

Om variabelbegrebet, om at prøve sig frem og om stikprøveopgaver

Vil der blive udarbejdet eksemplariske besvarelser af nogle af de nye typer opgaver til skriftlig eksamen, har flere kolleger spurgt. Nej det vil der ikke.

Det ligger næsten i sagens natur. Hvorfor i alverden skulle man inddrage sådanne nye opgavetyper og matematiske kompetencer i gymnasiefaget, hvis det dybest set bare drejede sig om at lære eleverne at gentage bestemte formuleringer fra eksemplariske besvarelser til stikprøveopgaver eller andre opgavetyper, hvor eleverne hovedsageligt skal svare med sprog. I sådanne opgaver er der ikke ét svar på, hvordan en besvarelse til fuldt pointtal ser ud.

Hvorfor så stille den slags opgaver til skriftlig eksamen? Det er et af elementerne i den overordnede plan for fornyelse af læreplanerne. De studenter, vi har produceret i gymnasiet er dygtige, bl.a. til at regne de opgaver, vi har lært dem at regne. Det har mødt anerkendelse fra de videregående uddannelser. Men de er ikke så gode til at kaste sig ud i matematiske problemer og opgaver, hvor de ikke fra starten kan se vejen til målet. De er ikke så gode til at prøve sig frem. Det gælder helt ned i de delelementer ved opgaveløsninger, hvor variable ikke er navngivet eller linjer ikke er tegnet. De kompetencer efterspørger aftagerinstitutionerne.

Vi har heller ikke trænet dem særligt i selv at opstille modeller, heller ikke i situationer, hvor det ikke er rå data, men hvor meget allerede er rettet til. I de vejledende opgaver, der blev lavet til valggymnasiet, var der faktisk eksempler, der pegede i den retning, men af forskellige grunde blev dette nedtonet.

Det er ofte blevet sagt, at sådanne opgavetyper, hvor der både spørges og skal svares med sprog, er på et taksonomisk højere niveau end ”stykkeregning”. Selv om dette er rigtigt, så er det ikke sådan, at vores elever ikke kan lære det. Men alt tager tid, og ønsker vi et fokus dér, må der være luft til det i læreplanen. Det var et af problemerne med den gamle læseplan: Der var meget lidt tid til noget, der rakte ud over pensumlisten. Det skulle der være skabt nu.

Samtidig har det været vigtigt i læreplansarbejdet, at der kom en helhed over det, så sådanne nye opgavetyper ikke blev parkeret i ét emneområde, men gik igennem i alle emner. Eleverne skal lære:

- at opstille formler ud fra sprog
- at opstille og tolke modeller og kommentere modellers gyldighed
- at håndtere geometriske opgaver, hvor ikke alt er tilrettelagt
- at kommentere og begrunde grafiske forløb ud fra viden om differentialregning
- at opstille differentiaalligninger
- at kommentere statistiske undersøgelser

og andet.

Ved at integrere sådanne opgavetyper i det skriftlige pensum, vil problemstillingerne givetvis lettere og hurtigere blive integreret i alle sider af den daglige undervisning. Skriftlig eksamen har et stærkt feedback på undervisningen. Men samtidig med dette har det været læreplansgrupperne og de nye opgavekommissioner magtpåliggende, at de skriftlige prøver også tester de elementære færdighe-

der, som eleverne lærer i begyndelsen af hvert emneområde. De elever som tilegner sig dette skal have mulighed for at bestå.

I stedet for ”eksemplariske besvarelser” af nye opgavetyper, kan det være en god ide at diskutere kvaliteten af autentiske elevbesvarelser. Det er gjort på en del regional- og skolemøder i de senere år, og det vil jeg bestemt bidrage til, at vi fortsætter med.

Evalueringen af skriftlig eksamen i matematik C på hf

Sommerens skriftlige eksamen i matematik C på hf var den første eksamen efter reformen. Evalueringsrapporten ligger på uvm's hjemmeside, og det kan stærkt anbefales at studere den nærmere. Rapporten bygger på en detaljeret indberetning af, hvorledes knap 1000 kursister har klaret de forskellige spørgsmål. Dette har givet mulighed for at foretage en meget grundig analyse – forhåbentlig til gavn for både opgavekommission og alle lærere.

Det generelle indtryk er som beskrevet ovenfor, at eleverne først kaster sig ud i en opgave, når de kender vejen til målet. Der prøver sig ikke frem i de traditionelle opgaver. Samtidig kan ganske mange løse sådanne opgaver, hvor de skal opstille en model ud fra sprog. Og det er interessant, at i opgaver, hvor de skal sætte ord på – feks fortolke betydningen af nogle konstanter i en eksponentiel udvikling – der er det ikke enten-eller. De prøver faktisk her at skrive noget, ikke altid lige fornuftigt, men de prøver.

