

Årsager til nogle bemærkelsesværdigt gode resultater af matematikundervisningen Erfaringer fra de skriftlige prøver sommeren 2008

Resultaterne fra sommerens skriftlige prøver i matematik viste en noget større differentiering mellem de enkelte hold, end vi så før reformen. Dette er behandlet i tidligere oversigtsartikler om de skriftlige prøver, og der er deri peget på nogle naturlige årsager hertil. Fx tiltrækker nogle studieretninger i højere grad elever med interesse for matematik, end andre gør. Men der er naturligvis også en række forhold i undervisningen selv, der er årsager til, at en undervisning skaber gode resultater.

Efter de skriftlige prøver skrev jeg til en række kolleger, der havde haft hold med bemærkelsesværdigt gode resultater, og bad dem om i nogle punkter og stikord at angive, hvad der er karakteristisk for deres undervisning, og hvad de selv vurderer, er årsag til de gode resultater.

Det kom der mange tankevækkende og inspirerende svar på i løbet af efteråret – og tak for det til alle jer, der svarede. Det følgende er en lille rapport udarbejdet på grundlag af svarene. Selv om hver lærer finder sin egen form tror jeg alligevel, vi kan lære en del af at lytte til, hvordan andre gør.

De enkelte ophavsmænd og –kvinder er i det følgende kun angivet med initialer, da det netop var punkter og stikord, jeg bad om og ikke gennemarbejdede tekster. Der blev sendt ca 100 breve ud, og det var både til hf og stx og til alle niveauer.

Undervisningen er en helhed

Det viste sig hurtigt som svarene løb ind, at lærerne ser deres undervisning som en helhed. Forklaringen på gode resultater ved skriftlig eksamen kan ikke begrænses til særlige opskrifter på gode besvarelser, selv om dette også har sin plads. Forklaringen ligger overordnet i den interesse for og glæde ved matematik, som det lykkedes at skabe. Den skriftlige og den mundtlige dimension er ikke skarpt adskilte discipliner, arbejdet med den mundtlige dimension styrker forståelsen for de matematiske begreber og metoder, og giver derved et mere sikkert hånddelag over for de skriftlige opgaver. Samspelet med andre fag kan give en større indsigt i hvad matematik er, og hvad matematikfaget kan, men det kan også bidrage direkte til at styrke håndværket, når matematik anvendes i forløb sammen med fysik eller samfundsfag.

”Det har helt klart bidraget til et godt skriftligt eksamensresultat, at vi var færdige med det skriftlige kernestof (på nær deskriptiv statistik) kort efter efterårsferien i 3.g”, skriver JB. ”En af årsagerne hertil var, at jeg i høj grad udnyttede AT-forløb, studieretningsopgaven i 2.g, ekskursioner osv til at dække supplerende stof. I 3. g havde eleverne derfor særdeles god tid til at blive fortrolige med de skriftlige eksamensopgaver, mens vi brugte timerne til sandsynlighedsregning og valgfrit stof (komplekse tal med anvendelser)”.

Planlægning af undervisningen

Der ligger en grundig planlægning bag resultaterne. ”Alt andet lige, så spiller planlægningen en afgørende rolle”, skriver SH. ”Med hensyn til undervisningens tilrettelæggelse, har jeg kørt med en ret stram planlægning. Jeg har nøje vurderet hvordan jeg kommer hurtigst muligt igennem de enkel-

te emner, uden at give køb på fagligheden”, skriver UJ og tilføjer, at det har været en hjælp, at skolen tilrettelægger årsplaner, så der ikke er de store afbrydelser i klassens undervisning”.

