

## Den større skriftlige opgave i matematik for gymnasiet og hf 2002/03

Der er mange roser fra censorerne til de opgaver, de har rettet - til eleverne, til opgaveformuleringerne, og til selve institutionen: Større skriftlig opgave:

- *Højt niveau – mange fine besvarelser.*
- *Den så ofte savnede og efterlyste tid til fordybelse må for faget matematiks vedkommende siges at være en tid, der kan realiseres gennem arbejdet med tredjeårsopgaven.*
- *Igen i år har det været en fornøjelse at være censor for de større skriftlige opgaver. Opgavebesvarelserne vidner om, at eleverne har været ægte optaget af deres respektive emner.*
- *Det overordnede indtryk af besvarelser er, at eleverne – på hver deres niveau – har været igennem en meget lærerig proces.*

Eleverne når ofte betydeligt ud over deres normale niveau pga. de tætte faglige samtaler med læreren:

- *Det lader til, at eleven får en god vejledning, og at de pågældende lærere også synes, at det er sjovt at genopfriske andre grene af matematikken. Måske af den grund kommer mange elever virkelig i dybden, og flere når op på et teoretisk niveau og en sværhedsgrad, der ligger et godt stykke inde i universitetsstudiet.*

Det er imidlertid vigtigt at huske, at middelgode elever kan have fuldt så stort et personligt udbytte. Det har ikke nødvendigvis noget at gøre med den karakter, de fik om arbejdet med opgaven sætter sig i eleven som en af de markante positive oplevelser fra gymnasietiden. Det er spørgsmålet om de "når ud over sig selv" og bevæger sig ind i noget større:

- *Det er godt at se, at ikke bare super elever kaster sig ud i en tredjeårsopgave i matematik og kommer helskindet igennem.*

### Emner og opgaveformuleringer

Selv om spektret af emner for de større opgaver er bredt – se emnelisterne – så er der alligevel visse emner, der hvert år er sikre vindere: I gymnasiet er der 50 opgaver om  $\pi$ , 37 om sfærisk geometri, 56 generelle opgaver om komplekse tal og 37 om det gyldne snit og Fibonaccitalle. Det er der ikke noget galt i. Selv om en censor synes det meste er gammelt stof, så er det jo for eleverne lige så nyt stof som det var for sidste års elever, da de skrev.

Men det stiller krav til lærerne – og det kan faktisk være sværere at formulere opgaver indenfor de traditionelle emner: Opgaveformuleringen *skal være anderledes* end sidste år. Og det lever de fleste også op til:

- *Jeg synes opgaveformuleringerne er meget varierede (på trods af at mange titler er gengangere), idet der helt åbenbart lægges et stort arbejde i at finde nye vinkler*
- *Lærerne er blevet meget bedre opgavestillere de senere år.*

Mange censorer omtaler nogle af de spændende – og udfordrende – opgaver:

---

- *Ud over de traditionelle emner er der mange interessante opgaveformuleringer, og arbejdet med at rette SSO er en glimrende form for efteruddannelse. Det giver også anledning til indkøb af supplerende faglitteratur.*
- *Jeg har set mange gode og spændende opgaver i år – rigtige mind-stretchers, f.eks. ”ikke-frekventiel sandsynlighedsregning”, ”konstruktioner i ikke-euklidisk geometri” og ”lineære ligningssystemer”. Nu ved jeg ret præcist, hvordan det sidste emne kan (og bør) forstås på gymnasialt niveau i modsætning til universitetsniveau.*
- *Spændende kilder om arabisk matematik – og gode opgaver om det gyldne snit og om kryptologi, baseret på andre end de gængse kilder.*

Andelen af elever, der skriver om historiske emner er vokset betydeligt de senere år - blot i denne årgang er andelen vokset med 1/3. Se også emnelisten. Og i virkeligheden er det endnu flere, da mange matematiske emner jo også rummer historiske dimensioner. Der kan også formuleres mange rigtig gode opgaver med emner indenfor oldtidens eller den arabiske verdens matematik, emner fra renæssancen eller fra infinitesimalregningens oprindelse. Det er imidlertid vigtigt at huske, at det skal være opgaver i matematik og ikke løst og fast om en kendt matematikers liv eller om den græske polis:

- *Alt for meget historie og for lidt matematik* skriver flere censorer.

