Zoom ind og Zoom ud: 
- Zoombox: Man vælger selv sit billedudsnit med cursoren (klik i et hjørne af det relevante udsnit og træk). 
- Zoom Standard: Man bringes fra diverse særindstillinger af vinduesfeltet tilbage til grundindstillingen [-10;10] x [-10;10]. 
- Zoom Trig: Tilpasser vinduet til trigonometriske funktioner (x-aksens enheder angives I radianer). 
- Zoom Stat: Tilpasser vinduet til statistiske funktioner eller plots, typisk tegnet på grundlag af værdier skrevet ind i lister 

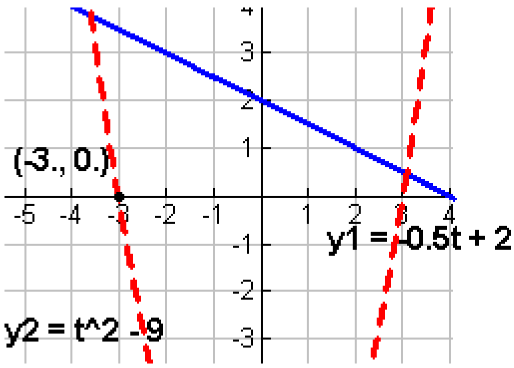
- Zoom Fit: Forsøger at tilpasse vinduet til en aktuel funktion - vinduet dannes der, hvor grafens forløb ændres - virker dog langt fra altid, da systemet ikke har forudsætninger for at finde de dele af grafen, som brugeren finder interessant. 

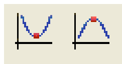
- Tekst: Her kan man indsætte små tekstfelter i grafvinduet - evt. for at holde forskellige grafer ude fra hinanden. Bemærk, at man kan trække i felterne og således placere dem valgfrit, samt at man kan redigere i skrifttyper og -størrelser. Bemærk også - som i eksemplet ovenfor - at typografien somme tider bliver lidt primitiv. 

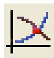
- Help: Engelsksproget hjælpefunktion, som desværre kræver en del matematisk overblik, hvis forklaringerne skal forstås fuldt ud. 

- Nulpunkt: Finder den værdi, hvor grafen skærer x-aksen. Operationen svarer således til at løse ligningen f(x) = 0. Når man klikker på ikonet, får man feltet *Calculate Zero*, hvor man i øverste linje vælger, hvilken funktion man arbejder med, og dernæst for hvert nulpunkt vælger en x-værdi lavere end skæringspunktet og en større end skæringspunktet, som TI så skal søge imellem. Søgefeltet kan også afgrænses ved at trække i de lodrette stiplede linjer i grafvinduet. Husk at sætte flueben i feltet *Show Label.* Hvis man vil arbejde videre med grafbilledet, skal man huske at lukke vinduet *Calculate Zero* helt. 

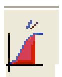


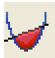


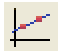
- Minimum og Maksimum: Finder en funktions minimum eller maksimum. Fremgangsmåden er principielt den samme som beskrevet ovenfor under *Calculate Zero*. Bemærk at denne metode som udgangspunkt giver et præcist resultat, mens man med funktionen *Trace* ikke nødvendigvis får en værdi nøjagtig i det punkt, hvor pågældende funktion har maksimum eller minimum. 

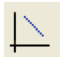
- Skæringspunkt: (grafisk løsning af ligninger) Finder skæringen mellem to grafer. Anvendes principielt på samme måde som *Calculate Zero.* Bemærk også at facit angives i decimaltal og ikke eksakt og at grafisk løsning ikke nødvendigvis fortæller noget om, hvordan graferne opfører sig uden for vinduet. Er der flere skæringer(løsninger) er man desuden nødt til at finde dem enkeltvis. Søgefeltets afgrænsning kan bestemmes på samme måde som vist under *Calculate Zero,* eller man kan trække i de lodrette stiplede linjer, som dukker op, når man klikker på ikonet. 

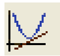
- Differentialkvotient: Finder en funktions differentialkvotient i et punkt. Facit angives som en talværdi. Husk at sætte flueben i feltet *Show Label.*

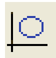
- Integral: Beregner det bestemte integral mellem graf og x-akse. Betjenes principielt som *Calculate Zero.* Bemærk at grænserne kan kopieres ind i kommandofeltet fra figuren. Bemærk også at facit angives i decimaltal og ikke eksakt. 

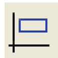
- Areal med skravering: Finder arealet mellem to grafer. I det tilhørende kommandofelt *Calculate Intersecting Region* anvendes samme type kommandoer som i *Calculate Zero.* Bemærk at grænserne kan kopieres ind i kommandofeltet fra figuren. Vær opmærksom på, hvilken funktion, der står øverst, og hvilken der står nederst. 

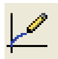
- Linje: Tegner en linje *gennem* to punkter, hvis koordinater kan indskrives eller placeres ved ”klik og træk”. 

- Linjestykke: Tegner en linje *mellem* to punkter, hvis koordinater kan indskrives eller placeres ved ”klik og træk”. 

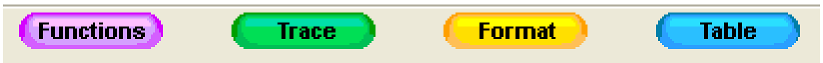
- Tangent: Finder en funktions tangent i et punkt. Tangentens ligning angives og tangenten tegnes. Husk at sætte flueben i feltet *Show Label.* 

- Cirkel: Tegner en cirkel ud fra indskrivning af centrums koordinater og radius. Både centrum og radius kan ændres ved ”klik og træk”. 

- Rektangel: Tegner rektangler ud fra indskrivning af hjørners koordinater. Kan ændres ved ”klik og træk”. 

- Frihåndstegning: Giver mulighed for forklarende pile, understregninger m.v. . Pas på: bliver let gnidret/uoverskueligt. 

Endelig har grafvinduet fire aflange knapper lige under ikonerne:



- Functions: Giver mulighed for at tilføje nye funktioner samt redigere i de allerede indskrevne funktioner.
- Trace: Giver mulighed for at spore en funktion og finde samhørende x- og y-værdier. Ved at klikke på *Label* indsættes punktets koordinatsæt på grafen.
- Format: Giver mulighed for at ændre på grafvinduet (akser, skalaer, gitter, farver, pile m.m.) Akser og gitre kan evt. fjernes helt, hvis man blot ønsker en illustration af en færdig figur.
- Table: Viser sammenhængen mellem x- og y-akseværdier i tabelform.

Løsning af ligninger.

Ligninger af n'te grad med R som definitionsmængde.

løses med solve-funktionen på følgende måde:

Åben Math-box 

$$\text{solve}(5\cdot x - 8 = 12, x) \quad \Rightarrow x = 4$$

$$\text{solve}(3\cdot x^2 - 6\cdot x - 45 = 0, x) \quad \Rightarrow x = 5 \text{ or } x = -3$$

Læg mærke til, at man skal fortælle, hvad det er, TI skal beregne (her x).

NB! Hvis svaret kommer ud som "true" er det fordi alle tal i definitionsmængden er løsninger. Hvis svaret er "false", er der ingen løsninger.

$$\text{solve}(x^2 - 16 = (x - 4)\cdot(x + 4), x) \quad \textit{true}$$

$$\text{solve}\left(2\cdot x^2 + 8 = \frac{1}{2}\cdot x, x\right) \quad \Rightarrow \textit{false}$$

Ligninger af n'te grad med indskrænkning i definitionsmængden.

Hvis der er indskrænkninger I definitionsmængden kan det angives på følgende måde:

$$\text{solve}(x^2 - 4\cdot x = 0, x) \mid 0 < x \text{ and } x < 5 \quad \Rightarrow x = 4$$

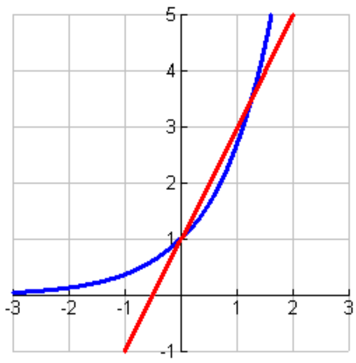
Operatoren "|" findes på tastaturet øverst til højre, brug Alt Gr.

Ved løsning af eksponentielle ligninger skal "e" vælges fra paletten eller skrives som exp(x):

$$\text{solve}(\exp(x) = 2\cdot x + 1, x)$$

$\Rightarrow x = 1.25643 \text{ or } x = 0.$

Warning: More solutions may exist



Hvis man får en sådan advarsel, skal man supplere med graf eller evt. vælge grafisk løsning (se under Grafer). Grafen til højre viser, at der kun er de to viste løsninger, idet vi ved at e^x er monoton.

To ligninger med 2 ubekendte

Eksempel:

$$\text{solve}(x + 2\cdot y = 5 \text{ and } 2\cdot x - 2\cdot y = x\cdot y + 1, \{x, y\}) \quad \Rightarrow x = 3 \text{ and } y = 1 \text{ or } x = -4 \text{ and } y = \frac{9}{2}$$

Læg mærke til at man bruger tuborg-parentes til at fortælle, hvad der skal løses for.

Hvis man f.eks. kun vil have positive tal som løsning:

$$\text{solve}(x + 2\cdot y = 5 \text{ and } 2\cdot x - 2\cdot y = x\cdot y + 1, \{x, y\}) \mid x > 0 \text{ and } y > 0 \quad \Rightarrow x = 3 \text{ and } y = 1$$

Definition af konstanter og funktioner

Definitioner dannes vha. ":=" og ophæves igen med "Math section break" eller med Ctrl+k

Konstanter:

Hvis man skal bruge det samme tal flere gange, kan det måske betale sig at gemme tallet i form af et eller flere bogstaver. Det gøres i Math-boxen vha. ":=", som i TI bruges til at definere en størrelse eller en funktion.

Eksempel : a tildeles en værdi, som herefter kan bruges i senere udregninger (brug "hide output" til at undgå at TI skriver tallet to gange).

$$a := 2.4435$$

$$a \cdot 12 \qquad = 29.322$$

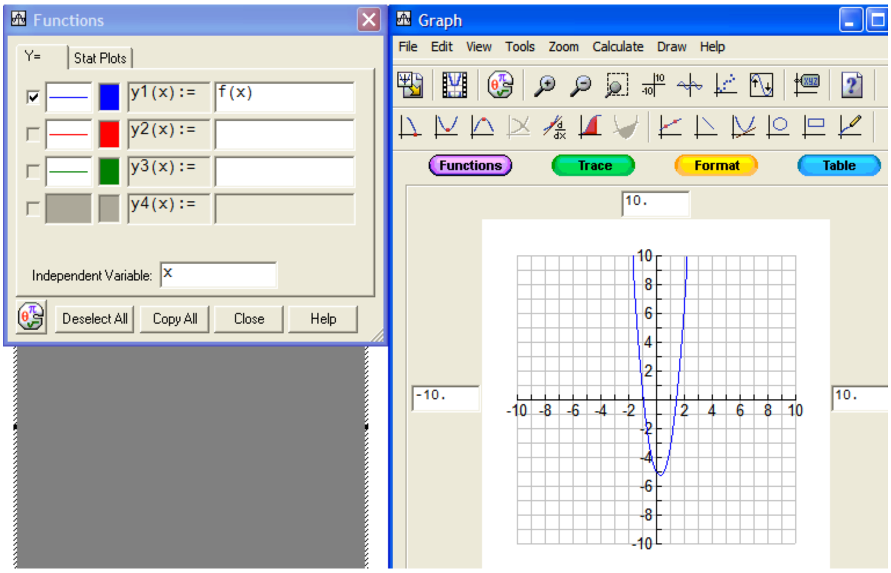
Funktioner:

Funktioner defineres på samme måde, f.eks.:

$$f(x) := 4 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 5$$

Vælg "Hide output" for at undgå, at TI skriver "Done":

Nu kan man få tegnet graf og få udført forskellige beregninger uden at skrive forskriften igen:



Hvis man kender x (f.eks. x=3) og skal beregne funktionsværdi en skrives blot f(3)i Math-boxen:

$$f(3) \qquad = 25$$

Man kan løse en ligning, dvs. finde x, når f(x) er kendt:

$$\text{solve}(f(x) = 1, x) \qquad \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ or } x = -1$$

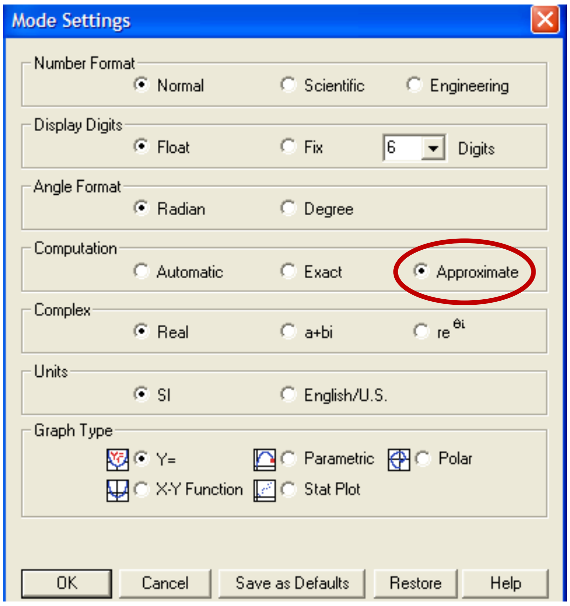
Bemærk forskel mellem brug af " =" (resultat af regnestykke) og "$\Rightarrow$"(efter solve)

Hvis resultatet er "grimt" som herunder:

$$\text{solve}(f(x) = 4, x) \qquad \Rightarrow x = \frac{\sqrt{37}+1}{4} \text{ or } x = \frac{-(\sqrt{37}-1)}{4}$$

og facit ikke behøver at være eksakt, kan man vælge approximate under computation i "mode Settings" 

$$\text{solve}(f(x) = 4, x) \qquad \Rightarrow x = 1.77069 \text{ or } x = -1.27069$$



Varier koefficienter vha. Slider Control.

I nogle opgaver skal man regne på en koefficient eller angive nogle værdier/ et interval, hvor koefficienten giver funktionen bestemte egenskaber, f.eks. et bestemt antal nulpunkter. Denne opgavetype kan løses grafisk ved at bruge Slider Control:

Eksempel 1:

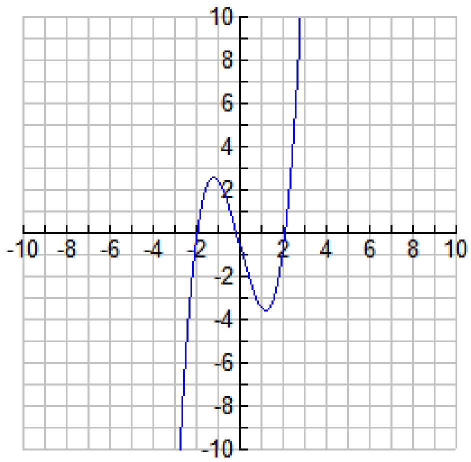
For hvilke værdier af d har tredjegradspolynomiet

$$f(x) := x^3 - 4 \cdot x + d$$

henholdsvis én, to eller tre løsninger.

For at kunne variere d, indføres Slider Control, som hentes under "Insert":

d: 



Ved at flytte skyderen får man d-værdierne ændret, og ændringer ses straks på grafen.