Noget af det mest overraskende var, at den sværeste opgave overhovedet i eksamenssættet var en geometriopgave, hvor eleverne skulle beregne en højde ned på en hypotenus. De kunne fint regne det første spørgsmål i geometriopgaven, hvor de skulle beregne størrelsen af en vinkel og længden af en side. Trekanten var tegnet og lå som den normalt gør i formelsamlinger. Men i sidste spørgsmål går det galt, dels fordi højden ikke var tegnet, og dels fordi trekanten lå ”forkert” til denne opgave: En højde skal tegnes nedad, og en grundlinje skal ligge vandret! Det var stort set kun elever med 10 og derover, der fik fat i denne opgave.

Et af budskaberne til mig som lærer er, at jeg skal træne opgaver, hvor eleverne selv prøver sig frem, selv eksperimenterer helt fra starten med de simple opgaver – men selvfølgelig også lære dem at regne ”almindelige stykker”. Og dette gælder inden for alle områder af vores fag.

Variabelbegrebet

Variabelbegrebet står centralt inden for en række matematiske emneområder. Det er ikke nyt. Men det er nyt at læreplanerne fremhæver, at vi må give det en stærkere placering i undervisningen. Gør vi det fra starten, kan det være et af de begreber, som giver en rød tråd i hele undervisningen, og som rækker naturligt ud til de naturvidenskabelige fag og til samfundsfag.

Variabelbegrebet er svært. Men en af metoderne til at få eleverne til at gå mere eksperimenterende frem, til ”at prøve sig frem” er at tilrettelægge undervisningsforløb, hvor de selv arbejder med variabelbegrebet og variabelsammenhænge. Sådanne opgaveforløb kan enhver matematiklærer naturligvis selv lave, men der er også meget godt materiale i de nye lærebøger. Og på emuen findes forløb, der er skræddersyet til dette. Jeg har selv haft glæde af at bruge materialet udarbejdet til et in-

troducerende forløb på C-niveau, og som ligger på adressen:

<http://www.emu.dk/gym/fag/ma/undervisningsforloeb/hf-mat-c/mat-c.html>

Men hvorfor alt det besvær, hvorfor ikke bare fortælle eleverne, hvad de skal gøre, hvorfor ikke bare få indført det x og det y, så vi kan komme i gang med at regne. Det er ikke en håbløs metode – hvis man vel at mærke senere vender tilbage til selve variabelbegrebet; sådan tror jeg mange af os gør ved sådanne vanskelige emner som indførelse af differentierbarhed. Men hvis man ikke på noget tidspunkt sætter fokus på selve variabelbegrebet, så gør man eleverne en bjørnetjeneste.

Det var først ved at gennemføre et undervisningsforløb over det omtalte materiale, jeg blev klar over, *hvor* svært dette egentlig er. Havde jeg ikke sat fokus på det, havde det jo stadig været lige svært – jeg ville bare ikke have opdaget, hvor problemerne lå. Eleverne kunne godt lære at regne stykkerne, hvis det hele var serveret for dem. Men kunne de selv tage fat, hvis ikke?

Nogle af de første eksempler i det omtalte materiale drejer sig om henholdsvis stearinlys, indkøbt med henblik på at blive brugt efter formålet, samt kogning af vand på et komfur. Hvilke variable er i spil. Hvilke sammenhænge mellem de variable kunne man forvente osv. Eleverne nævner ikke nødvendigvis det, vi lige tænker på, men f.eks. ”farven på stearinlys”, ”kvaliteten af stearinet”, ”grydens materialer”. Sådanne diskussioner fører frem til en indsigt i at:

- der er mange variable i spil, vores liste er næppe udtømmende
- variable bør kunne måles efter en eller anden skala (tid, vægt, længde ...), måske efter at vi først har kategoriseret efter kvalitative egenskaber (køn, erhverv, farve, grad af sygdom ...)
- for at afdække sammenhænge mellem variable skal vi så vidt muligt arbejde med en sådan variabelkontrol, at vi nøjes med at skruer på én variabel af gangen – og dette er af og til meget vanskeligt at leve op til.

Et sådant forløb åbner for mange interessante veje, både ind i grafiske sammenhænge, tolkning og tegning, lineære og eksponentielle sammenhænge osv. Og til diskussion af sammenhænge, som statistiske undersøgelser afdækker eller hævder at afdække.

Stikprøver

Statistik er svært, fordi vi her ofte er helt ude og røre ved virkeligheden. Men netop derfor er statistik et centralt felt, når det drejer sig om samarbejde med andre fag.

Statistik drejer sig om metoder til at uddrage en indsigt om tendenser og sammenhænge ud fra kendskab til et givet talmateriale. Det givne kan være både meget begrænset og ret diffust. Statistik søger også at svare på, med hvilken grad af sikkerhed vi kan udtale os om disse tendenser, sammenhænge osv.

Hovedparten af det faglige stof er placeret under supplerende stof i læreplanerne. Det er gjort for at give bedre plads til det faglige samarbejde med andre fag. Eksempelvis er alt hvad der vedrører bearbejdning af et talmateriale til belysning af en opstillet hypotese, placeret under supplerende stof (på B- og A-niveau).