”Repetition er guld – vi brugte 6-7 uger på repetition, hvor eleverne fremlagde beviser og emner for hinanden (ofte i mindre grupper med mig pendlende mellem dem, så flest muligt fik trænet tavlefremlæggelse og bevisteknik) og regnede vejledende eksamensopgaver”, skriver JJH og tilføjer: ”Jeg bandede over, at klassen ikke kom til mundtlig eksamen og klassen bandede med. Jeg er dog overbevist om, at repetitionen var med til at skabe overblik over pensum og metoder, og på den måde styrkede klassen til skriftlig eksamen. Med et A-niveaufag på 375 timer mener jeg, at man med sindsro kan fyre 25 timer af til repetition. Tiden kan / må kunne findes andre steder, da rammerne for matematik er så brede, de er”.

Planlægning gælder ikke alene årsplanen: ”Hver time er grundigt forberedt ud fra min evaluering af forrige time”, skriver ON og fortsætter: ”Hver dag starter 1. time med ”Dagens opgave”, en opgave uden hjælpemidler, som eleverne har nogle minutter til at regne... Og i lektionen indgår næsten altid en opgave fra det emne, vi arbejder med.”

Interesse for faget – variation i undervisningen

”Jeg prøver at udnytte de forhåndenværende muligheder for at skærpe interessen for faget – ekskursioner til Århus Universitet, foredrag i UNF, studierejse til Rom, diverse AT-forløb og ikke mindst studieretningsopgaven i 2. g og studieretningsprojektet i 3.g”, skriver JBK. Flere fortæller, at de lægger vægt på i hver modul at præsentere noget nyt, måske kun lidt, men så timerne ikke kun bliver ”mere af samme slags”. Eleverne skal have udfordringer, skriver NF: ”Niveauet blev naturligvis tilpasset elevernes formåen, men stadig således at de oplevede udfordringer i faget, udfordringer der kunne klares”.

”TI Interactive er blevet benyttet i udstrakt grad fra starten af”, skriver JBJ. ”Jeg har opmuntret eleverne til at benytte disse værktøjer til at eksperimentere med matematik, og det har mange af dem gjort.” Tilsvarende overvejelser har MKC: ”Undervisningen i grundforløbet er tilrettelagt med meget brug af TI Interactive og næsten ingen formelræs i startfasen. ... Sammen med naturvidenskabeligt grundforløb anvendes matematik i praksis, feks har databehandling af et forsøg indgået som matematikaflevering, og efter retning er der skrevet videre på dem som rapport i NVG. Omkring 1. nov. (1.g) ved jeg, at stort set alle ønsker mat B, og niveauet i undervisningen hæves. Efterhånden står det klart for en del af eleverne, at deres regnefærdigheder skal forbedres, og klassen er derfor moden til ”regneforløb” sidst på efteråret.”

Den indsigt, der kommer til udtryk hos mange af kollegerne, nemlig at et centralt element i at skabe gode resultater er at skabe og stimulere interessen for matematik – at få dem til at synes det er sjovt – den indsigt står også centralt i internationale didaktiske overvejelser under temaet ’The Pupils Attitude’.

Indsigt i hvad matematik er

På et nyligt møde med nogle matematikdidaktikere, der var i Danmark for at studere reformen, udtrykte disse gæster åbenlys misundelse over mundtligheden i det danske system, og specielt over

vores 'oral exams'. "Keep up to that" var den kontante melding. Og vel er det dyrt, men det virker. Det hindrer at faget forfalder til et rent instrumentelt regnefag.

"Vi har brugt meget tid på at *tale om* matematik", fortæller VS, "forklare, begrunde og forstå fagets anvendelser, at kunne argumentere præcist". BC skriver i samme bane: "Mit mest brugte ord er *hvorfor*. Den matematiske træning fra det mundtlige arbejde med at formulere os korrekt bruger vi, når der skal gives forklaringer i de skriftlige opgaver".

Den eksperimentelle tilgang til matematik er vigtig, eleverne skal gå på opdagelse, men dette kan ikke stå alene. BLH skriver: "Når vi har arbejdet med et større emne bliver definitioner, beviser og generelle metoder uddelegeret til de enkelte elever til gennemgang. På denne måde blev alle vænnet til at gennemarbejde en matematisk tekst, til at argumentere (og ikke blot referere), og lærte at holde fast i en rød tråd i et ræsonnement".