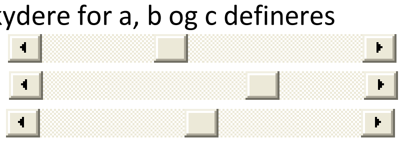
Man kan definere flere Slider Controls på samme måde:

Eksempel 2:

$$f(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c \qquad \text{"Done"}$$

Skydere for a, b og c defineres

a:
b:
c:



d defineres:

$$d := b^2 - 4 \cdot a \cdot c \qquad 16.81$$

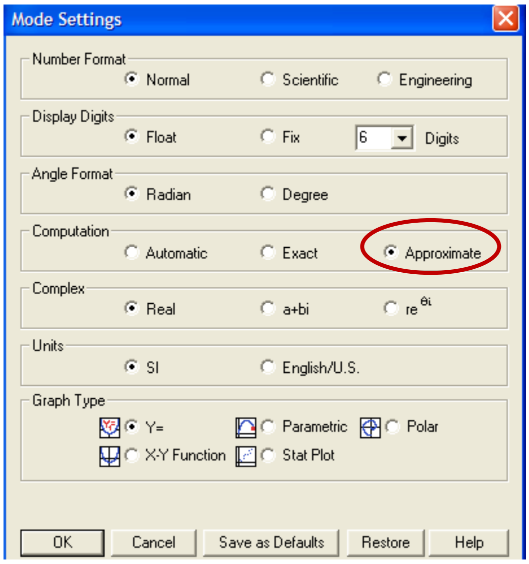
Nu kan ændringerne i diskriminanten og i grafen for *f* følges ved at rykke på en eller flere skydere.

Renteformlen

TI kan bruges til løsninger af opgaver med brug af renteformlen $K_n = K_0(1+r)^n$ på flere måder:

1. Direkte indsættelse af kendte værdier:

$$\text{solve}\left(K = 3545\cdot(1+0.02)^5, K\right) \quad \Rightarrow k = 3913.97$$
$$\text{solve}\left(4500 = 3500\cdot(1+0.02)^n, n\right) \quad \Rightarrow n = 12.691$$
$$\text{solve}\left(4500 = 3500\cdot(1+r)^9, r\right) \quad \Rightarrow r = .028317$$



I sidste tilfælde kan man sommetider få nogle ”grimme” løsninger, i så fald gå ind under ”Mode settings”  og vælg ”approximate”:

2. En anden måde at løse opgaven er at skrive formlen og angive de kendte værdier bagefter:

$$\text{solve}\left(Kn = Ko\cdot(1+r)^n, Ko\right) \mid Kn = 750 \text{ and } r = 0.03 \text{ and } n = 8 \quad \Rightarrow ko = 592.057$$

Hvor den lodrette streg betyder ”givet at”. Den hentes vha. Alt Gr og tast øverst til højre.

3. Hvis man skal regne flere opgaver, hvor nogle af tallene går igen, kan man definere de tal, der går igen, så man kun behøver at skrive dem én gang. I nedenstående eksempel ønskes slutkapitalen beregnet efter forskellige antal terminer, dvs. K_0 og renten er konstante:

$$Ko := 2500$$
$$r := 0.05$$

Under Output er valgt ”Hide output” for at undgå at TI skriver tallene igen.

$$\text{solve}\left(Kn = Ko\cdot(1+r)^5, Kn\right) \quad \Rightarrow kn = 3190.7$$
$$\text{solve}\left(Kn = Ko\cdot(1+r)^8, Kn\right) \quad \Rightarrow kn = 3693.64$$

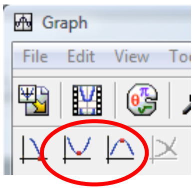
Under Output er valgt ”same line” og medfører tegn (findes under ”More” nederst i Math-boxen).

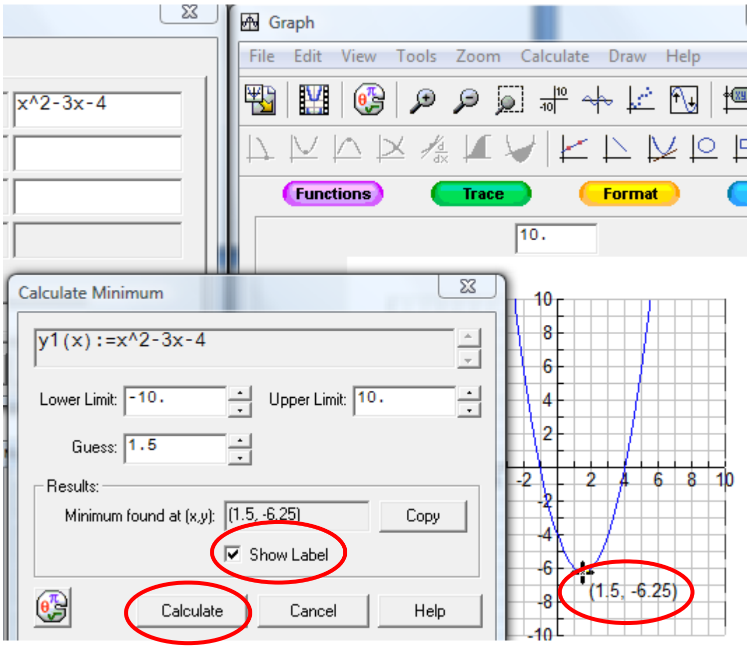
2. gradsligninger

Løsning af 2.gradsligning

$$\text{solve}\left(a\cdot x^2+b\cdot x+c=0,\,x\right)\mid a=2 \text{ and } b=-10 \text{ and } c=12 \qquad \Rightarrow x=3 \text{ or } x=2$$

Grafens toppunkt kan bestemmes grafisk ved at tegne grafen og anvende ikonen til enten minimum eller maksimum afhængigt af, om parablen er ”glad” eller ”sur”. Det kan være nødvendigt at justere vinduet, hvis toppunktet ikke kan ses indenfor de valgte grænser.





Alternativt kan toppunktet beregnes ved brug *fmin* (funktionsminimum) eller *fmax* (funktionsmaksimum) afhængigt af, om parablen er ”glad” eller ”sur”.

$$f(x):=x^2-3\cdot x-4$$

$$\text{fmin}\left(f(x),\,x\right) \qquad \Rightarrow x=1.5$$

$$\{x,\,f(x)\}\mid ans \qquad \Rightarrow \{1.5,\,-6.25\}$$

Bestemmelse af forskrift for en parabel gennem 3 kendte punkter.

$$f(x):=a\cdot x^2+b\cdot x+c$$

$$\text{solve}\left(f(-3)=53 \text{ and } f(2)=13 \text{ and } f(5)=61,\,\{a,\,b,\,c\}\right)$$

$$\Rightarrow a=3 \text{ and } b=-5 \text{ and } c=11$$

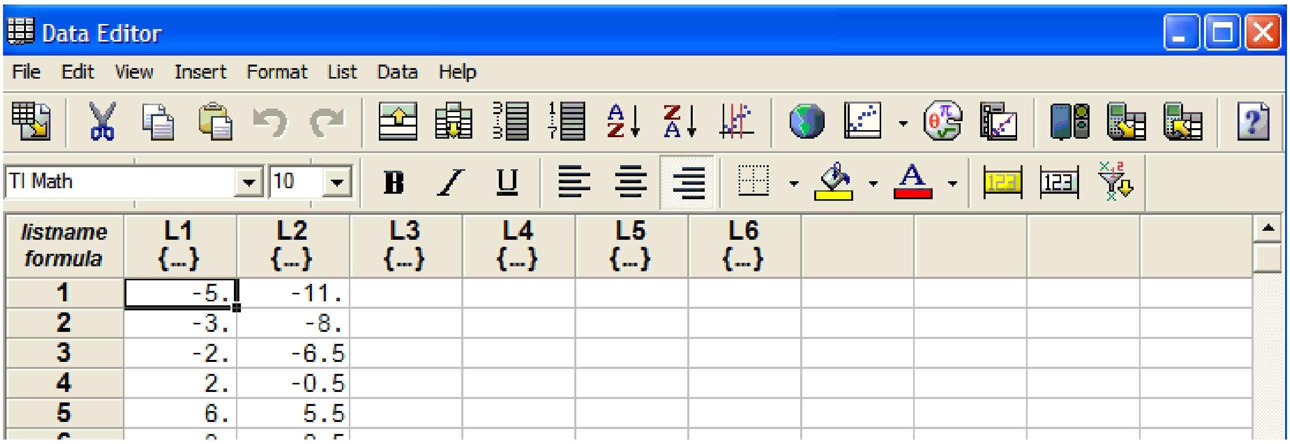
$$f(x)\mid ans \qquad =3\cdot x^2-5\cdot x+11$$

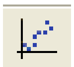
Alternativt kan forskriften bestemmes ved brug af regression (QuadaticReq). Se kapitlet om regression for flere detaljer.

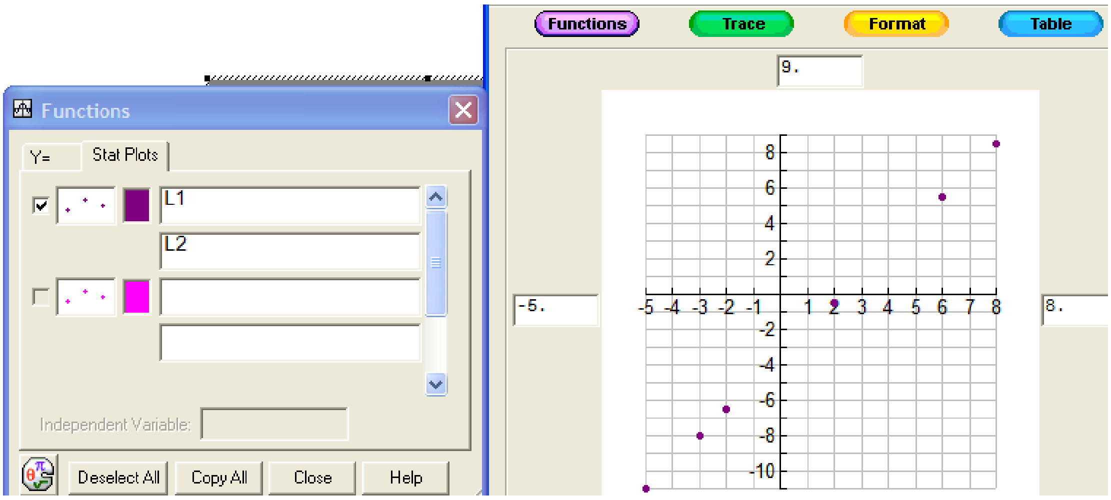
Regression

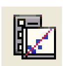
I TI kan man lave regression påfølgende måde:

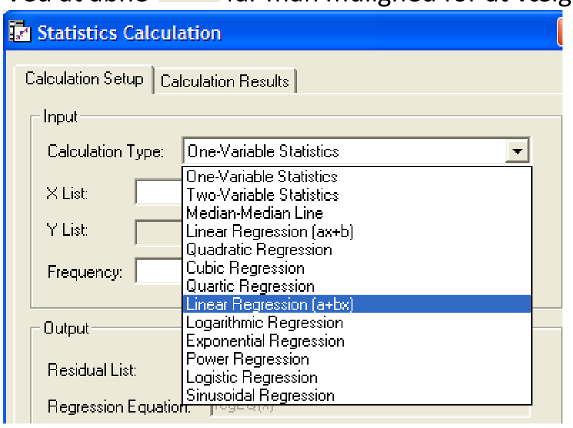
Data tastes ind i lister, f.eks. som her i L_1 og L_2: 

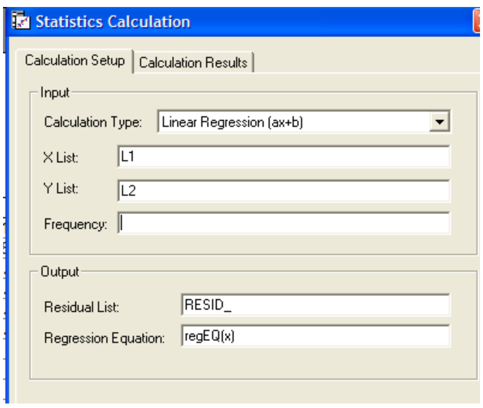


Så åbnes  hvis man ønsker et foreløbigt plot af datasættet, typisk i en situation, hvor modellen ikke er givet på forhånd:



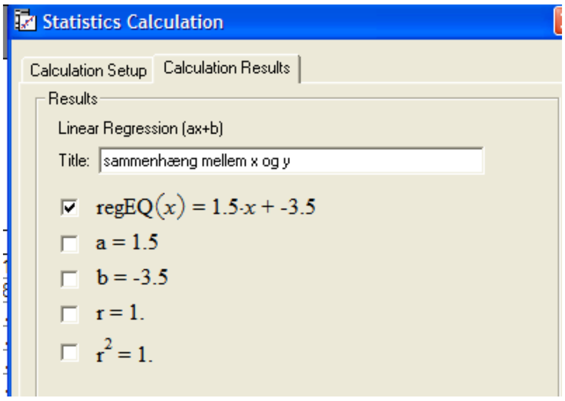
Ved at åbne  får man mulighed for at vælge regression, her lineær:





Bemærk at TI i flere regressionsformer bytter om på a og b i forhold til dansk standardnotation.

