

Perspektiver fra matematikdidaktisk forskning på brug af IT i matematikundervisning

Morten Blomhøj, IMFUFA, NSM, RUC

1. IT i matematikundervisningen som didaktisk problemfelt
2. Typer af elevvirksomhed i IT baseret undervisning
3. IT støtte til elevernes begrebsdannelse
4. IT som redskab til matematisk modellering
5. Didaktiske udfordringer ved integration af IT

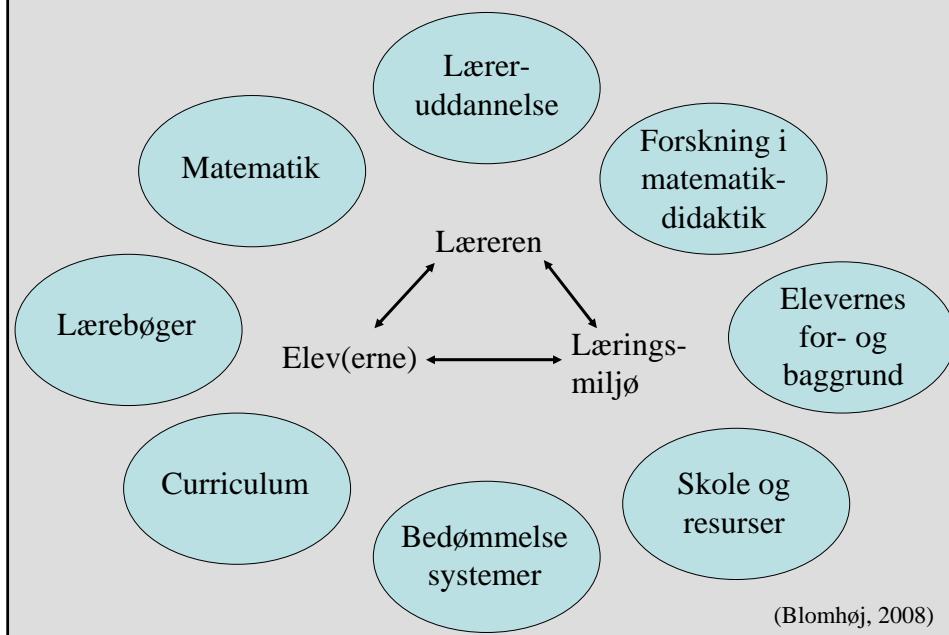
Genstandsfeltet for matematikkens didaktik

Matematikkens didaktik er det videnskabelige arbejdsfelt, der søger at bestemme, karakterisere og forstå de fænomener og processer, der indgår - eller kun indgå - i matematikundervisning og -læring. Sigtet er at klarlægge mulige årsagssammenhænge med henblik på at udvikle og forbedre matematikundervisning. (Niss, 1993, s. 100)

Forholdet til undervisningens praksis

In other words the didactical theory should be constructed and evaluated in relation to the needs and difficulties that appear in the instruction, i.e., in the practice of mathematics instruction. Thus, didactical theory, seen as systems of viewpoints, must include suggestions for strategies that can aid consideration of, as well as opposition to, the instructional needs and difficulties, that the theoretical "core" in question relates to. (Christiansen, 1990, p. 1)

Genstandsområdet for matematikdidaktisk forskning



Overordnede forskningsspørgsmål vedrørende IT

- (1) Hvordan påvirker brug af IT samspillet mellem eleverne og mellem læreren og eleven/eleverne?
- (2) Hvordan kan brugen af IT påvirke elevernes virksomhed i undervisningen og deres læring af matematik?
- (3) Hvordan kan brugen af IT støtte elevernes dannelse af matematiske begreber?
- (4) Hvordan kan IT bidrage til udvikling af kompetencer inden for problemløsning og modellering?
- (5) Hvilke nye didaktiske udfordringer giver brugen af IT?
- (6) Hvilke forhold henholdsvis hæmmer og fremmer integration af IT i matematikundervisning?

“The evolution of the mathematical field has always been dependent on the computation tools available and the development of software for symbolic computation has had an increasing influence on mathematical practices and even on its problematics. School, as is the case every time that it faces an evolution of scientific and/or social practices, can neither stand apart from this evolution, nor ignore the new needs it generates.”

(Artigue, 2005, p.232)

“...want to be convinced that the internal efficiency of the educational system will be increased by such a change in teaching means. Computer technology are thus asked to prove that they can help teachers to face the recurrent difficulties of mathematics teaching and learning...”

(Artigue, 1998, p.122)

Integration af IT i matematikundervisning må betyde

- at relevante IT ressourcer er tilgængelige for eleverne og for læreren i og uden for undervisningen
- at fastlæggelse af undervisningens indhold og mål for elevernes læring sker under overvejelse af mulighederne for anvendelse af IT rummer
- at brugen af IT i undervisningen underordnes pædagogiske og didaktiske overvejelser om undervisningens form og indhold
- at IT indgår som et integreret element i bedømmelse og vurdering af elevernes udbytte.