Fagligt samspil i AT og i studieretningerne

Rigtig mange af kollegerne fortæller om, hvorledes matematik kan få gavn af samarbejde med andre fag, i AT og i studieretningerne. Således skriver MD: "Jeg har fra starten lagt vægt på, at matematik blev synlig og vedkommende for elever i AT-forløb, og vi har haft nogle rigtig gode forløb – fx et stort forløb om determinisme / indeterminisme (mat-fys-rel), og jeg tror det har bidraget til en bedre forståelse af differentialligningerne".

Der har mange steder været 'rift om' at være med i AT-forløb, og det kræver initiativ og udspil fra læreren at få lavet gode AT-forløb set fra matematiks side. JJH skriver: "Vi var i den heldige situation, at vi i AT-forløb kunne dække den basale statistik samt et matematik-historisk forløb gennem en studietur til Firenze. Det frigjorde samtidig tid til andet arbejde". AA fortæller tilsvarende om AT-forløb med matematik som centralt fag: "Klassen har deltaget i flere AT-forløb med bl.a. historie, oldtidskundskab, religion, dansk, fysisk, kemi samt studietur med idræt til Rom. I alle forløb har matematik spillet en central rolle og aldrig bare været med som hjælpefag". ES skriver, at hun "sørgede for, at matematik indgik i så mange AT-forløb som muligt, så anvendelser og fagets metode kom frem. Her fik de også skrevet en del rapporter".

KB havde en mat-fys-kemi retning, hvor også fysik var på A-niveau. "Der er ingen tvivl om, at den parallelle læsning af mat A og fys A i et 3-årigt forløb til A-niveau havde en stor betydning for elevernes udbytte. ... Samarbejdet med et tilpas hardcore anvendelsesfag som bestandig kunne illustrere den matematiske teori har været til stor gavn for elevernes udbytte af matematikundervisningen", skriver han og tilføjer: "Den 3-årige tilrettelæggelse af mat A gjorde at mere abstrakte emner kunne få en pause, og så tages op igen senere, så eleverne når at vænne sig til begreberne. Det var en hjælp i forbindelse med infinitesimalregningen og i forbindelse med sandsynlighedsregning og statistik".

Tilsvarende betragtninger kommer fra mange andre, også med udgangspunkt i andre studieretninger., AJK skriver: "Mange gode, *relevante* samarbejder med samfundsfag A, som eleverne var meget glade for, var med til at øge forståelsen for nødvendigheden af matematik". MKC havde et mat B hold i en studieretning med eng A-samf B-mat B og fremhæver samarbejdet med samfundsfag: "Der har været specielt fokus på statistik og i forbindelse med sandsynlighedsregningen er der gjort

meget ud af binomialtest og χ^2 -test og de tilhørende fordelinger. Dette er anvendt i praksis i forbindelse med et godt samarbejde med samfundsfag med bl.a. en studietur til Dublin, hvor eleverne sammenlignede Irland og Danmark på forskellige områder". Hun tilføjer i øvrigt, at hun synes der til forberedelsen af den mundtlige eksamen mangler en bredere opgaveregning til at underbygge forståelsen. *Det er et emne, der vil blive diskuteret i forbindelse med overvejelserne om læreplansjusteringer.*

Elevaktiverende arbejdsformer

Eleverne skal selv arbejde med stoffet – både kæmpe med løsning af opgaver og med sammenfatning af fagligt stof i større rapporter. Det skal de ikke kun, fordi det står i læreplanen, men fordi de lærer mere og bedre på den måde. Det var jo også sådan alle matematiklærere selv er blevet gode til faget. JBK skriver: "Jeg lægger vægt på stor elevaktivitet i timerne, så kun en ret begrænset del går med at læreren underviser ved tavlen. Eleverne arbejder i grupper med både opgaver (inklusive eksperimentelle oplæg til nye emner) og teori, og de fremlægger løsninger og beviser for hinanden, undertiden i grupper, men ofte ved brug af tavle".