Tryk calculate og man får så:



sammenhæng mellem x og y
Linear Regression (ax+b)
regEQ(x) = 1.5x + -3.5

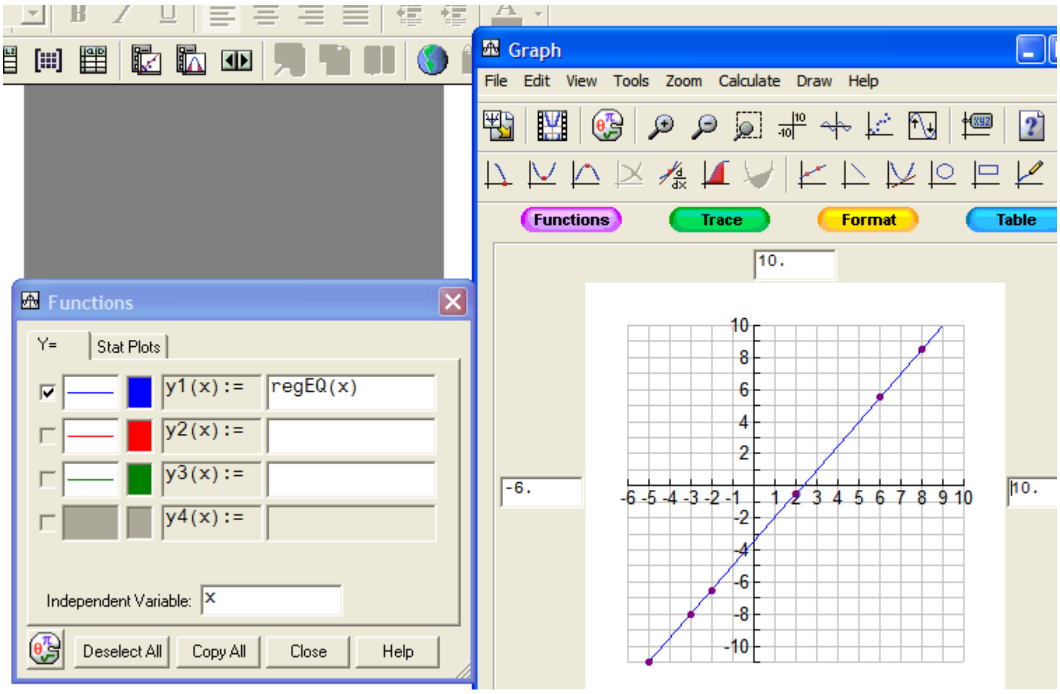
Man kan regne videre på funktionen som den er: $\text{regEQ}(5) \quad = 4.$

Eller omdøbe den og regne videre med g(x):

$$g(x) := \text{RegEq}(x) \qquad \text{"Done"}$$

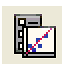
$$g(x) \qquad = 1.5 \cdot x - 3.5$$

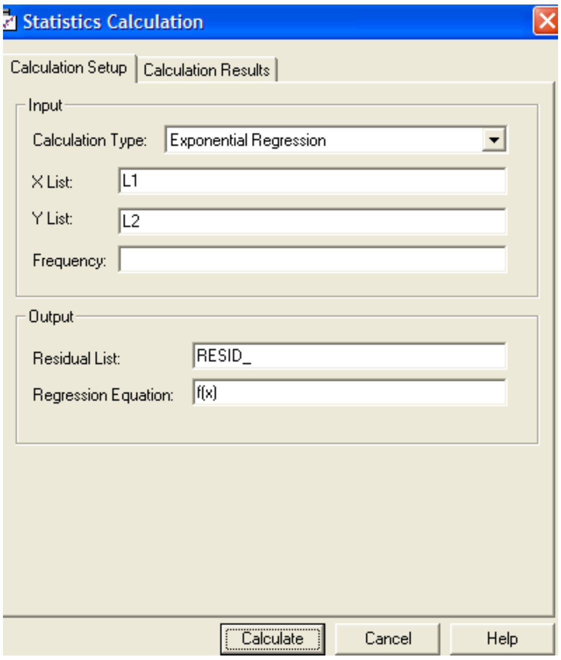
Nemmest er det at vælge funktionens navn allerede under Calculation Setup (se næste eksempel).
Ved at vælge grafvinduet og skrive funktionens navn fås grafen:

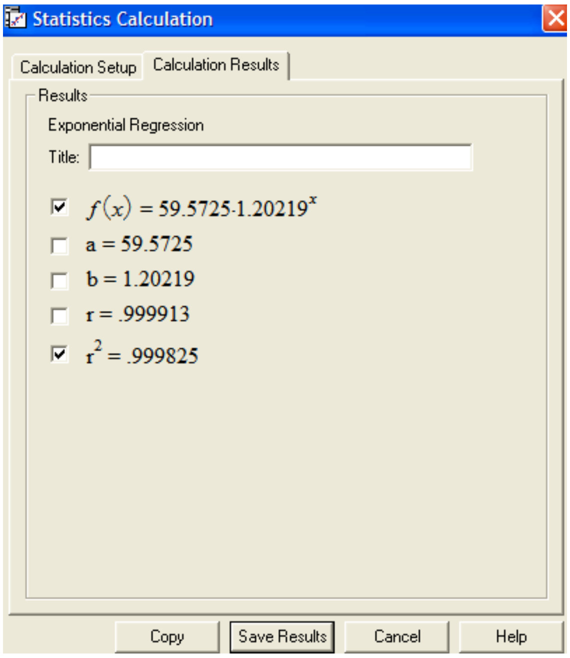


En anden måde at skrive data ind på, er i lister i Math Box:

$$L1 := \{0, 2, 4, 6, 8\}$$
$$L2 := \{60, 85, 125, 180, 260\}$$

 Åbnes og her vælges denne gang exponentiel regression, og funktionens navn er valgt til f(x), tast Calculate og følgende billede kommer frem, her er kun valgt at r^2 medtages sammen med forskriften:



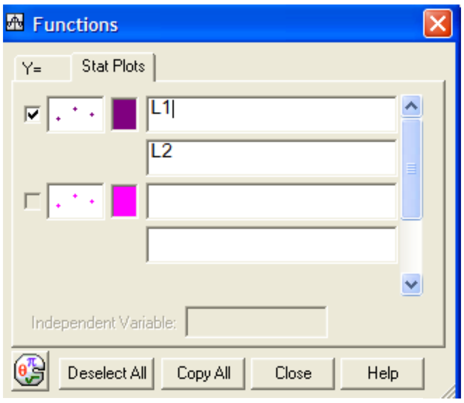


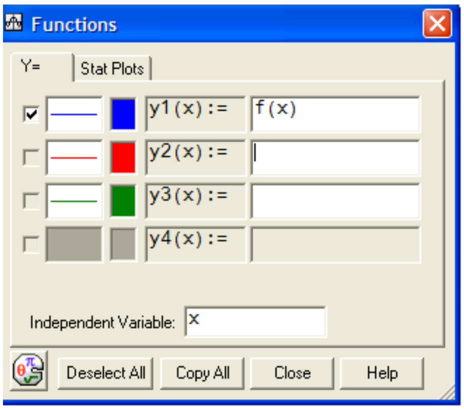
Exponential Regression

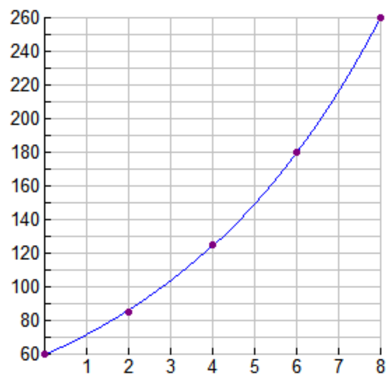
f(x) = 59.5725*1.20219^x

r^2 = .999825

Hvis man både vil have plot af punkterne og grafen:

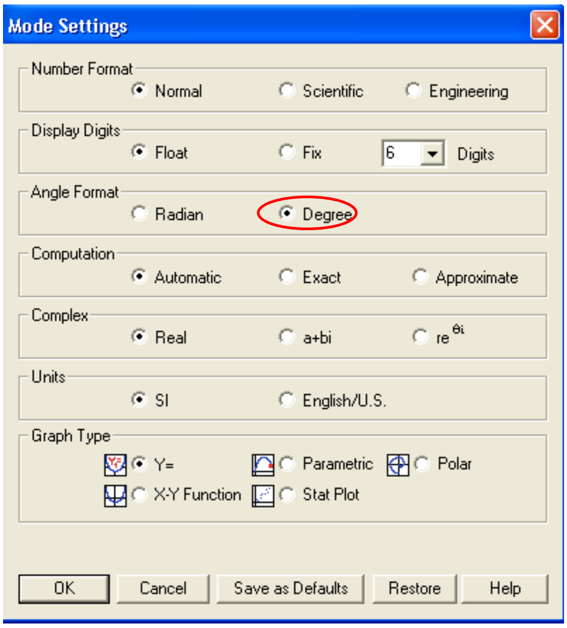






Trigonometri

Ved trigonometriske udregninger i geometri, skal TI indstilles til at regne i grader (degree), frem for radianer (radian). Dette sker i Mode Settings vinduet. Save as Default kan anbefales, så denne indstilling ikke skal gentages hver gang TI anvendes.



Retvinklede trekanter

Pythagoras:

- Ukendt hypotenuse: $a = 2, b = 5, C = 90°$. Udregn c

  $\text{solve}\left(a^2 + b^2 = c^2, c\right) \mid a = 2 \text{ and } b = 5 \text{ and } c > 0$

- Ukendt katete: $b = 5, c = 10, C = 90°$. Udregn a

  $\text{solve}\left(a^2 + b^2 = c^2, a\right) \mid a > 0 \text{ and } b = 5 \text{ and } c = 10 \qquad \Rightarrow a = 8.66025$.

  Bemærk c > 0 hhv. a > 0 i ovenstående, der udelukker negative løsninger.

Cosinus, sinus og tangens

- Ukendt side: $a = 2, B = 50°, C = 90°$. Udregn c

  $\text{solve}\left(\cos(vb) = \frac{a}{c}, c\right) \mid vb = 50 \text{ and } a = 3 \text{ and } c > 0 \qquad \Rightarrow c = 4.66717$

- Ukendt vinkel: $p = 2, q = 5, R = 90°$. Udregn vinklen P

  $\text{solve}\left(\tan(vp) = \frac{p}{q}, vp\right) \mid p = 2 \text{ and } q = 5 \text{ and } 0 < vp \text{ and } vp < 180 \qquad \Rightarrow vp = 21.8014$

  Bemærk, at vinkler skrives som *vb* for vinklen B. Da TI ikke skelner mellem store og små bogstaver, kan B ikke benyttes for vinklen, når b benyttes for siden.

Vilkårlige trekanter

Cosinusrelationerne:

- Ukendt vinkel: $a = 2, b = 5, c = 6$. Udregn vinkel C

  $\text{solve}\left(c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(vc), vc\right) \mid a = 2 \text{ and } b = 5 \text{ and } c = 6 \text{ and } 0 < vc \text{ and } vc < 180$

  $\Rightarrow vc = 110.487$

- Ukendt side (eksempel med 1 løsning): $a = 5, c = 9, B = 55°$. Udregn b

  $\text{solve}\left(b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(vb), b\right) \mid a = 5 \text{ and } c = 9 \text{ and } vb = 55 \text{ and } b > 0$

  $\Rightarrow b = 7.37415$

- Ukendt side (eksempel med 2 løsninger): $b = 8, c = 10, B = 40°$. Udregn a

  $\text{solve}\left(b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(vb), a\right) \mid b = 8 \text{ and } c = 10 \text{ and } vb = 40 \text{ and } a > 0$

  $\Rightarrow a = 12.423 \text{ or } a = 2.89784$

Sinusrelationerne:

- Ukendt side. $a = 2, A = 30°, B = 100°$. Udregn b.

  $\text{solve}\left(\frac{a}{\sin(va)} = \frac{b}{\sin(vb)}, b\right) \mid a = 2 \text{ and } va = 30 \text{ and } vb = 100 \text{ and } b > 0 \quad \Rightarrow b = 3.93923$

- Ukendt vinkel (eks 1) $a = 12, A = 40°, c = 10$. Udregn vinkel C.

  $\text{solve}\left(\frac{a}{\sin(va)} = \frac{c}{\sin(vc)}, vc\right) \mid a = 12 \text{ and } va = 40 \text{ and } c = 10 \text{ and } 0 < vc \text{ and } vc + va < 180$

  $\Rightarrow vc = 32.3884$

- Ukendt vinkel (eks 2) $a = 7, A = 40°, c = 10$. Udregn vinkel C.

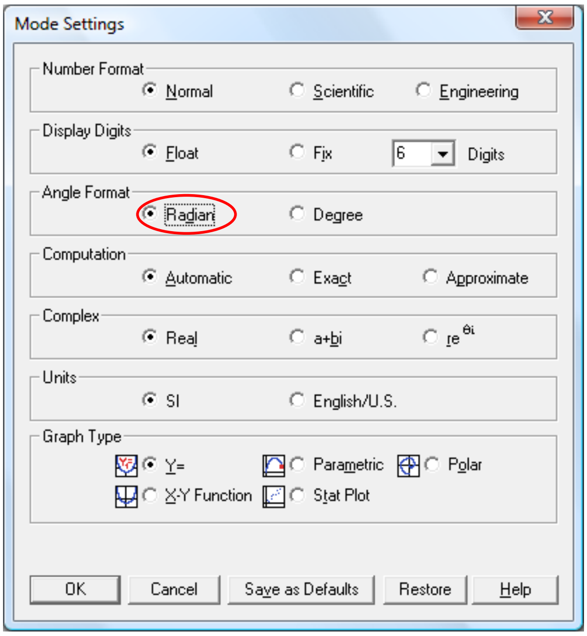
  $\text{solve}\left(\frac{a}{\sin(va)} = \frac{c}{\sin(vc)}, vc\right) \mid a = 7 \text{ and } va = 40 \text{ and } c = 10 \text{ and } 0 < vc \text{ and } vc + va < 180$

  $\Rightarrow vc = 113.326 \text{ or } vc = 66.6742$

  Bemærk va+vc < 180, der sikrer mod falske løsninger.

Trigonometriske ligninger

Ved trigonometriske udregninger indenfor funktioner og ligninger, skal TI normalt indstilles til at regne i radianer (radian) frem for grader (degree). Dette sker i Mode Settings vinduet.



Løsning af trigonometrisk ligning på begrænset interval:

- Løs ligningen: $3 \cdot \sin(2t) = 1{,}3$ indenfor intervallet [0; 2π]

$$\text{solve}(3 \cdot \sin(2 \cdot t) = 1.3, t) \mid 0 \le t \text{ and } t \le 2 \cdot \pi$$

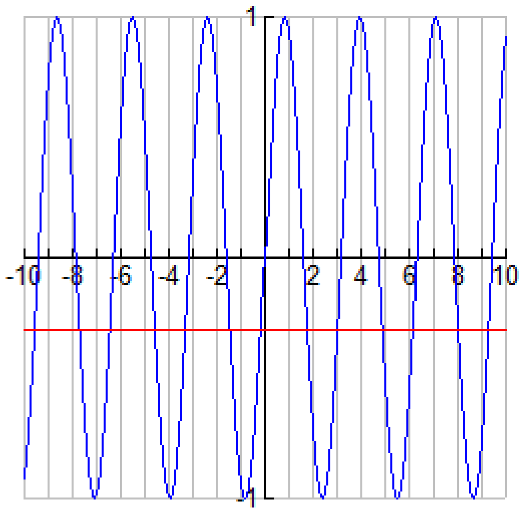
$$\Rightarrow t = 4.48829 \text{ or } t = 3.36569 \text{ or } t = 1.3467 \text{ or } t = .224094$$

Løsning af trigonometrisk ligning indenfor alle reelle tal:

- Løs ligningen $\sin(2t) = -0{,}3$

$$\text{solve}(\sin(2 \cdot t) = -0.3, t) \qquad \Rightarrow t = @n2 \cdot \pi + 1.72314 \text{ or } t = @n2 \cdot \pi - .152346$$

Notationen @n2 betyder, at der på dette sted kan stå et vilkårligt helt tal. Ligningen har således uendeligt mange løsninger, nemlig én løsning for hvert helt tal @n2. Grafisk kan dette illustreres således, hvor hver skæring mellem de to grafer svarer til en løsning af ligningen:



Differentialregning

Bestemmelse af f´(x)

Math-boxen  åbnes

Vælg d/dx, så får man:

$$\frac{d}{d\square}\square$$

I nævneren skriver man variablens navn, typisk x og i tælleren det udtryk, som skal differentieres:

(i Output er valgt ”Same Line” og under More lighedstegn)

$$\frac{d}{dx}(4 \cdot x \cdot \ln(x) - 1) \qquad = 4 \cdot \ln(x) + 4$$

Hvis man skal bruge den samme funktion til flere ting, kan man definere den v.h.a.:= og så blot skrive f(x) i stedet for at skrive forskriften flere gange:

$$f(x) := 3 \cdot x \cdot e^{x} \qquad \text{"Done"}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)) \qquad = (3 \cdot x + 3) \cdot e^{x}$$

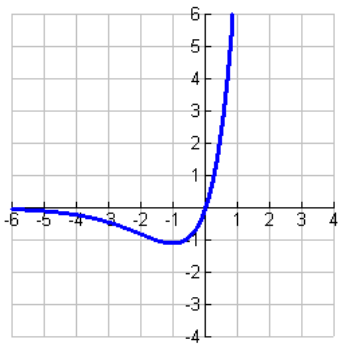
Her kan man også vælge: d(og skrive d(f(x),x)

(Man kan slippe for ”Done” under Output, vælg ”Hide output”).