Fire didaktisk forskellige anvendelser af IT

1. Den elektroniske tavle

Fremstilling og visualisering, fælles faglige oplevelser, medium til fastholdes af fælles faglig læring

2. IT som redskab i elevernes arbejdet med matematik

- Fokus på resultaterne
- Fokus på brugen af programmet
- Fokus på læring af matematiske begreber

3. IT som redskab for elevernes arbejde med problemløsning eller matematisk modellering

4. Undervisningsprogrammer

(Jeg ser kun på brug af ”matematik IT” – ikke IKT)

2. Typer af elevvirksomhed i en IT-baseret undervisning

Om forsøget *Den elektroniske skole*

- Hver elev sin personlige bærbar computer.
- Storskærm til klasseundervisning.
- Eleverne blev introduceret til tre avancerede programmer:
 - (1) Geometers SketchPad (dynamisk geometri)
 - (2) MathCad (integreret CAS program)
 - (3) QuattroPro (regneark).
- Reduceret pensum (kun mindre udeladelser).
- Computeren til rådighed under den skriftlige eksamen med hjælpemidler.

(Blomhøj,2001)

Tre typer af elevvirksomhed

Resultater fra en kvalitativ interviewundersøgelse af elevernes IT-baserede opgaveløsning.

Elevernes virksomhed kan karakteriseres med tre typer:

- 1. En usikker og defensiv virksomhed**
- 2. En løsningsorienteret virksomhed**
- 3. En reflekterende virksomhed**

Tilsvarende i (Guin & Trouche, 2002) og (Mehanovic, 2010)

Den usikre og defensive virksomhed er karakteriseret ved, at eleverne

- har et fremmedgjort forhold til egne besvarelser
- søger efter formler i bogen og tidligere opgaver
- gør forståelse til et spørgsmål om hukommelse og opfatter viden om programmerne og viden om matematik som værende af samme type
- er ufølsom overfor output fra programmerne, bruger programmerne meget ensidigt og er afhængig af computeren i deres opgaveløsning
- har en negativ holdning til brug af IT i matematik
- forklarer læringsvanskeligheder i matematik med deres dårlige forhold til brugen af IT.

Selvforstærkende negativ effekt på elevernes læring.

Den løsningsorienterede virksomhed er karakteriseret ved, at eleverne

- bruger programmerne effektivt til besvarelse af de enkelte spørgsmål i opgaverne
- forklarer deres fremgangsmåde ved at referere til hvordan de har brugt programmerne
- er ukritisk overfor valg af metode
- ikke opfatter brugen af IT som en integreret del af matematikundervisningen
- generelt har en positiv holdning til IT og matematik

Det kræver målrettet udfordringer fra læreren at overskride den løsningsorienterede virksomhed.

Den reflekterende virksomhed er karakteriseres ved, at eleverne

- tegner og regner på papir før eller samtidig med de bruger programmerne
- bruger ofte flere forskellige metoder og programmer, og har en undersøgende og eksperimenterende tilgang
- er meget fleksible i deres anvendelse af programmerne, og følsomme over for output fra programmerne,
- oplever brugen af IT som en integreret del af deres læreproces i matematik
- har en meget positiv holdning til matematik og til at bruge IT i matematik.

Selvforstærkende positiv effekt på elevernes læring.

[Eksempler](#)
[Areal4](#)

3. IT støtte til elevernes begrebsdannelse

Avancerede matematikprogrammer kan

- støtte eleverne til at opbygge og undersøge forskellige repræsentationer af matematiske objekter
- danne grundlag for en eksperimenterende og undersøgende arbejdsform ved introduktion af nye begreber og metoder
- støtte elevernes arbejde med problemløsning og modellering
- ændre på grundlaget for dialogen mellem eleverne og mellem elev og lærer.

Begrebsdannelsens personlige karakter

- begrebsdefinition over for begrebsforestillinger

We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes ... As the concept image develops it need not be coherent at all times ... We will refer to the portion of the concept image which is activated at a particular time as the evoked concept image. At different times, seemingly conflicting images may be evoked. Only when conflicting aspects are evoked simultaneously need there be any actual sense of conflict or confusion.

(Tall & Vinner, 1981, p. 152)

Diskrepans mellem:

- Formelle definition af et matematisk begreb som studerende undervises i **Og**
- De mentale billeder og forestillinger som studerende danner sig gennem deres arbejde

Begrebsforestillinger:

- Den totale kognitive struktur associeret med et begreb dannes gennem konkrete erfaringer med begrebet.
- Begrebsforståelsen er derfor begrænset af den enkeltes erfaringer med begrebet.