"Eleverne elsker når undervisningsformerne veksler" skriver FHK. "På mine hold bidrager det til variationen at vi i løbet af året laver to større projekter, som de udarbejder en rapport over (projekt 'iteration' og projekt 'chi-kvadrat-test'). Disse to projekter bidrager ikke i sig selv til træning i eksamensopgaver, men til gengæld virker de som friske pust i undervisningen og på den måde er tiden givet godt ud (samme erfaring har jeg fra C-niveau)".

MON og CS havde i fællesskab et stort turbohold, hvilket "krævede meget detaljeret planlægning". For at nå alle emner ordentligt "blev undervisningen tilrettelagt med særdeles koncentrerede oplæg, så der blev mest mulig tid i klassen til individuel opgaveregning".

DN fortæller om sit hold, at "eleverne arbejdede selvstændigt med mange temaer / projekter og tog aktivt del i planlægningen af forløb". Arbejdet mandede ud i rapporter, der "oftest er tredelte, med teori, simple anvendelser og 1-2 mere komplicerede problemer. Mange rapporter har været gruppe-rapporter". "Rapporter har efterhånden fundet den rigtige plads i undervisningen", skriver HPT, der havde et HF C-niveau hold. Der laves 6-7 rapporter, en efter hvert hovedemne, hvor der dels samles op på det teoretiske stof, dels laves et antal opgaver, som forbereder kursisterne på problemstillinger, de vil møde til eksamen. Det tilstræbes også, at der i rapporterne indgår lidt mere komplekse problemer "fra den virkelige verden", såsom geometriske opmålinger i praksis, eller opsparing og lån ud fra konkrete eksempler. Kursisterne laver stort set fine rapporter, måske fordi de føler sig trygge ved at medbringe en god og gennemrettet rapport til henholdsvis skriftlig og mundtlig eksamen."

Det elevaktiverende drejer sig også om opgaveregningen. Hvilken strategi skal der anvendes, når man møder opgaver, der ikke kan klares med søg og erstat i forhold til de opgaver de har i deres notater. BC giver sine elever følgende strategi:

- tegne: prøv at få struktur på oplysningerne (i matematik: fx skitsér grafen, tegn trekanten osv – og udnyt gerne det værktøj du har)

- tænke: overvej løsningsstrategier (i matematik: i hvilken rækkefølge skal tingene fx udregnes)
- trykke: dvs nu tager vi beregningsværktøjerne frem og taster løs.

Planlægning af hjemmeopgaver

”For ikke at miste fokus på indøvelsen af matematiske færdigheder med de mange nye tiltag i gymnasireformen planlagde jeg at holde fast ved aflevering næsten hver uge af sæt med almindelige hjemmeopgaver, dog mindre i omfang end i ”gamle dage””, skriver BLH. En del andre nævner noget tilsvarende, feks LP der skriver, at ”hun har haft stort udbytte af to-timers sæt (elevtimer). Det fandt jeg ud af at gøre fra 2. g – det var rig godt med regelmæssige afleveringer”. ESR gør noget tilsvarende: ”Jævn opgavefordeling hen over året, oftest 2 timers elevtid hver uge. ... I sidste del af året: Hele eksamenssæt med 3 timers elevtid (C-niveau)”.

Mindst lige så vigtigt er det at give hurtig respons: ”Jeg retter opgaverne og leverer dem tilbage den følgende mødegang, mens eleverne stadig har deres besvarelse i frisk erindring”, skriver SH og siger videre, at han husker hvem der laver hvilke fejl og inddrager dette i måden hvorpå opgaverne returneres. I samme bane er JBJ: ”Jeg har holdt på, at eleverne skulle have deres afleveringer hurtigt tilbage, ca 1-3 dage efter aflevering. Ved tilbagelevering har jeg givet gode råd vedr. de opgaver, eleverne havde sværest ved. Fx har jeg vist dem løsningsmetoder i TI Interactive eller ladet eleverne vise gode besvarelser frem. Den praksis med at vise, eller lave eleverne selv vise ”eksemplariske” besvarelser er der flere der benytter. ”Men det er vigtigt at variere, så ikke kun de dygtigste kommer til”, fremhæver NF.