Monotoniforhold

Monotoniforholdene for en funktion, f (x) kan bestemmes v.h.a. af f´(x).
Eks.:

$$f(x) := 3 \cdot x \cdot e^{x}$$



Først bestemmes f´, dernæst beregnes nulpunkter for f´, og endelig bestemmes fortegn for f´ mellem nulpunkterne:

$$\frac{d}{dx}(f(x)) \qquad = (3 \cdot x + 3) \cdot e^{x}$$

$$\mathrm{df}(x) := \frac{d}{dx}(f(x)) \qquad \text{"Done"}$$

$$\mathrm{solve}(\mathrm{df}(x) = 0, x) \qquad \Rightarrow x = -1$$

$$\mathrm{df}(-10) \qquad = -27 \cdot e^{-10}$$ eller under ”edit”, ”mode settings”, vælg approximate:

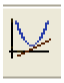
$$\mathrm{df}(-10) \qquad = -.001226$$

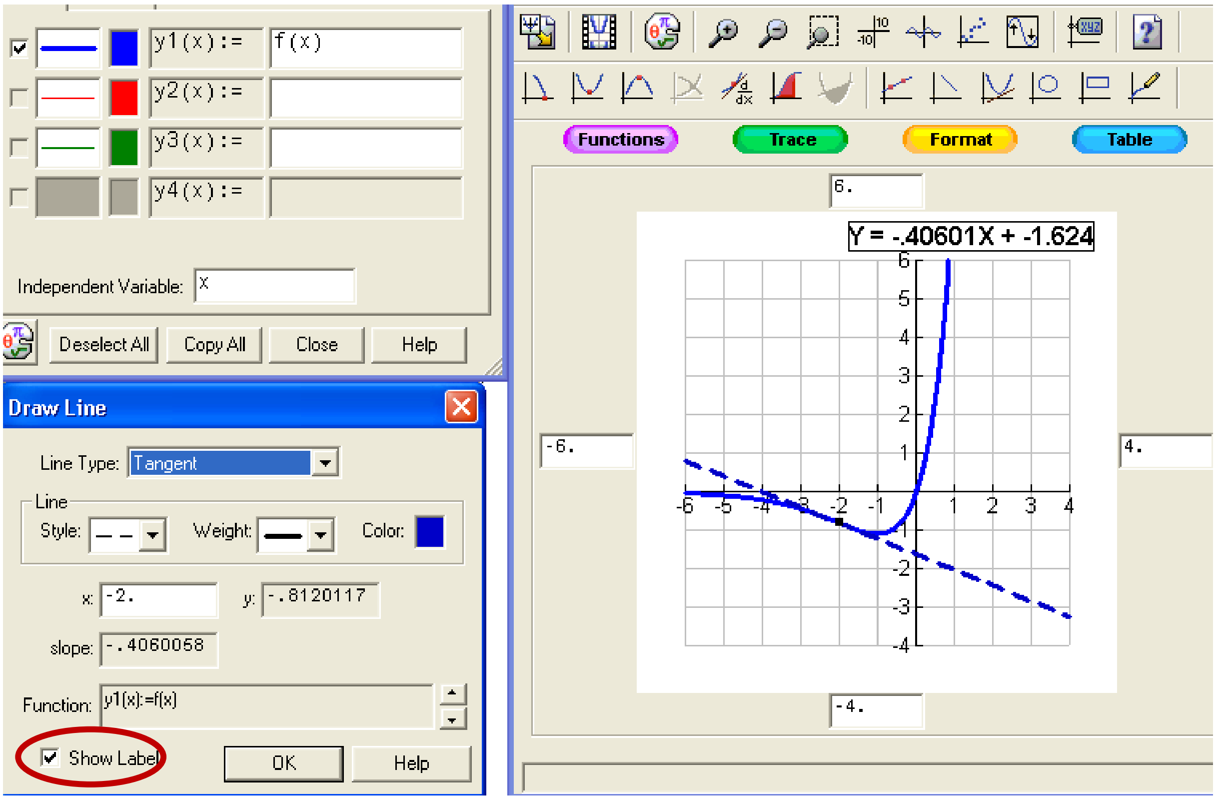
$$\mathrm{df}(10) \qquad = 33 \cdot e^{10}$$ eller $$\mathrm{df}(10) \qquad = 726873.$$

Man ved nu, at f er voksende for x > -1 og aftagende for x < -1 samt at der er minimum i x = 10
(For grundig gennemgang af krav til opgavebesvarelse se lærebog, f.eks. Vejen til matematik B2 s. 94-95.)

Tangentligning

For en given x-værdi kan tangent og tangentligning fås i TI:
I grafvinduet vælges tangent, så fremkommer vinduet Draw line, her skrives den ønskede x-værdi og der hakkes af i Show label. Tangenten og dens ligning kommer nu i grafvinduet:





Hvis opgaven går ud på at finde en tangent med en bestemt hældningskoefficient, er metoden den samme, idet man kan trække tangenten rundt langs grafen.

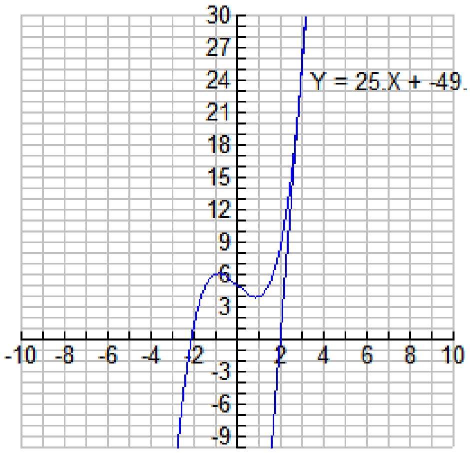
Opgaven kan også løses uden brug af grafvinduet:
Tangentligning: $y-y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$. Eksempel med $x_0 = 3$, hvor $y_0 = f(3)$ og $f'(x_0)=df(3)$:

$$f(x) := x^3 - 2\cdot x + 5 \qquad \text{"Done"}$$

$$df(x) := \frac{d}{dx}\left(f(x)\right) \qquad \text{"Done"}$$

$$f(3) \qquad = 26$$

$$df(3) \qquad = 25$$



Så tangentligningen er:
t: $y-26 = 25(x-3)$ eller $y= 25x - 49$
eller tangentligning i et hug:

$$\text{solve}\left(y - f(3) = df(3)\cdot(x - 3), y\right) \qquad \Rightarrow y = 2$$

Eller endnu en metode:

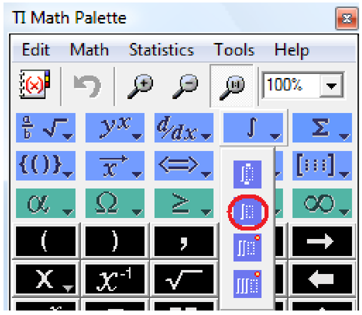
$$y = f(x_0) + df(x_0)\cdot(x - x_0) \mid x_0 = 3$$

$$25\cdot x - 49$$

Integralregning

TI kan regne med ubestemte såvel som bestemte integraler.

Ubestemte integraler



For at udregne et ubestemt integral (finde en stamfunktion) skal integralet uden grænser benyttes (se figur til højre)
Udregningerne kan så f.eks. foretages således:

$$f(x) := 3\cdot x^2 - 6\cdot x - 5$$

$$\text{sf}(x) := \int (f(x))\, dx$$

$$\text{sf}(x) \qquad = x^3 - 3\cdot x^2 - 5\cdot x$$

Da TI ikke kender forskel på små og store bogstaver, kan stamfunktionen ikke bare hedde F, med kaldes i stedet sf.
Som det kan ses, finder TI blot én stamfunktion, så hvis opgaven kræver det, må +k tilføjes manuelt. Det er f.eks. tilfældet, hvis opgaven er at bestemme den stamfunktion F til f, hvor F(3)=10. En løsning til denne opgave kan se således ud:

$$f(x) := 3\cdot x^2 - 6\cdot x - 5$$
$$\text{sf}(x) := \int (f(x))\, dx + k$$

$$\text{solve}(\text{sf}(3) = 10, k) \qquad \Rightarrow k = 25$$

Hermed er opgaven umiddelbart løst, men hvis stamfunktion skal bruges i videre udregninger, skal konstanten *k* i stamfunktionen sættes til løsningen af ligningen. Det sker således:

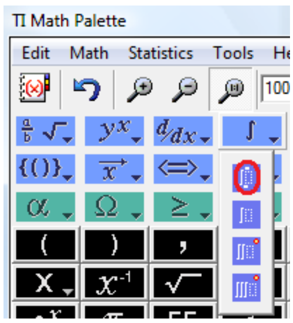
$$k := \text{right}(ans)$$

Stamfunktion er dermed:

$$\text{sf}(x) \qquad = x^3 - 3\cdot x^2 - 5\cdot x + 25$$

Bestemte integraler

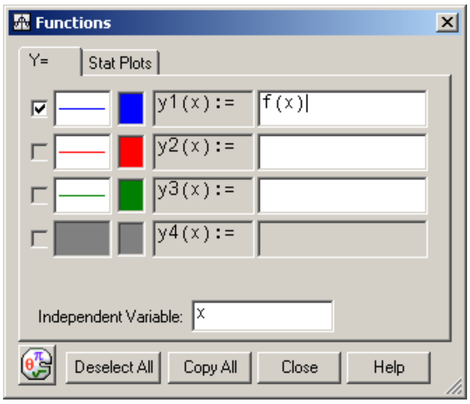
Bestemte integraler regnes på næsten samme måde – blot med ikonen lige oven over. Det kan se således ud:

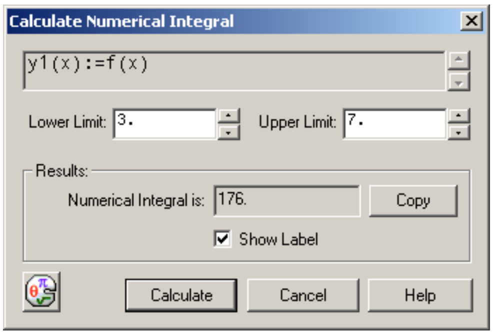


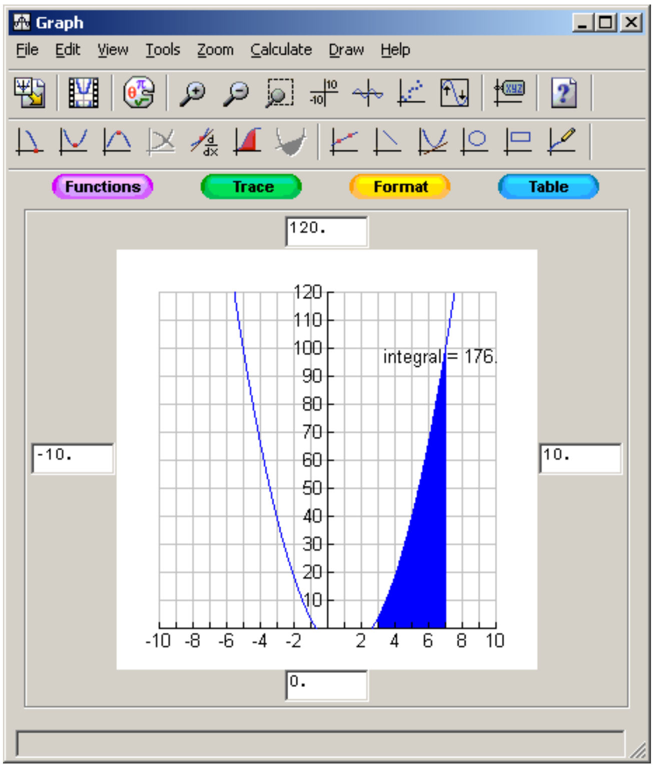
$$f(x) := 3\cdot x^2 - 6\cdot x - 5$$

$$\int_3^7 (f(x))\, dx \qquad = 176$$

Bestemte integraler kan desuden udregnes i grafvinduet, hvilket også giver en fin illustration:







Areal mellem to grafer

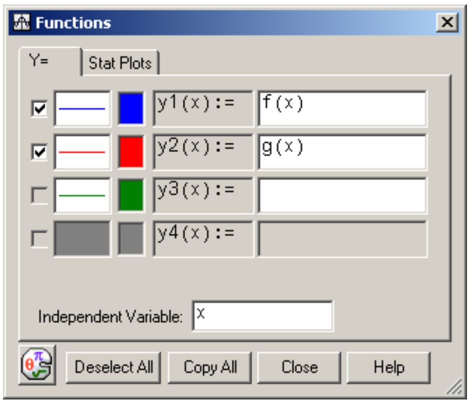
På tilsvarende vis kan arealet mellem to grafer udregnes.

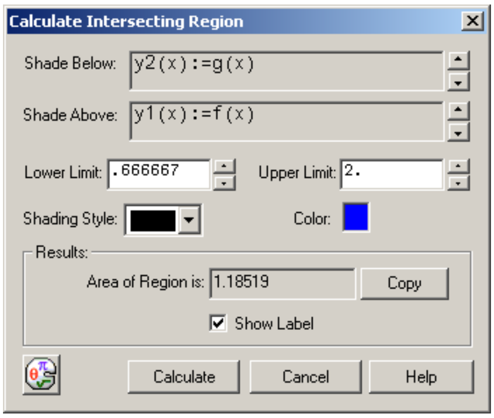
$$f(x) := 3\cdot x^2 - 6\cdot x - 5$$
$$g(x) := 2\cdot x - 9$$

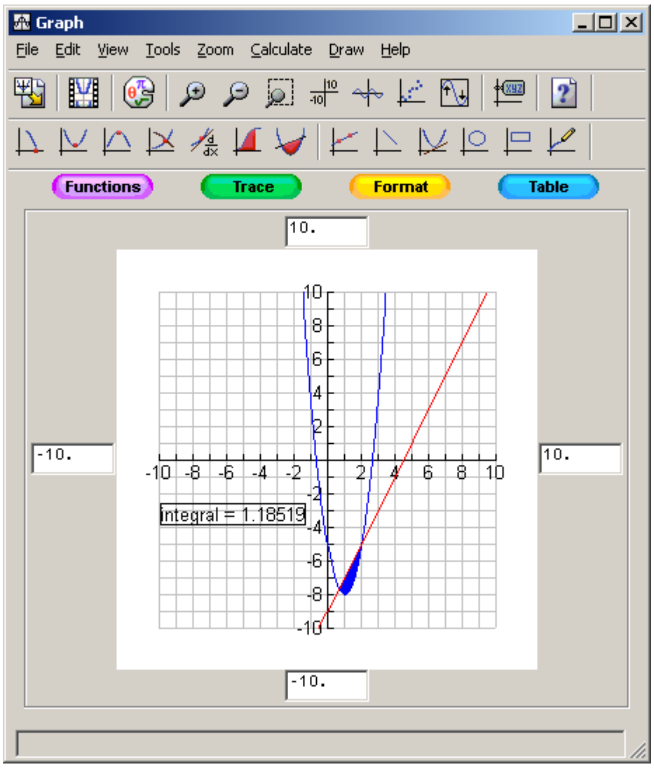
$$\text{solve}(f(x) = g(x), x) \qquad \Rightarrow x = 2 \text{ or } x = \frac{2}{3}$$

Da grænserne dermed er fundne, kan arealet udregnes enten i en Math-box eller i Grafvinduet.

$$\int_{2/3}^{2} (g(x) - f(x))\, dx \qquad \cong 1.18519$$







Ligning, hvor den ubekendte er grænse i et bestemt integral

Det er også muligt at løse ligninger, hvor ligningens ubekendte er en grænse i det bestemte integral.

$$\text{solve}\left(\int_1^b \left(f(x)\right)\,dx = 50,\ b\right) \quad \Rightarrow b = 5.40032$$

Volumen af omdrejningslegeme

Volumen af et omdrejningslegeme kan i TI udregnes ved direkte indsættelse i formlen herfor:

$$f(x) := 3\cdot x^2 - 6\cdot x - 5$$

$$V = \pi\cdot\int_a^b \left(f(x)\right)^2\,dx \mid a = 1 \text{ and } b = 4 \qquad \Rightarrow v = \frac{987\cdot\pi}{5}$$

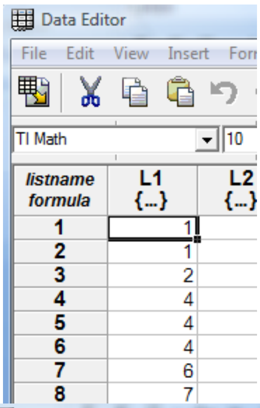
I dette eksempel er værdierne af grænserne indsat efter integralet, men de kunne naturligvis også være indsat direkte i integralet:

$$V = \pi\cdot\int_1^4 \left(f(x)\right)^2\,dx \qquad \Rightarrow v = \frac{987\cdot\pi}{5}$$

Statistik (deskriptiv)

Ikke-grupperede data

For at behandle ikke-grupperede data i TI, skal data tastes ind i en liste.