Samtidig skal man selvfølgelig anerkende, at

- *Selve oversættelsen fra et andet matematisk sprog til moderne matematik må have en vis vægt i bedømmelsen.*

En del censorer beskæftiger sig med spørgsmålet om, hvor detaljeret en opgaveformulering må eller bør være:

- *Enkelte opgaveformuleringer er meget omfattende og stadig med lidt uklare formuleringer som ”du må gerne” eller ”du kan komme ind på”. Andre opgaveformuleringer er meget kortfattede.*
- *Jeg tror vi med fordel kunne bestræbe os på, at gøre opgaverne lidt mere åbne, således at det giver eleverne mulighed for at vælge stof ud og lægge en disposition, der ikke blot følger opgaveformuleringen punkt for punkt..*
- *Nogle af opgaveformuleringerne er rigeligt lange og levner ikke meget rum til eleven.*

En opgaveformulering må ikke indeholde en disposition for eleven – det er jo netop en af de ting vi ønsker at evaluere.

Igen i år er et af de gennemgående temaer i censorernes indberetninger, om opgaveformuleringerne skal medtage små konkrete opgaver.

- *Enkelte lærere beder ikke eleverne om at løse konkrete opgaver. Det synes jeg er synd for eleverne.*
- *De opgaveformuleringer, der virker bedst, er hvor læreren selv har stillet små opgaver, der på passende vis skal inddrages i besvarelsen - især når de lærerstillede opgaver også kræver sproglige formulerede svar.*

Specielt inden for topscore-emnerne er dette en rigtig god ide – ellers er det svært at give formuleringen et nyt og ”autentisk” præg. I bekendtgørelsens formulering hedder det, at opgaveformuleringen ”skal inddrage aspekter, eller være ledsaget af bilag, der ikke er drøftet med eleverne i vejledningsfasen”. Dette er ikke et rigoristisk krav om, at enhver opgaveformulering skal indeholde nogle småopgaver – der findes emner, hvor dette ikke er så naturligt. Men for de fleste

---

opgaver i matematik er dette en enkel måde, hvorpå man kan leve op til bekendtgørelsens formulering.

Det er en vældig god idé, som flere påpeger, at diskutere sine opgaveformuleringer med kolleger i faggruppen. Lad andre læse dem – friske øjne kan hjælpe med til, at du finder den rigtige formulering.

Også i år var der enkelte elever, der som forsøg skrev i flere emner: matematik-filosofi, matematik-økonomi (samfundsfag), matematik-historie. Der kan ikke drages konklusioner ud fra 5 opgaver. Men censorerne peger på, at det faglige niveau bør være tilfredsstillende i begge fag. Dette bliver sat i fokus efter reformen!

## Besvarelsene

Alle lærere, der har elever, som skriver stor opgave, må sikre sig, at eleverne er gjort bekendt med såvel formelle krav som evalueringskriterierne. Selv om det er studievejledernes opgave, er det alligevel en god idé at sikre sig, at eleven er helt på det rene med, hvad de formelle krav betyder i vores fag.

I vejledningsfasen kan man lade eleverne aflevere f.eks. 1-2 sider om et delområde for mere konkret at diskutere kravene til læselighed, brug af matematisk sprog, uddybende forklaringer til beviser osv.

**Omfanget** af en besvarelse er som bekendt 15 sider. Det forstår vi i matematik således, at hvis besvarelsen var skrevet som en dansk tekst, måtte den fylde 15 sider – men vi foretrækker den matematiske tradition, hvor disponeringen og layout hjælper læseren til at følge gangen i beviser, omskrivninger osv. Og vi foretrækker også illustrationer, hvor man kan se noget uden at bruge lup. Enkelte opgaver var ekstremt korte – helt ned på 4-5 sider. Men generelt var det ok.

**Noter og litteratur.** Eleverne er generelt gode til at opfylde alle de formelle krav, skriver flere af censorerne:

- *Det formelle omkring opgaverne er stort set i orden. Dog havde eleverne fra en enkelt skole slet ingen henvisninger til litteraturen.*

I vejledningsfasen skal eleverne gøres opmærksom på, at der skal være noter eller kildehenvisninger i teksten – hvilket naturligvis kan løses på flere måder, f.eks. i forbindelse med hvert lille kapitel.