Kernestoffet, der er genstand for den skriftlige eksamen, omfatter deskriptiv statistik på hf C og på stx B og stx A yderligere stikprøvers repræsentativitet. I undervisningsvejledningen, samt i de vejledende eksamensopgaver er anført eksempler på sådanne opgavetyper. Lad os se på opgave 4.003 i hæftet til stx B:

Vil indtagelse af urtete styrke helbredet hos de ældre? Dette ønsker en gruppe studerende at undersøge. Over en periode på 6 måneder besøger de nogle tilfældigt udvalgte beboere på et plejehjem og serverer urtete for dem. Efter 6 måneder viser det sig, at de beboere, der fik serveret urtete, faktisk har færre sygedage, end de som ikke fik serveret noget. De studerende publicerer resultatet af deres undersøgelse under overskriften: "Urtete styrker helbredet hos de ældre".

a) Kommenter denne påstand ved at stille mindst tre kritiske spørgsmål til undersøgelsen.

Hvordan går man til denne opgave, når man ikke ved mere, end der står? Sådant er det jo ofte med avisnotitser. Kan man som elev sige, at man antager undersøgelsen er gennemført efter alle forskrifter, og at den er offentliggjort i *The Lancet*, og at der derfor ikke er noget at komme efter? Nej det kan man ikke – hverken her eller andre steder får man point for at digte en anden opgave i stedet for at løse den stillede.

Det første der springer i øjnene er, at vi hverken får oplyst noget om *populationen eller stikprøven*. Er populationen alle beboere på plejehjemmet? Hvor stort er dette og hvor mange af beboerne er besøgt?

Det næste er, at vi ikke af teksten kan vide, hvorledes stikprøven er udvalgt. Det kan naturligvis ikke udelukkes, at stikprøven er repræsentativ efter alle kunstens regler og en række parametre, men på det oplyste grundlag spørger vi: *Er der begået systematiske fejl* (i statistikbøger oftest betegnet 'bias'). Går jeg ud på gaden og spørger om holdningen til et eller andet, er det nok helt tilfældigt, hvem jeg spørger. Men naturligvis er der begået systematiske fejl. Tilfældighed garanterer ikke, at det er en repræsentativ stikprøve. Serverer de te for de syge, demente, sengeliggende, for de med særligt dårligt helbred lige så vel som for de oppegående? Er der taget hensyn til alder og køn? Er der taget hensyn til bestemte sygdomme, der kan have indflydelse? Hvad med den gruppe, der absolut ikke drikker te? osv. osv. Disse spørgsmål drejer sig om en række specifikke parametre eller variable – og listen er svær at udtømme! – som vi siger, der skal tages hensyn til, for at undgå systematiske fejl (bias).

Det tredje er, at selv om det var en repræsentativ undersøgelse, hvor stikprøven var udvalgt efter alle kunstens regler, så kunne der alligevel være nogle *skjulte variable* på spil. Man tror man måler holdningen til eller virkningen af det som er i fokus i spørgsmålet – men den, man spørger, reagerer på noget helt andet eller tredje. Det kan ofte være svært at isolere effekten af sådanne skjulte variable – i det givne tilfælde, hvad skyldes urtete og hvad skyldes de unge menneskers besøg? (Sådanne skjulte variable, hvor det er svært at isolere den enes virkning frem for den anden kaldes i statistisk litteratur konfunderede variable.)

Det fjerde, der springer i øjnene, er selve konklusionen: ”Styrker helbredet”. Helbredet er her åbenbart en variabel, men *hvordan mon man måler denne styrkelse*? Det står der ikke noget om. Og det kan der sikkert være flere bud på – blodtryk, bestemte stoffer i blodet, kolesteroltal, evnen til at optage vitaminer og mineraler, søvnproblemer, appetit, hukommelse osv. Listen er udtømmelig, men allerede de nævnte viser, hvor vidt forskellige bud, der kan være. Og det er da ikke ligegyldigt, hvad der styrkes – har de målt på alt? Er der noget der måske svækkes samtidig? Og videre: Styrkelse i forhold til hvad? En fremgang fra 27 til 28 på en ellert anden skala eller hvad?

Det femte, man i forlængelse heraf må spørge om, er, om der ikke har været en kontrolgruppe? Det tyder det ikke på – og det er også svært at drikke urtete uden at lægge mærke til det. Det er jo problemet i mange forsøg, men ikke desto mindre – uden kontrolgruppe bliver det betydeligt vanskeligere at drage pålidelige slutninger. Ideelt set skulle det naturligvis være et dobbelt-blind-forsøg.

Eleverne kan godt lære at håndtere sådanne opgaver, hvis der i undervisningen arbejdes med en række gode eksempler på det. Flere lærebøger har et ret righoldigt udvalg af sådanne eksempler, også formuleret som opgaver. Jeg skal ikke udtale mig om alle lærebøger er lige godt polstret på dette område, men hver skole bør jo have mindst et eksemplar af hvert lærebogssystem på markedet. Så kan man orientere sig og hente inspiration. Avisklip kan også give et materiale til undervisningen.

Kravet til en elevbesvarelse er selvfølgelig ikke, at de skal skrive noget så omfattende som de nævnte 5 punkter. Men af ovenstående skulle forhåbentlig fremgå, at der kan være et væld af forskellige elevbesvarelser til en sådan opgave, der alle giver topkarakter.

Bjørn Grøn