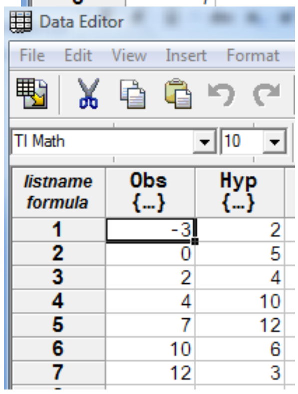


Dette kan gøres ved brug af *List*, hvis ikon er nr. 5 fra venstre på værktøjsbjælken - må ikke forveksles med naboen til venstre, som hedder *Table*. Det giver den Data Editor, som ses til højre, hvor data skal tastes ind som vist.

Alternativt kan data indtastes ved i en Math-box at skrive således:

$$L1 := \{1, 1, 2, 4, 4, 4, 6, 7, 9, 10\}$$

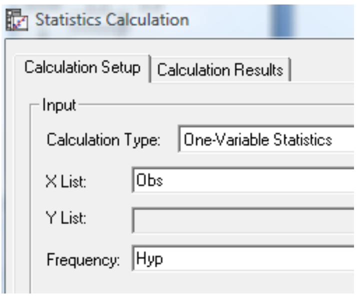
I nogle situationer er data gives som en hyppighed eller en frekvens for hver værdi – som f.eks. denne liste over karakterer.

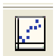


Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Hyppighed	2	5	4	8	15	6	3

Så tastes data ind i to lister i TI – én liste med den observerede værdi (her karakterer) og en anden listen med hyppigheden (eller frekvensen). Listerne kan så navngives ved at klikke på listens navn (L1 osv.).

Til at udregne middelværdi, spredning, kvartilsæt m.m. benyttes *Stat Calculation Tool* (ikon nummer 8 fra venstre).





Herunder vælges One-Variable Statistics og ud for Xlist indtastes navnet på listen (her Obs). Hvis der desuden er en liste med hyppighed eller frekvens skrives navnet på denne liste ud for Frequency.

Dette giver en række informationer.

- $\bar{x}$ er middelværdien af data (stikprøvegennemsnittet)
- $\sum x$ er summen af data og $\sum x^2$ er kvadratsummen
- S_x er estimatet for spredning, hvis data er en stikprøve, mens σ_x er spredning, hvis data er hele populationen.
- n er antal data, minX og maxX er minimum hhv. maksimum.
- Q1, Median og Q3 er kvartilsættet.

One-Variable Statistics

$\bar{x} = 5.28571$

$\Sigma x = 222.$

$\Sigma x^2 = 1814.$

$Sx = 3.95268$

$\sigma x = 3.90534$

$n = 42.$

$minX = -3.$

$Q1 = 2.$

$Median = 5.5$

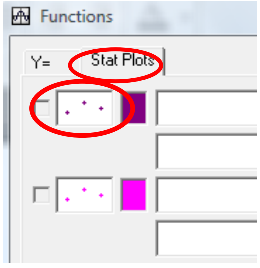
$Q3 = 7.$

$maxX = 12.$

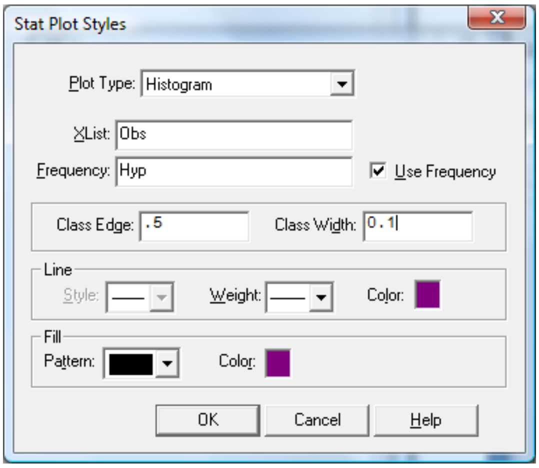
Dermed er middelværdi, spredning og kvartilsæt fundet.

Histogram for ikke-grupperede data.

Desuden kan det være ønskeligt med et histogram/pindediagram til at illustrere data. Dette laves i graf-vinduet.

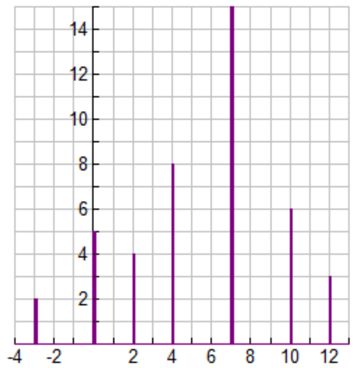


1 Åben grafvinduet med ikonen *Graph.*
2 Klik på *Stat Plots* i toppen.
3 Klik i felt nummer to fra venstre for at vælge plot type - derved dukker vinduet ”Stat Plot Styles” op.



4 Vælg ”Histogram” og skriv navnet på listen ud for Xlist.
5 Hvis hyppighed/frekvens benyttes, indtastes navnet på listen og der klikkes i feltet ”Use Frequency”
6 Søjlernes bredde kan justeres med *Class Width*.
7 Tryk på ”Ok”

8 Sæt kryds i feltet helt til venstre.



9 Indstil grænserne på vinduet, så de passer til data. Dette kan gøres manuelt eller ved brug af knappen *Zoom Statistics.*
10 Klik på *Format* og sæt *Yscale* til 1 eller en anden passende værdi afhængigt af data.

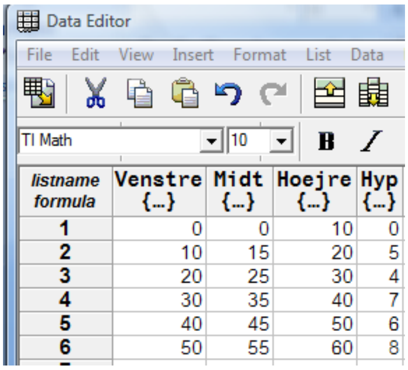
TI laver ikke de kønneste histogrammer, så hvis præsentationen er vigtig, anbefales det at lave histogrammer i Excel i stedet.

Grupperede data

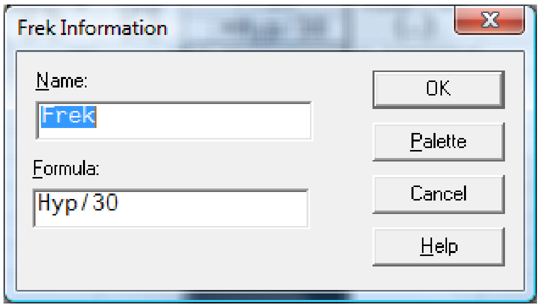
Hvis data er grupperede, som i tabellen nedenfor, er det lidt mere besværligt at bruge TI, men det kan dog lade sig gøre.

Interval	]10;20]	]20;30]	]30;40]	]40;50]	]50;60]
Hyppighed	5	4	7	6	8

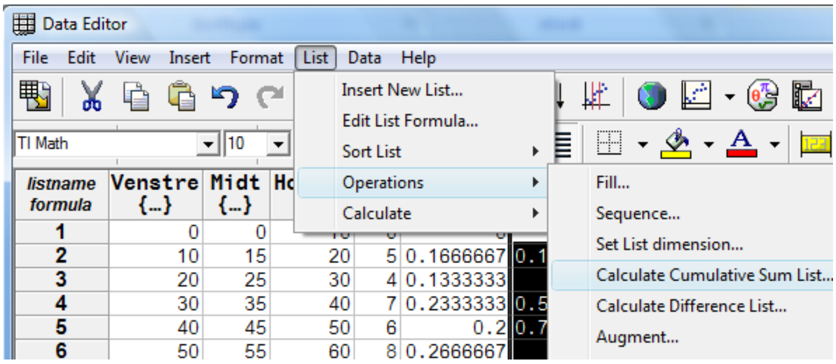
I TI laves nu 4 lister. En for venstre endepunkt for hvert interval, en for midten af hvert interval, en for højre endepunkt af hvert interval og endeligt en søjle med hyppighederne. Listerne navngives ved at klikke med musen på det eksisterede navn (L1, L2 osv.).
Til brug for tegning af sumkurven indtastes desuden en række, hvor Venstre, Midt og Hyp alle er 0, mens Højre sættes til samme værdi, som venstre endepunkt af det første interval.



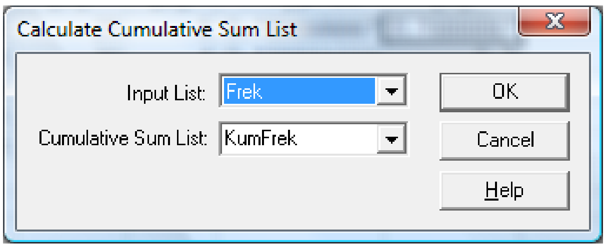
Næste skridt er at lave søjler med frekvens og kumuleret frekvens.
Dobbeltklik på den næste liste (her L5), navngiv den Frek og indtast Hyp/30 som formular (da der i alt er 30 observationer i datasættet).



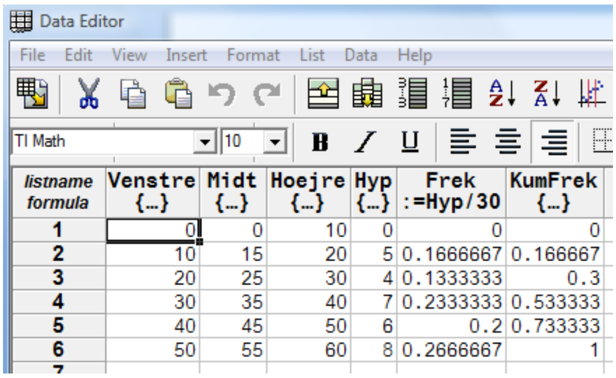
Navngiv derefter L6 som KumFrek og vælg derefter "Calculate Cumulative Sum List" som vist.



Vælg så Inputlist som Frek og Outputlist som KumFrek.



Herefter ser listerne således ud:



listname formula	Venstre {...}	Midt {...}	Hoejre {...}	Hyp {...}	Frek :=Hyp/30	KumFrek {...}
1	0	0	10	0	0	0
2	10	15	20	5	0.1666667	0.166667
3	20	25	30	4	0.1333333	0.3
4	30	35	40	7	0.2333333	0.533333
5	40	45	50	6	0.2	0.733333
6	50	55	60	8	0.2666667	1

Med dette forarbejde på plads, kan middelværdien og spredningen udregnes. Som for ikke-grupperede data benyttes *Stat Calculation Tool* (ikon nummer 8 fra venstre).

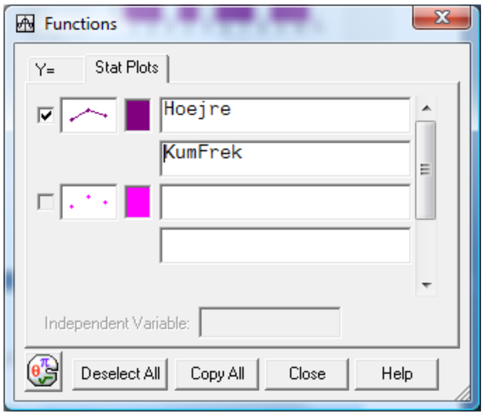
Herunder vælges One-Variable Statistics. Ved Xlist indtastes Midt og ved Frequency indtastes Frek. Dette giver som for ikke-grupperede data en række informationer. Desværre er kvartilsættet Q1, Median og Q3 ikke korrekt, så det er kun middelværdi og spredning, der kan benyttes.

One-Variable Statistics

$\bar{x} = 37.6667$

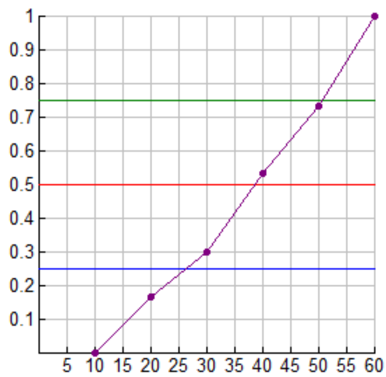
$\sigma x = 14.1264$

For at bestemme kvartilsættet tegnes sumkurven. Dette gøres ved at plotte højre endepunkt mod den kumulerede frekvens.



Klik så på ikonet "Zoom Statistics", hvorefter sumkurven ses.
Indsæt endeligt vandrette linjer y1=0.25, y2=0.50 og y3=0.75, hvorefter kvartilsættet kan aflæses. I dette tilfælde til cirka (26; 39; 51).

Alternativt kan kvartilsættet udregnes eksakt i hånden, f.eks. for at spare tid:



Nedre: $20+\dfrac{2.5}{4}\cdot 10 \approx 26,3$

Median: $30+\dfrac{6}{7}\cdot 10 \approx 38,6$

Øvre: $50+\dfrac{0,5}{8}\cdot 10 \approx 50,6$

Histogram for grupperede data.

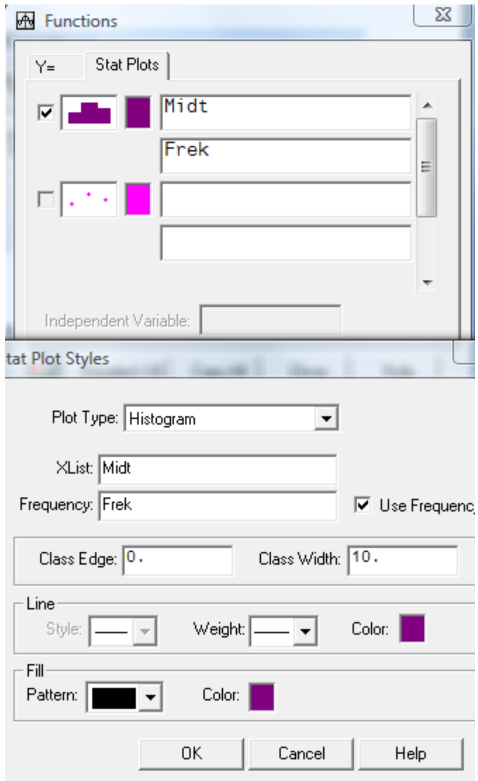
Hvis intervallerne er lige brede, kan TI også tegne et histogram for grupperede data. Er intervallerne derimod ikke lige brede, anbefales det at tegne histogrammet i hånden i stedet, da histogrammet i TI vil blive misvisende.