Oplevede konflikter:

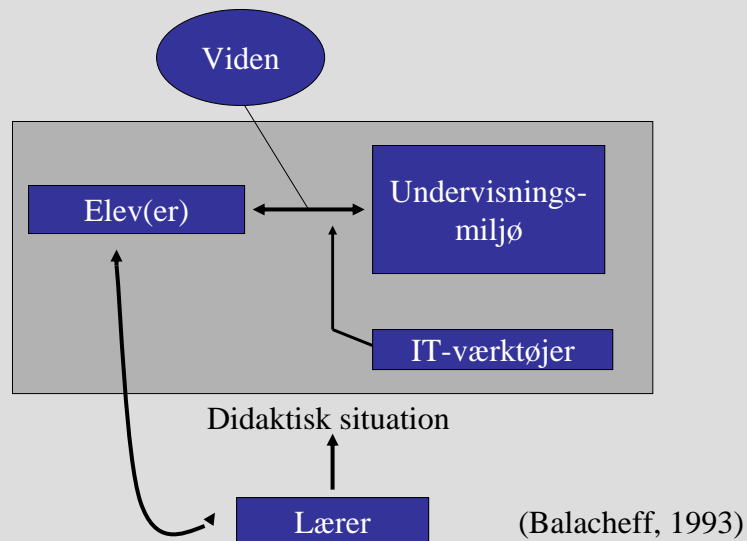
- Uklare og selvmodsigende begrebsforestillinger opleves ofte kun som sådan, hvis de aktiveres samtidig i en konkret situation.

1. hovedsætning i matematikkens didaktik

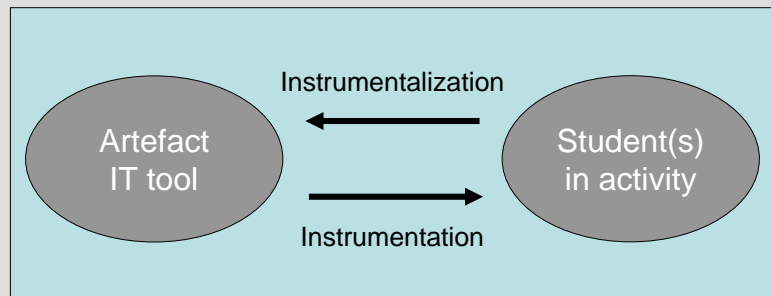
For den enkelte elev/studerende får et matematisk begreb ikke større anvendelsesdomæne eller flere relationer til andre begreber end det domæne og de relationer, der udspændes af den pågældendes personlige erfaringer med begrebet.

Og det gælder uanset hvilke formelle begrebsdefinitioner eleven/studenten undervises i. (Niss, 1999)

Brug af IT former undervisningsmiljøet



Instrumental genesis



Instrumental genesis is an ongoing, non-trivial and time-consuming evolution. A bilateral relationship between the artifact and the user is established: while the student's knowledge guides the way the tool is used and in a sense shapes the tool (this is called instrumentalization), the affordances and constraints of the tool influence the student's problem solving strategies and the corresponding emergent conceptions (this is called instrumentation).

(Drijvers et al., 2007)

The dual nature of instrumentation and instrumentalization within instrumental genesis comes down to the student's thinking being shaped by the artifact, but also shaping the artifact (Hoyles & Noss, 2003).

“Does the f function defined by $f(x) = \ln x + \sin x$ accept as a limit $+\infty$ in $+\infty$?” strongly depends on the environment (whereas elementary theorems allow to answer yes to the question).

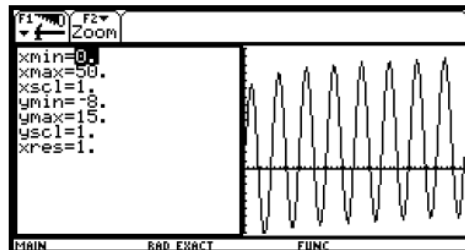


Figure 1: A representation of the function $x \mapsto \ln x + 10 \sin x$.

If students have a graphic calculator, 25% of them answer no, due to the oscillation of the observed graphic representation (Figure 1); within a group of same level students deprived of a graphic calculator, only 5% of wrong answers are collected. The very *economy* of the

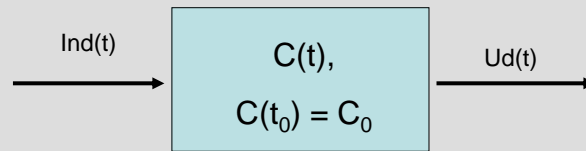
(Guin & Trouche 1999)

(Gen)indførelse af integralbegrebet på BASE-kurset.