For visse emner er det svært at finde matematisk tilgængelig litteratur i større mål – men prøv alligevel at lede, f.eks. på nettet, eller at spørge, f.eks. på universiteterne, hvor de har en stor servicevirksomhed som flere kunne udnytte. I tidsskrifter som *Normat* findes ofte gode artikler, som gymnasieelever med lidt vejledning godt kan læse – men det er naturligvis de færreste gymnasielærere, der har overblik over noget sådant. To gode tekster giver en helt anden situation end blot én. Under alle omstændigheder kan originale opgaver hjælpe med til at løfte elevens blik op fra bogens formuleringer.

**Layout** får mange pæne ord med på vejen. "Eleverne er virkelig dygtige til it" noterer en af censorerne. Men flotte håndskrevne besvarelses kan naturligvis have en lige så høj æstetisk standard.

---

## Den større skriftlige opgave på matematisk linje

På matematisk linje skrev ca. 825 elever den større skriftlige opgave i matematik. Der foreligger indberetning fra censorer dækkende i alt ca. 700 elever. Karaktergennemsnittet for disse blev 9,1 og karakterfordelingen fremgår af nedenstående tabel:

Karakter	00	03	5	6	7	8	9	10	11	13	
antal	0	0	11	32	66	111	174	179	109	20	702
%-fordeling	0,0	0,0	1,6	4,6	9,4	15,8	24,8	25,5	15,5	2,8	100,0

## Oversigt over opgavernes emner i matematisk gymnasium

92 skrev om **Komplekse tal**, herunder:

- Komplekse tal og komplekse funktioner
- Komplekse tal og differentialligninger
- Komplekse tal og ligningsløsning (23)
- Casper Wessel og de komplekse tal

130 skrev om **Historiske emner**, herunder

- $\pi$  (49)
- Ligningernes historie (13)
- Cirkelns kvadratur
- Pythagoræerne (11)
- Differentialligningernes historie
- Himmelsk regnekunst (Longomontanus)
- Archimedes
- Eksponential- og logaritmefunktionernes historie
- Tredjegradslikningen og Cardano (10)
- Ægyptisk matematik (9)
- Funktionsbegrebet
- Bygningskonstruktioner (spidsbuekupler)
- Græsk matematik (14)
- De trigonometriske funktioners historie (bl.a. Ptolemæus kordetabel)
- Babylonsk matematik (8)
- Matematik i oldtiden
- Talbegrebet i tidlige kulturer

43 skrev om **Klassisk geometri** herunder

- Geometriske konstruktioner (6)
- Landmåling
- Regulære polyedre
- Nipunktscirklen (11)
- Malfattis problem
- Euklids Elementer
- Regulære polyedre
- Geometrisk konstruktion af regulære polyedre
- Tredelingslinjer i trekanter
- Geometrisk algebra
- Herons formel
- Trekantens cirkler
- Cevas og Menelaos sætning

89 skrev om **Andre geometrier**, herunder

- Ikke-euklidisk geometri
- Sfærisk geometri (37)
- Hyperblen
- 4D-geometri
- Keglesnit og ellipser (28)
- Perspektivgeometri (9)
- Geometrisk inversion
- Planetbevægelser
- Klassisk og analytisk geometri
- Kortprojektioner
- Navigation

19 skrev om **Talteori**, herunder

- Primaltal
- Fermats sidste sætning (8)
- Pythagoræiske trekanter
- Talsystemer
- Diophantiske ligninger

27 skrev om **Iterative systemer**, herunder

- Iteration og kaos (13)
- Fraktaler og komplekse tal (14)

41 skrev om **Differentialligninger**, herunder

- Differentialligningsmod eller
- Laplacetransformationen
- Numerisk løsning
- Lineære 1. ordens differentialligninger
- Differentialligninger og stabilitet
- 2. ordens differentialligninger (12)
- Fiskerimodeller

60 skrev om **Differential- og integralregning**, herunder

- Økonomi og optimering (10)
- Kontinuitet
- Infinitesimalregningens oprindelse (5)
- Optimering og optimale figurer
- Lineær regression
- Kurver og flader i rummet
- Konvekse funktioner
- Arealbestemmelse, historisk
- Flervariabel analyse (5)
- Fra kvadratur til integralregning
- Numeriske metoder (Simpson mv.)
- Plane kurver (6)
- Dobbeltintegraler og planintegraler (7)
- Bezier-polynomier
- Integraler og kurvelængder
- Integrabilitet
- Makroøkonomiske modeller
- Tangentbestemmelse, historisk
- Eulers tal  $e$
- Keplers love og gravitation