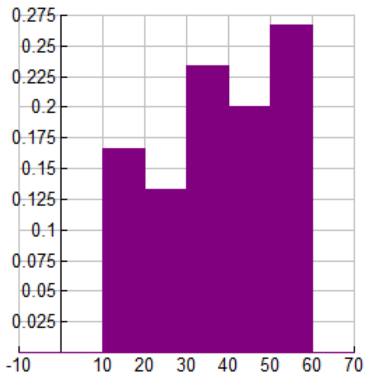
Indsæt et nyt plot. Vælg Stats Plots og herunder Histogram.

Indtast Midt som Xlist, sæt kryds i ”Use Frequency” og indtast Frek som Frequency.

Sæt Class Edge til 0 og sæt Class Width til bredden af intervallerne (i dette eksempel 10).

Luk disse to vinduer og klik endeligt på ”Zoom Statistics” for at se histogrammet.





Histogrammet kan også laves med brug af Hyp i stedet for Frek. Den eneste ændring er, at y-aksen derved bliver antal i stedet for procent.

TI laver ikke de kønneste histogrammer, så hvis præsentationen er vigtig, anbefales det at lave histogrammer i Excel i stedet.

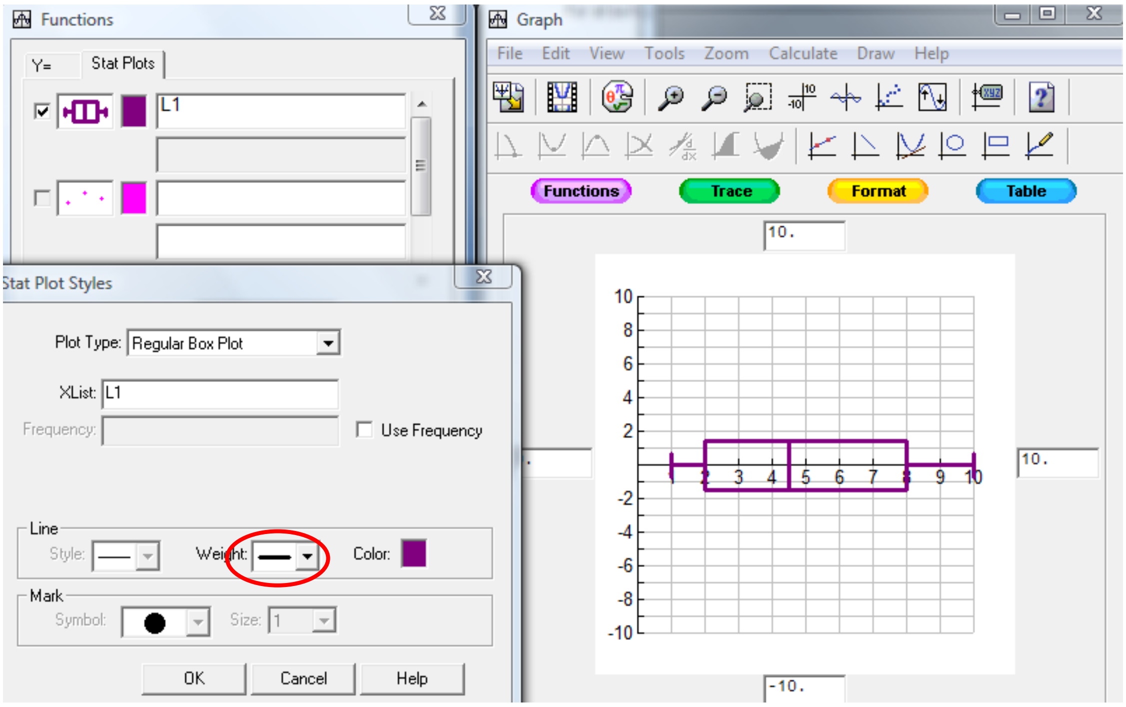
Boksplot

Boksplot tegnes lidt forskelligt i TI afhængigt af, om man har alle de rå data til rådighed (som ofte ved ikke-grupperede data) eller om man kan tage udgangspunkt i de 5 tal, der indgår i af boksplottet (min, nedre kvartil, median, øvre kvartil og maksimum).

Kendes de rå data, indtastes disse (se afsnittet om ikke-grupperede data tidligere).

Vælg derefter Stat Plots og herunder Regular Box Plot. Indtast navnet på listen med de observerede data som Xlist (og evt. navnet på listen med hyppighed/frekvens som Frequency). Vælg *Weight* til medium under *Line* for at få en lidt tykkere streg til kassen. Vælg endelig "Zoom Statistics" på Graph vinduet.

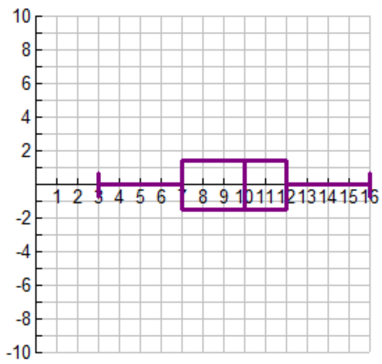
L1
1
1
2
4
4
5
6
8
9
10



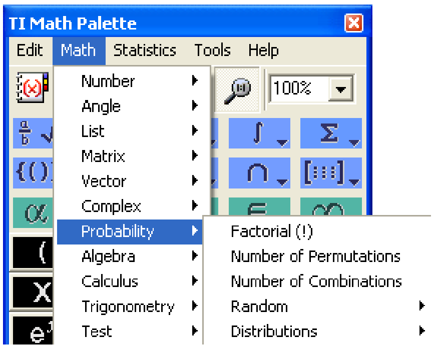
Kendes i stedet kvartilsættet samt minimum og maksimum – enten fordi det er oplyst eller fordi det er udregnet (som i afsnittet om grupperede data), indtastes de 5 tal i en liste, men sådan at hvert tal indtastes to gange, hvorefter boksplottet tegnes.

Med min=3, nedre kvartil =7, median=10, øvre kvartil=12 og maksimum=16 vil det se således ud:

L1
3
3
7
7
10
10
12
12
16
16



Statistik (kombinationer og fordelinger)



TI indeholder kommandoer til bestemmelse af kombinationer.
De findes bl.a. i Math-paletten under Math → Probability. De vigtigste er:

fakultet: $6! = 720.$

permutationer/ordnede delmængder: $\mathrm{nPr}(6, 4) = 360.$

kombinationer/ antal r-delmængder fra en n-mængde: $\mathrm{nCr}(6, 4) = 15.$

Alle kommandoer kan dog også skrives direkte på PC-tastaturet.

TI indeholder sandsynligheds-, tætheds- fordelings- og inverse tæthedsfunktioner for en række fordelinger.

Binomialfordelingen
Sandsynlighedsfunktion. $X \sim binom(n, p)\ \ P(X = x)$

$$\mathrm{binomPDF}(n, p, x) \mid n = 100 \text{ and } p = 0.15 \text{ and } x = 13 \qquad \cong .100123$$

Fordelingsfunktion. $X \sim binom(n, p)\ \ P(X \le x)$

$$\mathrm{binomCDF}(n, p, x) \mid n = 100 \text{ and } p = 0.15 \text{ and } x = 13 \qquad \cong .347425$$

PDF står for probability density function (sandsynligheds- eller tæthedsfunktion på dansk), mens CDF står for cumulative denstity function (fordelingsfunktion på dansk).

Normalfordelingen
Tæthedsfunktion. $X \sim N(\mu, \sigma^2)\ \ f(x)$

$$\mathrm{normalPDF}(x, m, var) \mid x = 11 \text{ and } m = 10 \text{ and } var = 7 \qquad \Rightarrow .056413$$

Fordelingsfunktion. $X \sim N(\mu, \sigma^2)\ \ P(a < X < b)$

$$\mathrm{normalCDF}(a, b, m, var) \mid a = 8 \text{ and } b = 12 \text{ and } m = 10 \text{ and } var = 7 \qquad \Rightarrow .224903$$

Øvrige fordelinger
På tilsvarende vis har TI fordelinger for F, t, chi-i-anden (kontinuerte) samt Poisson og den geometriske fordeling (diskrete). Se Help (F1) i TI for flere detaljer.

Fordeling	Tæthedsfunktion	Fordelingsfunktion
F	$\mathrm{FPDF}(2, 10, 7) \quad \cong .174092$	$\mathrm{FCDF}(0, 4, 10, 7) \quad \cong .960615$
t	$\mathrm{tPDF}(5, 11) \quad \cong .000317$	$\mathrm{tCDF}(3, 7, 11) \quad \cong .006029$
χ^2	$\mathrm{chiSquarePDF}(5, 10) \quad \cong .066801$	$\mathrm{chiSquareCDF}(2, 5, 10) \quad \cong .105162$
	Sandsynlighedsfunktion	Fordelingsfunktion
poisson	$\mathrm{poissonPDF}(5, 10) \quad \Rightarrow .018133$	$\mathrm{poissonCDF}(5, 10) \quad \Rightarrow .986305$
geometrisk	$\mathrm{geometPDF}(0.3, 10) \quad \cong .012106$	$\mathrm{geometCDF}(0.3, 10) \quad \cong .971752$

Invers fordeling

TI har indbygget en invers fordeling til normalfordelingen. De øvrige fordelinger har ikke indbygget funktioner til inverse fordelinger, men de kan heldigvis relativt let laves.

For normalfordelingen ser den indbyggede inverse funktion således ud:

$$\text{invNorm}(p, m, var) \mid p = 0.70 \text{ and } m = 10 \text{ and } var = 4 \qquad \cong 12.0976$$

Samme resultat kan udregnes som en ligning med fordelingsfunktionen:

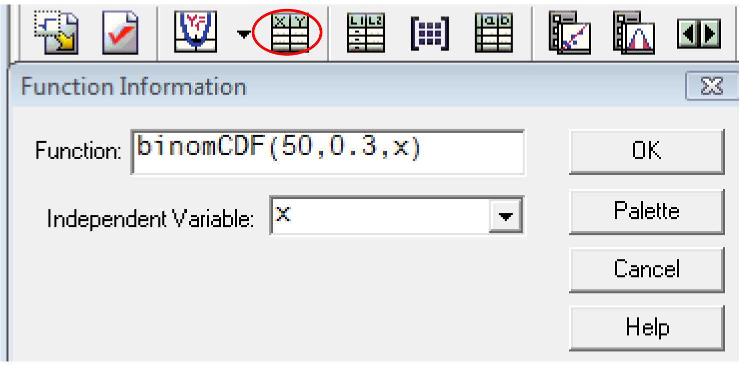
$$\text{solve}(\text{normalCDF}(-\infty, a, m, var) = p, a) \mid p = 0.70 \text{ and } m = 10 \text{ and } var = 4$$

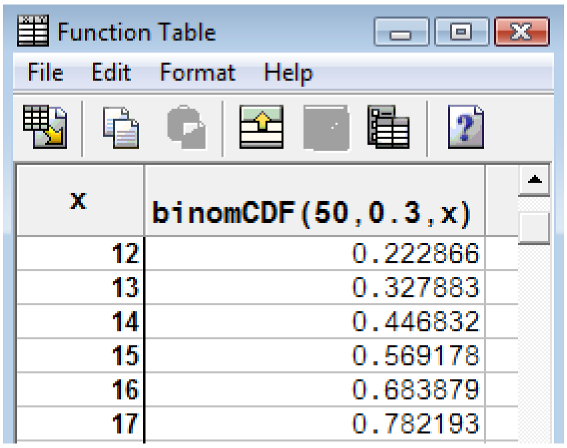
$$\cong a = 12.0976$$

Warning: More solutions may exist

På tilsvarende vis kan inverse funktioner for de øvrige kontinuerte fordelinger laves.

For de diskrete fordelinger (binomial, poisson og den geometriske) foretages inverse beregninger lettest ved at tabellægge fordelingen. F.eks. løses en opgave som ”X er binomialfordelt med n = 50 og p = 30 %, bestem det størst mulige x, så $P(X \le x) < 40\%$” ved at se på tabellen for den pågældende binomialfordeling:





x	binomCDF(50,0.3,x)
12	0.222866
13	0.327883
14	0.446832
15	0.569178
16	0.683879
17	0.782193

Heraf ses, at svaret på den konkrete opgave er x=13, da $P(X \le 13) \approx 33\%$ og $P(X \le 14) \approx 45\%$.

På tilsvarende vis kan andre opgaver af invers karakter med en af de diskrete fordelinger løses.

Statistik (hypotesetest)

TI har indbygget en lang række statistiske hypotesetests og konfidensintervaller til brug med normal-, t-, F og χ^2 fordelingen. Test i forbindelse med diskrete fordelinger laves manuelt ud fra en tabel over fordelingen (se afsnittet om fordelinger).
Det vil føre for vidt at gennemgå samtlige tests, så her gennemgås blot to eksempler.

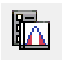
χ^2 test

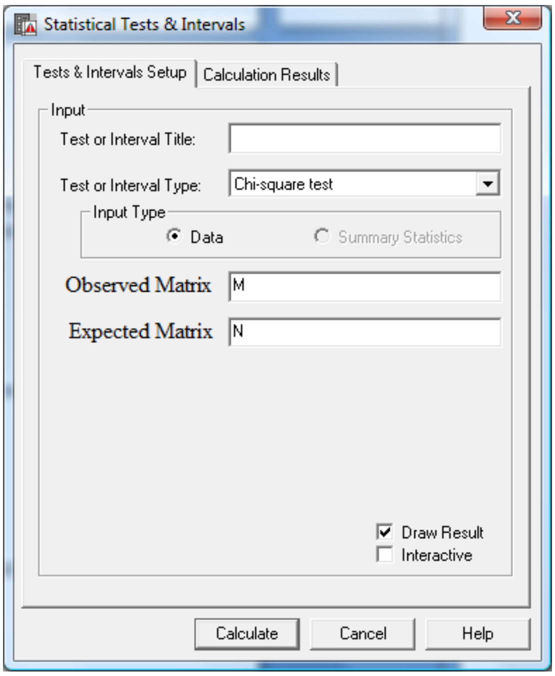
For nedenstående observerede data skal hypotesen ”H_0: Procentdelen af venstrehåndede blandt kvinder er lig med procentdelen af venstrehåndede blandt mændene” testes.

Observeret	Venstrehåndede	Højrehåndede	I alt
Kvinder	178	1752	1930
Mænd	190	1580	1770
I alt	368	3332	3700

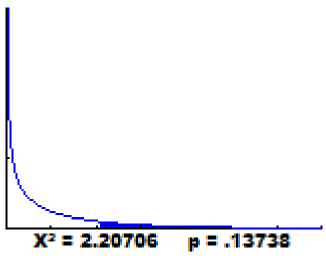
Data indtastes i en matrice med de 4 værdier således M:=[179,1752 ; 190,1580] (bemærk forskellen mellem komma og semikolon) og resultatet i TI er

$$M := \begin{bmatrix} 179 & 1752 \\ 190 & 1580 \end{bmatrix}$$

Herefter benyttes ”Stat Tests & Interval Tool”  (ikon nummer 9 fra venstre).
Der vælges ”Chi square test” under type, Observed Matrix sættes til M og Expected Matrix til N. Vælg evt. Draw Result. Tryk endeligt på Calculate.
Derved vises p-værdien, teststørrelsen og antal friheds-grader (df).
Hvis Draw Result er valgt, tegnes chi-i-anden fordelingen med det pågældende antal frihedsgrader desuden med den observerede teststørrelse indtegnet.