Hvordan forberedes eleverne til prøven uden hjælpemidler, så dette bliver en integreret del af det daglige arbejde? NA skriver: Vi har startet hvert eneste modul med at regne ”dagens opgave”, typisk opgaver uden hjælpemidler, hvorved eleverne har fået en daglig dosis”. Mange lærere praktiserer forskellige varianter af dette, at opgaver til prøven uden hjælpemidler ”dryppes ned over” det øvrige arbejde – nogle gør det koncentreret i bestemte perioder, andre hen over hele forløbet.

Krav til besvarelsen af de skriftlige opgaver

JHA henviser i sit brev til undervisningsvejledningens formulering om, at en god besvarelse skal indeholde ”en forbindende tekst fra start til slut, således at der gives en klar præsentation af, hvad de enkelte opgaver og de enkelte delspørgsmål går ud på, og således at der er en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og med brug af almindelig matematisk notation.” Og JHA tilføjer, at ”et vigtigt element i undervisningen har været at insistere på, at en ordentlig besvarelse indeholder *hele historien* – dette hjælper både på begrebsindlæringen og på forståelsen af de nye standardopgaver”.

JPB skriver i samme bane. ”Vi har brugt TI Interactive meget intenst og jeg har haft meget fokus på, hvordan opgavebesvarelser skulle opstilles især mht. forklarende tekst og konklusioner”. ”Der skal være mellemregninger, forklarende tekst, konkluderende tekst og gode figurer”, skriver LP.

Mange kolleger viser som nævnt eksempler på gode besvarelser, men det er også vigtigt at lære eleverne, at der er forskellige metoder og forskellige udgaver af gode besvarelser. DN anvender den

praksis, at ”i hvert afleveringssæt skal leverne demonstrere forskellige metoder: TI 89 med tilhørende forklaringer, almindelig regning i hånden, aflæsning, hvis det er en relevant metode osv. Det er altså ikke nok at være god til TI 89”. AA fortæller en variant af samme historie: ”Eleverne trænes i at løse samme opgavetype på flere forskellige måder. Dette kan give gode klassediskussioner af, hvilke metoder, der anvendes hvornår, samt fordele og ulemper ved de enkelte metoder”.

Nogle kolleger opstiller en ”spiseseddel” for besvarelsen af bestemte klassiske opgavetyper. DN giver sine elever det råd, at ”løbe følgende punkter igennem, når der arbejdes med modelopgaver:

1. Opskriv variablernes navne og betydning.
2. Opskriv evt indskrænkninger i variablernes definitionsområde og forklar hvorfor.
3. Opskriv den fundne sammenhæng.
4. Argumenter for den fundne sammenhæng med sprog – feks ud fra hvad der karakteriserer lineær vækst, herunder med henvisninger til den generelle teori.”

Anvendelse af CAS og matematikprogrammer ved skriftlige opgaver

I matematiklærerforeningens regi foregår et udviklingsarbejde vedr. den skriftlige dimension af faget. Målet er at indrette et site på nettet, hvor lærere og elever kan gå ind og hente vejledning og inspiration til udformning af skriftlige opgaver, og hvor der derfor skal ligge en række eksempler på skriftlige produkter i matematik. Centralt i hele diskussionen om at højne kvaliteten af det skriftlige arbejde i matematik står spørgsmålet om anvendelse af CAS-programmer / geometriprogrammer / statistikprogrammer som værktøj i udformningen af den skriftlige besvarelse.

