

145-Odense katedralskole.

Studieretningsopgave i fysik og matematik februar 2007

Titel: Harmoniske svingninger

Der ønskes en kortfattet redegørelse for harmoniske svingninger og Hookes lov. Herefter løses en (eller flere) af nedenstående opgaver, som minimum skal en del af **1)** og **2)** besvares.

1) Bevægelsesligningerne. (Matematik).

Gennemgå kortfattet de trigonometriske funktioner $\sin()$ og $\cos()$. Forklar anvendelsen af radianer kontra grader.

Vis at

$$x(t) = A \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi \right)$$

er løsning til

$$x''(t) = -\frac{k}{m} \cdot x(t)$$

Hvor m er loddets masse, k er fjederkonstanten og $x(t)$ er forskydningen fra fjederens-ligevægtsposition..

Redegør for betydningen af A og φ .

Du kan udlede ligningerne for $v(t)$ og $a(t)$.

2) Elastisk fjeder (Fysik – eksperimentelt)

- Bestem fjederkonstanten k for en fjeder ved at belaste den med forskellige lodder. Sæt også den belastede fjeder i svingninger og mål svingningstiden.
- Sammenlign eksperimentet med forudsigelsen fra formelen:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Egentlig bør fjederens egen masse delvist medregnes. Der findes gode argumenter for at medregne $1/3$ af fjedermassen.

- Vha Pascos afstandsmåler og kraftmåler måles $x(t)$, $v(t)$ og $F(t)$. Kontroller om de opfylder de forventede ligninger (kan enten findes matematisk eller regnes på Ti89. Se opgave 3).
- Fjederens bevægelse dæmpes og c) gentages. (se opgave 4)

3) Harmonisk bevægelse med Ti89

Anvend nedenstående model til at finde bevægelsesligninger for en harmonisk bevægelse ved hjælp af Ti89.

$$F = -k \cdot x$$

$$a = \frac{F}{m}$$

$$m = 2,0 \text{ kg} , k = 20 \text{ N/m}$$

$$x(0) = 0,4 , v(0) = 0$$

- Lav plot af (t, x) , (t, v) og (t, a) og se efter, at bevægelserne bliver harmoniske.
- Eftervis, at der faktisk er en faseforskel på $\pi/2$ mellem x og v og mellem v og a .
- Lav også gerne et såkaldt faserumsplot, dvs. en af-bildning med x ud ad 1. akse, v ud ad 2. akse. Hvilken figur fremkommer? Hvad siger det om bevægelsen?

4) Dæmpning undersøgt med Ti89

Oftest vil en fjeder i praksis være dæmpet. Ti89 kan anvendes til at analysere bevægelsen.

Indføres et hastighedsafhængigt gnidningsled, skal F modificeres til:

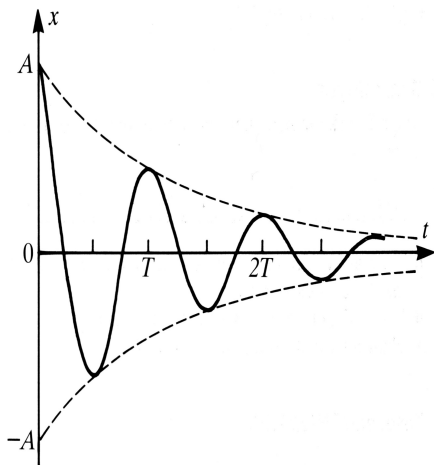
$$F = -k \cdot x - f_r \cdot v$$

$$a = \frac{F}{m}$$

$$f_r = 1,0 \text{ kg/s}, m = 2,0 \text{ kg}, k = 20 \text{ N/m}$$

$$x(0) = 0,4, v(0) = 0$$

- Undersøg, om dæmpningen har væsentlig indflydelse på svingningstiden. Vis at amplituden falder eksponentielt med tiden. Argumenter også gerne matematisk ud fra Ti89's løsning.
- Prøv også at variere dæmpningen, der kan blive så stor, at systemet slet ikke kommer i svingninger (overkritisk dæmpning). Lav også her et faserumsplot, jf. opgave 3. Kommenter resultatet og sammenlign eventuelt med foregående beregning. Efter passende lang tid ender situationen i en "stabil ligevægt".



Inspiration:**Tvungen svingning og resonans undersøgt med Ti89.**

Tvungen svingning simuleres ved at ændre kraften med en ydre tvungen harmonisk varierende kraft:

$$F = -k \cdot x - fr \cdot v + F_0 \cdot \sin(\omega_y \cdot t)$$

$$a = \frac{F}{m}$$

$$F_0 = 7,5 \text{ N} , \omega_y = 15 \text{ 1/s} , fr = 1,0 \text{ kg/s} , m = 2,0 \text{ kg} , k = 20 \text{ N/m}$$

$$x(0) = 0,4 , v(0) = 0$$

- Lav plot af (t, x) . Bemærk, at det tager lidt tid, før systemet har svinget sig på plads, men at det til sidst er den ydre tvungne krafts frekvens, der vinder. Ligger systemets egen frekvens og den påtrykte ydre frekvens langt fra hinanden, bliver amplituden ikke ret stor. Systemet kan ikke rigtig komme i sving. Prøv derfor at variere ω_y . Brug TRACE til at finde amplituden, og lav (på almindeligt mm-papir) en graf over amplituden som funktion af ω_y .
- Forklar, hvorfor der bliver resonans for en bestemt værdi af ω_y .
- Lav også et faserumsplot for denne bevægelse og vis, hvordan bevægelsen starter tilsyneladende tilfældigt, men efterhånden nærmer sig en stabil periodisk bevægelse.