Chi-square test
$p = .13738$
$X^2 = 2.20706$
$df = 1.$



Den forventede matrice kan derefter ses ved at skrive N:

$$N = \begin{bmatrix} 192.526 & 1738.47 \\ 176.474 & 1593.53 \end{bmatrix}$$

Med et signifikansniveau på 5 % vil hypotesen således ikke kunne forkastes.

Samme test kan også laves uden brug af Stat Tests & Interval Tool:

$$M := \begin{bmatrix} 179 & 1752 \\ 190 & 1580 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{chiSquareTest}(M, N)$

$$\mathrm{ShowStat}() \qquad \begin{bmatrix} chisquare\_ & 2.20706 \\ p\_ & .13738 \\ df\_ & 1. \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 192.526 & 1738.47 \\ 176.474 & 1593.53 \end{bmatrix}$$

Test med binomialfordelingen

For en given population ønskes hypotesen H_0: ”højst 10 % af populationen har fejl” testet med et signifikansniveau på 5 %.
En stikprøve på 150 stk. udtages. Heraf er 22 med fejl.
Ved tabelopslag i binomialfordelingen med n=150 og p=10 % (se afsnittet om fordelinger for detaljer) ses, at
$P(X \geq 22) = 1 - P(X \leq 21) \approx 1 - 0,956 = 4,4\%$.
Dermed forkastes hypotesen lige netop.

Function Table

File Edit Format Help

x	binomcdf(150,0.1,x)
15	0.568184
16	0.669406
17	0.758058
18	0.830841
19	0.887023
20	0.927912
21	0.956036
22	0.97436
23	0.98569
24	0.992352
25	0.996083

Vektorer

I TI kan man både i planen og i rummet skrive og regne med vektorer på to måder, nemlig lodret og vandret.

I Math-boxens palet åbnes matrix-ikonet i 3. række til højre, hvorefter man vælger kommandoen 2x1 til plangeometri eller 3x1 til rumgeometri, hvis man ønsker lodret notation. Ønskes vandret notation, vælger man i stedet 1x2 eller 1x3. Herefter fremkommer der et felt, hvor man kan indskrive direkte.

Alternativt kan man vælge at bruge kantede parenteser direkte fra pc-tastaturet. Hvis man sætter semikolon mellem koordinaterne, skriver TI vektoren lodret. D.v.s. input: [1;2;3] og output: $= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Sætter man i stedet komma mellem koordinaterne, skrives vektoren vandret. D.v.s. input: [1,2,3] og output: $= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

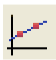
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} * 3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

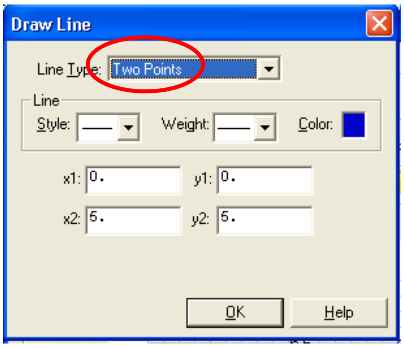
Vektoraddition, multiplikation af en vektor med et tal og tilsvarende kan nu foretages uden videre.

Vektorer kan også defineres, hvorefter man regner videre med definitionerne i stedet for det fulde udtryk - f.eks.: $\vec{a} := \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}$

Vektorpilen findes i boxen  i paletten. Man kommer fri af vektorpilen ved at trykke på højrepiltasten. I det daglige vil man normalt undlade vektorpilen, da den ikke har indflydelse på beregningerne og desuden tager lang tid at lave - husk, at hvis man i en opgave en gang har brugt vektorpil i en definition, skal den med hver gang man efterfølgende bruger den pågældende vektor.
Vil man indskrive flere definitioner i samme udtryk og samme linje, benyttes dobbelt kolon - d.v.s. ::
Punkter behandles lettest som om der var tale om stedvektorer. D.v.s. at vektoren fra punktet A = (2,3) til punktet B = (1,-4) bestemmes sådan:

$$\overrightarrow{OA} := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} :: \overrightarrow{OB} := \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} :: \overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \qquad \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Bemærk at TI generelt ikke kan bruges til at illustrere vektorer. Dog kan man illustrere vektorer i planen ved i grafvinduet at tegne linjer mellem punkter. Klik på ikonet med de røde prikker og indskriv derefter vektorens start- og slutkoordinater i det fremkomne felt 



Elementære beregninger

Prik- eller skalarprodukter, determinanter, krydsprodukter, længder, vinkler mellem vektorer samt arealet af parallelogram udspændt mellem vektorer findes lettest som vist i eksemplerne nedenfor. Nogle af kommandoerne findes i Math-boxens palet i undermenuerne, *vector* eller *algebra*. I forbindelse med inverse trigonometriske funktioner anvendes kommandoerne *arcsin* og *arccos*. Husk at indstille på grader i settings.
Numerisk værd findes med kommandoen *abs(. . .)*, eller ved direkte at sætte | | udenom udtrykket. Ellers kan man søge i kataloget i Math-boxens palet - se ikonet i øverste venstre hjørne. 

I eksemplerne er brugt følgende vektorer:

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{b} := \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \vec{c} := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \vec{d} := \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Prikprodukt/skalarprodukt:

$$\text{dotP}\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -10$$

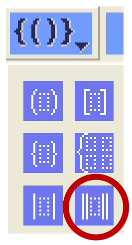
Determinant:

Indskrives som en 2x2 matrix (se a. nedenfor), som findes i Math-boxens palet under 
- alternativt kan man også skrive: *det([a1,a2;b1,b2])* - altså her: *det([2,3;1,-4])* (se b. nedenfor) - husk de kantede parenteser - bemærk at TI her skriver vektorerne vandret, hvilket ikke betyder noget for udregningerne.

a. $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\right) = -11$ b. $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\right) = -11$

Krydsprodukt:

$$\text{crossP}\left(\vec{c}, \vec{d}\right) = \begin{bmatrix} -29 \\ 13 \\ 7 \end{bmatrix}$$



Vektors længde:

Her findes to kommandoer - den sidste findes i Math-boxens palet.

$\text{norm}\left(\vec{a}\right) = \sqrt{13}$ eller $\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{13}$

Vinkel mellem vektorer:

Her bruges kombinationer af nogle af ovennævnte kommandoer. I de fleste opgaver vil det være lettest at definere formlen og de specifikke vektorer hver for sig, evt. v.h.a. |-operatoren. I små opgaver kan det dog undertiden være hurtigere at indbygge de specifikke vektorer direkte v.h.a. de kantede parenteser (her bruges igen $\vec{a}$ og $\vec{b}$ fra eksemplet ovenfor)

$v := \arccos\left(\dfrac{\text{dotP}\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{\left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\|}\right) = 132.27$ eller $v := \arccos\left(\dfrac{\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}\right)}{\left\|\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}\right\|}\right) = 132.27$

Areal af parallelogram udspændt af to vektorer:

Indskriv direkte i formlen

$$\text{areal}(a, b) = \left|\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\right)\right| \Rightarrow \text{areal}(a, b) = 11$$

Andre beregninger

I mindre opgaver indskriver man blot de konkrete vektorer og/eller punkter direkte i de relevante formler. I større opgaver kan det være en fordel at definere den relevante formel med de generelle betegnelser (a, b, c, $\vec{r}$, $\vec{n}$ o.s.v.), hvorefter man tildeler parametrene de konkrete værdier, som indgår i opgaven (kan også gøres i omvendt rækkefølge). For at demonstrere de forskellige angrebsvinkler veksles der i de nedenstående eksempler mellem disse metoder.

Areal af parallelogram i rummet udspændt af vektorer:

Indskriv blot direkte i formlen

Eksempel: vektorerne $\vec{c}$ og $\vec{d}$ - jvfr. ovenfor

$$\text{areal}(c,d) = \left\| \text{crossP}\left(\vec{c},\vec{d}\right) \right\| \Rightarrow \text{areal}(c,d) = 32.542$$

Projektion af vektor på vektor samt dennes længde:

Definer vektorerne og indskriv direkte i formlen

Eksempel: vektorerne $\vec{c}$ og $\vec{d}$ - jvfr. ovenfor

$$\vec{d}_c := \frac{\text{dotP}\left(\vec{c},\vec{d}\right)}{\left\|\vec{c}\right\|^2}\cdot\vec{c} = \begin{bmatrix} \frac{63}{50} \\ \frac{42}{25} \\ \frac{21}{10} \end{bmatrix} \qquad \left\|\vec{d}_c\right\| = \frac{21\cdot\sqrt{2}}{10}$$

(Genvejstast for hævet eller sænket indeks: Ctrl+H og Ctrl+L)

Projektion af linje på plan:

Definer linjens retningsvektor, planens normalvektor og formlen.

Eksempel: linje med retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ og plan α med ligningen 3x - y + 2z = 0

$$\vec{r} := \begin{bmatrix} r1 \\ r2 \\ r3 \end{bmatrix} \qquad \vec{n} := \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad r1 := 2 :: r2 := 1 :: r3 := -6 \qquad a := 3 :: b := -1 :: c := 2$$

$$\text{proj}\left(\vec{r}_\alpha\right) := \vec{r} - \frac{\text{dotP}\left(\vec{r},\vec{n}\right)}{\left\|\vec{n}\right\|^2}\cdot\vec{n} \qquad \text{proj}\left(\vec{r}_\alpha\right) = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -5 \end{bmatrix}$$

Projektion af punkt på plan:

Definer linje gennem punktet vinkelret ned på planen. Find skæring ved at indsætte i planens ligning og løse m.h.t. alle variable:

Eksempel: α : 3x + 4y +5z - 60 = 0 og P = (12,14,18)

$$r1 := 12 + 7\cdot t :: r2 := 14 + 9\cdot t :: r3 := 18 + 13\cdot t$$

$\text{solve}(3\cdot x+4\cdot y+5\cdot z-60=0 \text{ and } x=r1 \text{ and } y=r2 \text{ and } z=r3, \{x, y, z, t\})$
$\Rightarrow t=-1 \text{ and } x=5 \text{ and } y=5 \text{ and } z=5$

Afstand mellem punkt og linje i planen: (tilsvarende i rummet for afstand mellem punkt og plan, idet der blot tilføjes en tredje koordinat)

Eksempel: linje: 3x -4y + 8 = 0 og punktet P= (1,9)
Definer formlen samt linjens parametre (alternativt kan man bruge |-operatoren efter definitionen)

$$\text{dist}(P,l):=\frac{|a\cdot x+b\cdot y+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$a:=3 :: b:=-4 :: c:=8 :: x:=1 :: y:=9$

Herefter fås umiddelbart: $\text{dist}(P,l)=5$

Afstand mellem punkter i rummet
Eksempel: punkterne P = (7, 9, 13) og Q = (5,5,5)

$$P:=\begin{bmatrix}7\\9\\13\end{bmatrix} :: Q:=\begin{bmatrix}5\\5\\5\end{bmatrix} \qquad P-Q=\begin{bmatrix}2\\4\\8\end{bmatrix} \qquad \|P-Q\|=2\sqrt{21}$$

Afstand mellem punkt og linje i rummet
Definer formlen, punkterne P (i rummet) og P_0 (på linjen) samt linjens retningsvektor og find linjen P_0P - herefter fås umiddelbart: *dist(P,l)*

Eksempel: linje: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ og punktet P = (1,2,1)

$$P:=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \qquad P0:=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix} \qquad \vec{r}:=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{POP}:=P-P0=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\text{dist}(P,l):=\frac{\|\text{crossP}(\vec{r},\overrightarrow{POP})\|}{\|\vec{r}\|} \qquad \text{dist}(P,l)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Afstand mellem linjer i rummet
Indskriv evt. linjernes parameterfremstillinger a.h.t. overblikket (skriv blot på en linje i kantet parentes og med semikolon mellem hver koordinat), definer retningsvektorerne, P_1P_2 og normalvektoren samt formlen

Eksempel: l1: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-6\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ l2: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix}x=0+t\\y=-6-2\cdot t\\z=1+t\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}x=2+2\cdot s\\y=5-5\cdot s\\z=-2+s\end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{r1}:=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{r2}:=\begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix} \qquad P1:=\begin{bmatrix}0\\-6\\1\end{bmatrix} \qquad P2:=\begin{bmatrix}2\\5\\-2\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P1P2}:=P2-P1=\begin{bmatrix}2\\11\\-3\end{bmatrix} \qquad \vec{n}:=\text{crossP}(\overrightarrow{r1},\overrightarrow{r2})=\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix} \qquad \text{dist}(l1,l2):=\frac{\text{dotP}(\vec{n},\overrightarrow{P1P2})}{\|\vec{n}\|}$$

$\text{dist}(l1, l2) = \frac{20\sqrt{11}}{11}$

Alternativt kan man indskrive en linjes parameterfremstilling ved først at definere samtlige koordinater i linjens faste punkt og i dens retningsvektor, hvorefter linjen kan skrives som: [x;y;z] = [x_0;y_0;z_0] +t* [r_1;r_2;r_3]

$x0 := 0 :: y0 := -6 :: z0 := 1 \qquad r1 := 1 :: r2 := 2 :: r3 := 1 \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x0 \\ y0 \\ z0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} r1 \\ r2 \\ r3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x = t \\ y = 2 \cdot t - 6 \\ z = t + 1 \end{bmatrix}$

Skæring mellem linje og plan

Eksempel: α : 3x + 4y +5z - 60 = 0 og l : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

definer linjens parameterfremstilling og løs ligningen med hensyn til t - indsæt i parameterfremstillingen:

$x := 7 + t :: y := 9 + 2t :: z := 13 + 4 \cdot t \qquad \text{solve}(3 \cdot x + 4 \cdot y + 5 \cdot z - 60 = 0, t) \Rightarrow t = -2.$

$skaeringspunkt = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \mid t = -2 \Rightarrow skaeringspunkt = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$

Skæring mellem linjer i rummet:

Indskriv evt. linjernes parameterfremstillinger a.h.t. overblikket (skriv blot på en linje i kantet parentes og med semikolon mellem hver koordinat) og løs m.h.t. alle variable:

Eksempel: l1: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ l2: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

l: $\begin{bmatrix} x = -2 + 2 \cdot t \\ y = 2 \cdot t \\ z = 1 + t \end{bmatrix}$ m: $\begin{bmatrix} x = 5 + 3 \cdot s \\ y = 8 + 4 \cdot s \\ z = 8 + 5 \cdot s \end{bmatrix}$

$\text{solve}(x = 2 \cdot t - 2 \text{ and } x = 3 \cdot s + 5 \text{ and } y = 2 \cdot t \text{ and } y = 4 \cdot s + 8 \text{ and } z = t + 1 \text{ and } z = 5 \cdot s + 8, \{s, t, x, y, z\})$
$= s = -1 \text{ and } t = 2 \text{ and } x = 2 \text{ and } y = 4 \text{ and } z = 3$

(gå evt. ind i "*more*" i Math-boxens palet og indstil indput på højest mulige bredde, d.v.s. 6,5 tommer - ellers risikerer man at dele af udtrykket eller evt. det hele ikke bliver vist)

Ændres f.eks. en enkelt koordinat, sådan at linjerne bliver vindskæve, fås resultatet: $= false$

Skæring mellem kugle og linje

Definer kuglen, linjens parameterfremstilling med de konkrete parametre og løs m.h.t. alle variable (det vil normalt være for omstændeligt først at definere generelt og dernæst tildele parametre)

Advarsel: Sæt <u>ikke</u> de to udtryk lig hinanden. Der er jo i forvejen tale om to ligninger, så hvis der pludselig indgår tre lighedstegn i det udtryk, som skal løses, lukker TI uden varsel, og alt indtastet går tabt.