”Jeg har haft besvarelsene af de skriftlige eksamensopgaver hjemme for at kigge dem igennem”, skriver LP. ”Ved det gennemsyn fandt jeg ud af følgende: CAS er vældig godt for alle kategorier af elever. De svage og de middelgode klarer sig bedre med dette redskab, og de dygtige elever formår at vise, at de både kan bruge CAS og gammeldags regning (dog ikke i samme spørgsmål!)”. JHA fortæller tilsvarende, at CAS-programmet bl.a. er ”godt til at understøtte kravet om, at en besvarelse skal indeholde *hele historien*. Mange kolleger fortæller samme historie om værdien af en systematisk brug af it.

Brug af test

Prøver undervejs og specielt årsprøver og terminsprøver omtales af mange kolleger som nødvendige og værdifulde. ”Disse prøver er et ”wake-up-call” for mange elever” skriver JBJ. ”Hvis de ikke får en sådan opringning engang imellem kan mange af dem køre igennem årene uden at forstå kravene og kende deres eget niveau.”

En del kolleger omtaler, at de laver prøver efter hvert hovedemne. DN ”afslutter hvert tema med en prøve uden hjælpemidler i forskellige varianter”. Flere kolleger omtaler, at det er vigtigt at give eleverne selvtillid og tilrettelægge prøverne så de styrker dette: Prøverne skal tænkes ind i en pædagogisk-didaktisk sammenhæng og stilles på tidspunkter, hvor eleverne har lært stoffet i en sådan udstrækning at det ikke går helet galt, og så det måske endda bidrager til at det giver nogle elever tro på at de kan. Endelig understreger flere, at gennemførte test og prøver er en god baggrund for diskussion af hensigtsmæssigheden af forskellige løsningsmetoder.

Studieteknik og lektieværksted

”Det er vigtigt at styrke elevernes matematiske selvtillid, samt få dem til at arbejde sammen på en måde, så de får glæde af hinandens stærke sider”, skriver CS. ”De elever, der er gode til CAS hjælper dem, der er mindre dygtige til det, og de matematisk stærke hjælper med forklaringer de mindre stærke. ... Jeg har talt meget med dem om studieteknik, om matematisk træning, om at det måske tager tid, som når man træner i idræt eller øver klaverspil, men efter et par måneders træning sker der pludselig noget”. Hun tilføjer, at eleverne får præcise råd om, hvordan de skal læse lektier, hvordan de skal repetere osv.

Ikke mindst fra lærere med hf-hold understreges betydningen af, at give kursisterne selvtillid. Giv dem små sejre, så selvtilliden vinder over underlegenhedsfølelsen. Nogle af hf-skolerne fortæller om betydningen af en stram afleveringspolitik, om at følge op på fravær osv. Og så spiller lektiecafeer en stor rolle. En skole sammenfatter hvad flere fortæller: ”Vores erfaring er, at eleverne hovedsageligt lærer noget, når de er på skolen, derfor har vi placeret en del af skolens lektiecafetimer inde i hf-skemaet, og de er forbeholdt hf-eleverne”. Det virker, fortæller de.

Konklusioner

Fra stort set alle sider er der kommet fortællinger om, at baggrunden for gode resultater ved den skriftlige eksamen ikke skal findes isoleret i gode råd og opskrifter på udformningen af de skriftlige besvarelser. Dette har sin plads, som det er fremgået af det foregående, og det indgår i matematiklæreforeningens projekt om skriftlighed. Men de gode resultater har også rod i:

- en god planlægning af hele forløbet og af den enkelte lektion,
- en indsats for at skabe interesse for faget, både gennem spændende matematiske emner og via et samarbejde med andre fag,
- arbejdet med den mundtlige dimension, med at få eleverne til at argumentere,
- en tilrettelæggelse af undervisningen, der aktiverer eleverne, både gennem opgaveregning, gennem eksperimenterende tilgang, gennem præsentationen af teori og gennem sammenfatning af de matematiske emner i rapporter,
- inddragelse af it og CAS-værktøjer i undervisningen og diskussioner med eleverne om forskellige løsningsmetoder og om kravene til en god besvarelse,
- mange elevafleveringer og en vedvarende ”drypvis” indlæring af fundamentale færdigheder.

*Bjørn Grøn, fagkonsulent
Januar 2009*