21 skrev om **Følger og Rækker**, herunder

- Taylorpolynomier
- Fourieranalyse
- Uendelige rækker
- Kædebrøker

43 skrev om **Geometri og algebra**, herunder

- Vinklens tredeling
- Det gyldne snit og Fibonacci (37)
- Konstruerbare tal og  $\pi$
- Matematik i kunst, arkitektur og natur
- Terningens fordobling

36 skrev om **Lineær algebra**, herunder

- Matricer og lineære ligningssystemer (10)
- 3D-grafik
- Matricer og determinanter
- Affine afbildninger
- Lineær programmering og optimering (8)

12 skrev om **Statistik og Sandsynligheds-regning**, herunder

- Normalfordelingen
  - Ikke-frekventielle sandsynligheder
  - Aktiekursers udsving
  - Poisson-fordelingen
  - Grænseværdisætninger
  - Statistiske test
  - Hypergeometrisk fordeling
-

16 skrev om **logik og grundlagsproblemer**, herunder:

- Boolesk algebra
- Matematisk logik
- Bevismetoder, rekursion
- Uendelighedsbegrebet (12)
- Mængdelærens grundlag

48 skrev om **Kryptologi**, herunder:

- RSA-systemet (9)
- Merkle-Hellmann

27 skrev om **andre emner** som

- Algebraiske strukturer (6)
- Knudeteori
- Spilteori
- Firfarveproblemet
- Grafteori og transportnetværk (8)
- Polynomier
- Fejlkorrigerende koder
- Gruppeteori, symmetri grupper, flytningsgrupper
- Raytracing
- Mandatfordeling

## Den større skriftlige opgave på hf

De større skriftlige opgaver på hf og på sproglig højniveau rettes af samme censorkorps. 9 ud af 12 af disse indberettede resultater og emneoversigter. Heraf fremgik nedenstående.

Karaktergennemsnittet på hf-uddannelsen blev 8,2 med følgende karakterfordelingen:

Karakter	00	03	5	6	7	8	9	10	11	13	
Antal	0	0	5	12	13	12	12	14	3	4	75
%-fordeling	0,0	0,0	6,7	16,0	17,3	16,0	16,0	18,7	4,0	5,3	100

## Den større skriftlige opgave på sproglig højniveau

Karaktergennemsnittet blev 8,6 og karakterfordelingen fremgår af nedenstående tabel:

Karakter	00	03	5	6	7	8	9	10	11	13	
Antal	0	1	1	3	7	10	19	10	6	0	57
%-fordeling	0,0	1,8	1,8	5,3	12,3	17,5	33,3	17,5	10,5	0,0	100

## Oversigt over opgavernes emner på hf og i sprogligt gymnasium

10 skrev om **Komplekse tal**

18 skrev om **Vektorer**

45 skrev om **Historiske emner**, herunder:

- $\pi$  (10)
- 2. gradsligningens historie
- Pythagoræerne (6)
- Vinklens tredeling
- Archimedes
- Tredjegrads ligningen og Cardano (5)
- Babylonsk matematik
- Græsk matematik (11)
- Ægyptisk matematik
- Descartes og analytisk geometri
- Ligninger

3 skrev om **Talteori**

13 skrev om **Klassisk geometri**, herunder

- Geometriske konstruktioner
- Cirklen
- Polygoner
- Dodekaederet / regulære polyedre

22 skrev om **Andre geometrier**, herunder

- Analytisk rumgeometri
- Perspektivgeometri
- Sfærisk geometri (9)
- Parabler og hyperbler
- Ellipser og andre keglesnit (7)

11 skrev om **Differential- og integral-regning**, herunder

- Integralregning (5)
- Taylorpolynomier
- Polynomier
- Fourierrækker
- Differentialligninger

14 skrev om **Det gyldne snit og Fibonaccitalle**

8 skrev om **Andre emner**, såsom:

- Iterative systemer og komplekse tal
  - Algebra
  - Grafteori
  - Kryptologi
  - Talfølger
  - 3D-grafik
-