Eksempel: kugle: $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 + (z + 3)^2 = 121$, linje : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ -13 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(x-2)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=121 \qquad \begin{bmatrix} x=29+9\cdot t \\ y=-13-6\cdot t \\ z=3+2\cdot t \end{bmatrix}$

$\text{solve}\left((x-2)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=121 \text{ and } x=29+9\cdot t \text{ and } y=-13-6\cdot t \text{ and } z=3+2\cdot t, \{x,y,z,t\}\right)$

$\Rightarrow t=-2 \text{ and } x=11 \text{ and } y=-1 \text{ and } z=-1 \text{ or } t=-4 \text{ and } x=-7 \text{ and } y=11 \text{ and } z=-5$

Bemærk: man kan ikke f.eks. definere kuglen som "Kugle" og linjen som "linje" som vist ovenfor, og så nøjes med at skrive *solve(Kugle and linje, {x,y,z,t})*, da TI ikke kan operere med en ligning og en matrice i samme udtryk. Derimod går det godt, hvis man definerer og løser sådan:

$Kugle := (x-2)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=121 \qquad linje := x=29+9\cdot t \text{ and } y=-13-6\cdot t \text{ and } z=3+2\cdot t$

$\text{solve}(Kugle \text{ and } linje, \{x,y,z,t\})$

$\Rightarrow t=-2 \text{ and } x=11 \text{ and } y=-1 \text{ and } z=-1 \text{ or } t=-4 \text{ and } x=-7 \text{ and } y=11 \text{ and } z=-5$

Skæring mellem planer

TI kan ikke umiddelbart håndtere to ligninger med tre ubekendte, så det er nødvendigt at gå frem i flere skridt, afhængigt af de konkrete ligninger for at eliminere parametre.

Eksempel : α: 3x + 2y + 3z - 2 = 0; β: x - 2y +8 = 0

Definer ligningerne, sæt x = t og indse at α + β vil eliminere y, mens 3 α + 5β vil eliminere z.

$\alpha := 3\cdot x+2\cdot y+3\cdot z-2=0 \qquad \beta := x-2\cdot y-5\cdot z+8=0 \qquad x := t$

$\alpha+\beta = 4\cdot t-2\cdot z+6=0 \qquad \text{solve}(4\cdot t-2\cdot z+6=0, z) = z = 2\cdot t+3$

$5\cdot\alpha+3\cdot\beta = 18\cdot t+4\cdot y+14=0 \qquad \text{solve}(18\cdot t+4\cdot y+14=0, y) = y = \frac{-(9\cdot t+7)}{2}$

Skæringslinjens parameterfremstilling hedder derfor: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7/2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -9/2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Differentialligninger

Differentialligninger i TI bygger på følgende overordnede principper:

- Standardkommandoen hedder *deSolve*. Den findes kun i *Catalog*, så det anbefales meget, at man lærer den udenad.
- Når ligningen skrives op, bruges betegnelsen y' eller y'', afhængigt af, om der er tale om en første- eller andenordensligning. Tasten " **'** " findes til højre for ø på PC-tastaturet (andre variabelnavne er dog også mulige - jvfr. eksemplerne nedenfor). Undgå formuleringen $\frac{d}{dx}\, y$.
- Når man skal løse differentialligningen, skal både funktionsudtrykket og variablen have et navn. Man skal derfor afslutte "deSolve-parentesen" med at skrive *",x,y"* (andre variabelnavne er dog også mulige - jvfr. eksemplerne nedenfor).
- Hvis differentialligningen ud over y' *ikke* samtidigt indeholder y, og man heller ikke har betingelser knyttet til løsningsligningen, kan man ofte anvende integraletegn: $\int f(x)dx$ - evt. i kombination med kommandoen *deSolve.*
- Når man løser en differentialligning uden tilknyttede betingelser (d.v.s. finder den fuldstændige løsning), skriver TI resultatet med et @ efterfulgt af et tal (som blot angiver hvilken Math-box, man er nået til i det pågældende dokument) hvilket betyder, at man skal gange resultatet med en vilkårlig konstant/hhv. lægge konstanten til - afhængigt af ligningstype
- Når man løser en differentialligning med tilknyttede betingelser (d.v.s. finder en specifik løsning), skrives betingelsen på formen: *and y(a) = b*
- Bemærk, at TI ofte ikke isolerer funktionsvariablen helt - man er i så fald nødt til at bruge TI's solve-funktion for at gøre opgaven helt færdig

Grundlæggende eksempler:

a. $\text{desolve}(y' = 2\cdot x,\ x,\ y) \Rightarrow y = x^2 + @1$ - alternativt $\int (2\cdot x)\, dx \Rightarrow x^2$ (muligt fordi y ikke forekommer i ligningen - bemærk: TI udelader konstanten i løsningen)

b. $\text{desolve}(y' = 2\cdot x \text{ and } y(1) = 4,\ x,\ y) \Rightarrow y = x^2 + 3$ Her bliver metoden med $\int f(x)dx$ ret omstændelig - se dog afsnittet om integralregning

c. $\text{deSolve}(y' = 2\cdot y,\ x,\ y) \Rightarrow y = @4\cdot e^{(2\cdot x)}$

d. $\text{desolve}(y'' = 4\cdot y \text{ and } y(0) = 4 \text{ and } y'(0) = 1,\ x,\ y) \Rightarrow y = \frac{9\cdot e^{(2\cdot x)}}{4} + \frac{7\cdot e^{(-2\cdot x)}}{4}$

e. $\text{deSolve}(y' = y^2\cdot x \text{ and } y(1) = 4,\ x,\ y) \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$

Bemærk at y ikke er isoleret færdig - derfor: $\text{solve}(ans,\ y) \Rightarrow y = \frac{-4}{2\cdot x^2 - 3}$

Bemærk også formuleringen med "*ans*". Herved undgår man at kopiere og opnår samtidig, at beregningerne stadig stemmer, selvom den foregående ligning eventuelt ændres.

f. $\text{desolve}(y' - 2\cdot e^x = x^2,\ x,\ y) \Rightarrow y = 2\cdot e^x + \frac{x^3}{3} + @10$

y' behøver således ikke at være isoleret på ligningens venstreside

g. deSolve$\left(p'=\sqrt{p},\, t,\, p\right)$ $\Rightarrow \sqrt{p}=\frac{t}{2}+@1$ hvor der isoleres yderligere:

solve$(ans,\, p)$ $\Rightarrow p=\frac{(t+2\cdot @1)^2}{4}$ and $t+2\cdot @1\geq 0$

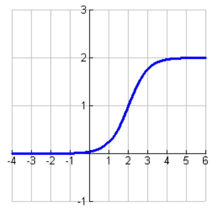
andre variabelnavne er således også mulige

Forskellige lignings- og opgavetyper:

Logistisk ligning/hæmmet vækst:
Bemærk at TI løser logistiske ligninger sådan: desolve$\left(y'=y\cdot(b-a\cdot y),\, x,\, y\right)$ $\Rightarrow y=\frac{b\cdot e^{(b\cdot x)}}{a\cdot e^{(b\cdot x)}+b\cdot @5}$

mens mange lærebøger samt formelsamlingen giver denne løsning: y = $\frac{(b/a)}{1+c\cdot e^{-bx}}$. Det skyldes, at TI ikke opererer med eksponenter med negativt fortegn i en brøks nævner, men i stedet omskriver. Man er derfor nødt til manuelt at forlænge med $\frac{1}{a\cdot e^{bx}}$ i tæller og nævner, hvis man vil omregne til "dansk standardnotation" og/eller finde den vandrette asymptote. Man kan dog stadig løse logistiske ligninger v.h.a. TI:

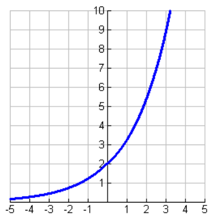
Eksempel: desolve$\left(y'=y\cdot(2-y)\text{ and }y(2)=1,\, x,\, y\right)$ $\Rightarrow y=\frac{2\cdot e^{(2\cdot x)}}{e^{(2\cdot x)}+e^{4}}$



Herefter kan man så manuelt regne om til y = $\frac{2}{1+e^{(4-2x)}}$
(husk at sætte gangetegn mellem y og parentesen ved indskrivning i Math-boxen - ellers får man at vide, at man har lavet en syntaksfejl)

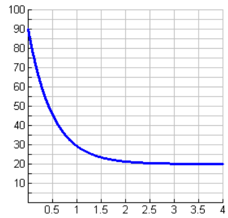
Differentialligning af typen y' = k·y (d.v.s. eksponentiel vækst)

deSolve$\left(y'=0.5\cdot y\text{ and }y(0)=2,\, x,\, y\right)$ $\Rightarrow y=2\cdot e^{x/2}$



Differentialligning af typen y' = b - a·y (bruges bl.a. i opgaver om nedkøling m.v.)

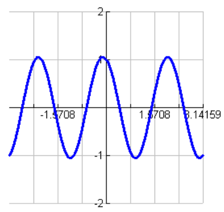
desolve$\left(y'=40-2\cdot y\text{ and }y(0)=90,\, x,\, y\right)$ $\Rightarrow y=70\cdot e^{(-2\cdot x)}+20$



Anden ordens differentialligning af typen y'' = k²·y (harmonisk svingning)

Eksempel: deSolve$\left(y''=-9\cdot y\text{ and }y(0)=1\text{ and }y'(0)=-1,\, x,\, y\right)$

$\Rightarrow y=\cos(3\cdot x)-\frac{\sin(3\cdot x)}{3}$



En typisk opgave

a. Find den fuldstændige løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx} = \frac{x-4}{y}$:

$\text{deSolve}\left(y' = \frac{x-4}{y}, x, y\right) \Rightarrow y^2 = x^2 - 8 \cdot x + @2$, hvor y så skal isoleres yderligere

$\text{solve}(ans, y)$

$\Rightarrow y = -\sqrt{x^2 - 8 \cdot x + @2} \text{ and } x^2 - 8 \cdot x + @2 \geq 0 \text{ or } y = \sqrt{x^2 - 8 \cdot x + @2} \text{ and } x^2 - 8 \cdot x + @2 \geq 0$

b. Find den løsningskurve, som går gennem P(0,2) - find den tilhørende definitionsmængde

$\text{desolve}\left(y' = \frac{x-4}{y} \text{ and } y(0) = 2, x, y\right) \Rightarrow y^2 = x^2 - 8 \cdot x + 4$

$\text{solve}(ans, y) \Rightarrow y = -\sqrt{x^2 - 8 \cdot x + 4} \text{ and } x^2 - 8 \cdot x \geq -4 \text{ or } y = \sqrt{x^2 - 8 \cdot x + 4} \text{ and } x^2 - 8 \cdot x \geq -4$

Da P har positiv y-værdi, m løsningen blive: y = $\underline{\underline{\sqrt{x^2 - 8x + 4}}}$

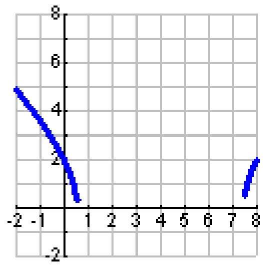
Ang. DM: Solveren kan have det svært med uligheder, så derfor inddrages grafisk løsning:

$\text{solve}(x^2 - 8 \cdot x + 4 = 0, x) \Rightarrow x = 7.46 \text{ or } x = .536$

Den del af kurven, som går gennem (0,2) ender således i x = 0,536.

D.v.s. Dm(f) = $\underline{\underline{]-\infty; 0{,}536]}}$

Bemærk, at grafregneren umiddelbart også tegner den del af funktionen, som ikke er en del af løsningskurven. Hvis man vil undgå dette, skal man derfor sætte en begrænsning på x.



c. Find tangentligningen i P

$\left(\frac{x-4}{y} \mid x = 0 \text{ and } y = 2\right) \Rightarrow -2.$

Tangentligningen hedder derfor $\underline{\underline{t(x) = -2x + 2}}$

Endnu en typisk opgave

Undersøg om funktionen y = f(x) = $2e^{(2x-1)}$ er løsning til differentialligningen y' = 2y

Definerer og løs: $f(x) := 2 \cdot e^{(2 \cdot x - 1)} \Rightarrow \text{"Done"}$ $\frac{d}{dx}(f(x)) - 2 \cdot f(x) = 0.$

D.v.s. at f(x) er løsning til differentialligningen.

Det kan i praksis være vanskeligt at få programmet til at acceptere dette udtryk, uden at det selv sætter uhensigtsmæssige (= forkerte) parenteser. Problemet opstår, når TI skal differentiere og løse i samme operation. Derfor kan man evt. lave en ekstra mellemregning, hvor man særskilt finder y'. D.v.s.:

$\text{df}(x) := \frac{d}{dx}(f(x)) \Rightarrow \text{"Done"}$ og $\text{df}(x) - 2 \cdot f(x) \Rightarrow 0$

Bemærk at følgende er utilstrækkeligt: $\text{deSolve}(y' = 2 \cdot y, x, y) \Rightarrow y = @1 \cdot e^{(2 \cdot x)}$ idet man her kun får den fuldstændige løsning, mens f(x), i fald differentialligningen stemmer, er en specifik løsning. Man er derfor nødt til at finde et punkt, som f(x) går igennem (f.eks. (½, 2)), hvis man vil bruge deSolve:

$\text{deSolve}(y' = 2 \cdot y \text{ and } y(0.5) = 2, x, y) \Rightarrow y = 2 \cdot e^{(2 \cdot x - 1)}$

Genveje

Ctrl+M Åbner Math-box

Ctrl+G Åbner grafvindue

Ctrl+F Danner brøkstreg i Math-boxen

Ctrl+K Indsætter Math Section Break - en fed brun linje (bør indsættes mellem alle opgaver, da den annullerer alle definitioner tilbage til den foregående Math Section Break)

Ctrl+H Hævet indeks: a^x

Ctrl+L Sænket indeks: $\vec{r}_l$

Ctrl+T Åbner tabel (må ikke forveksles med liste)

Ctrl+Enter Sideskifte

Ctrl+C Kopierer det markerede til udklipsholder

Ctrl+V Indsætter fra udklipsholder

Ctrl+A Marker alt - typisk med henblik på kopiering - Desværre vil TI normalt ikke kopiere mere end et formelfelt ad gangen, så hvis man vil sætte formler ind i et word-dokument, må man for det meste kopiere formlerne en for en.

Ctrl+S Gemmer dokumentet

Ctrl+P Åbner Math Box Properties, hvor man indstiller skrifttype og -størrelse, symbol mellem input og output, etc. (kan også gøres ved at klikke på ”more” på Math-paletten)

F9 Åbner Mode Settings (indstilling af enheder)

F1 Åbner hjælp og slår op på det aktuelle emne (engelsksproget)