- Uendelig sum med en geometrisk fortolkning som areal
- Undersummer og oversummer
- Det bestemte integral som samlet ændring over et interval
- Viser: Det bestemte integral, $F(t)$, af en kont. funktion $f(t)$ er differentiabel med $F'(t) = f(t)$.
- Viser: F vilkårlig stamfunktion til f så er:

$$F(T) = \int_{t_0}^T f(t) dt + C$$

Kompartiment modellering udfordrer de studerendes forestillinger om integralbegrebet



$C(t)$ angiver kvantum (niveauet i kompartmentet) af "stof" til tiden t . $Ind(t)$ og $ud(t)$ angiver strømmen af "stof" ind og ud af kompartmentet til tiden t .

$$C'(t) = Ind(t) - Ud(t), C(t_0) = C_0$$

$$C(t_1) = C_0 + \int_{t_0}^{t_1} Ind(t) - Ud(t) dt$$

Forståelsesproblemer ved integralbegrebet

Begrebsforestillinger:

- "Rigtig" integration:
Find stamfunktion, indsæt endepunkter.
- Indskrænket til denne operation og "areal under graf".

Konsekvenser:

- Kun analytisk givne funktioner kan integreres.
- Man kan kun integrere, hvis man kan finde en stamfunktion og det kan "man" altid hvis man kender en forskrift for funktionen.
- Det giver ikke umiddelbart anledning til konflikt.

Årsag:

- De studerendes billede af funktionsbegrebet omfatter ikke grafer som funktioner.

Problemet med C – den vilkårlige konstant:

- Hvornår skal den med, hvornår skal den ikke med?
- Indgår tilsyneladende ikke i formlen

$$\int_{T_0}^T f(t) dt = [F(t)]_{T_0}^T = F(T) - F(T_0)$$

- Men $f' = g$ betyder $f = g + C$, så her skal den med.

Forståelsesproblem:

- Ufuldstændig forståelse af stamfunktionsbegrebet
- Hvad betyder det om to funktioner, at de har samme tangenthældning i et hvert punkt af definitionsmængden?
- Giver anledning til mystiske forekomster af konstanter.

Udfordringer af de studerendes begrebsforestillinger:

- Understøtte deres skrøbelige forståelse af integralet som en sum af en variabel størrelse.
- Integrere numerisk – i hånden og i MatLab.

I hånden: v-t grafer

- Areal fortolkning giver fysisk mening som strækning.
- Tæller tern: Strider grundlæggende mod deres opfattelse af ”rigtig” matematik (Einstein)
- Fordel: Understøtter sum-opfattelsen af integralbegrebet
- Ulempe: Hvis de ikke ser andre eksempler kan arealfortolkningen blive altdominerende

Modelleringsprojekt: CO₂ -indholdet i en sø.

Modelleringsproblemstillinger kan tilrettelægges så de studerende får mulighed for at

- aktivere begrebsdefinitionen
- udvide deres begrebsforestillinger
- selv at bruge centrale betydninger af begrebet

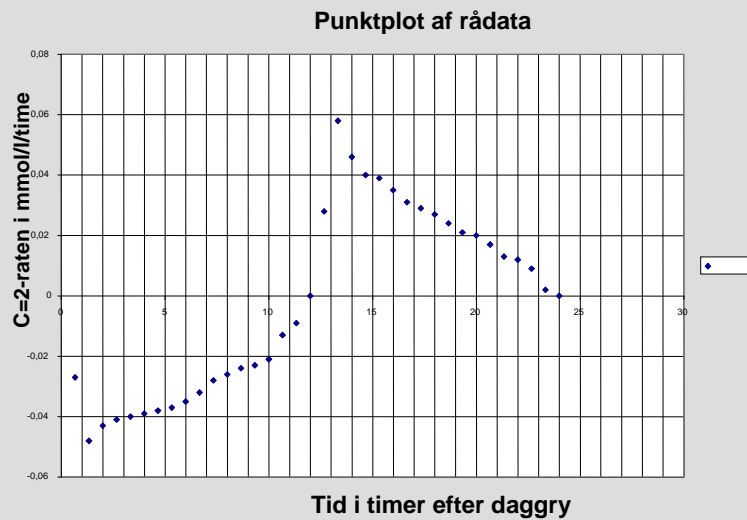
Analyse af CO₂ – balancen i søvand:

- Planter forbruger CO₂ om dagen og producerer om natten.
- Strømmen ind og ud af CO₂-komp. er udtryk for biologisk aktivitet.
- Det biologisk interessante er hvordan raten (millimol CO₂ per liter vand per time) ændrer sig over et døgn
- Data: sammenhørende målinger af tid og CO₂ raten mmol/l/time.

Iscenesættelse: Indledning, data, hjælpespørgsmål

Tid (Timer efter daggry)	CO ₂ -raten (mmol/l/time)	Tid (Timer efter daggry)	CO ₂ -raten (mmol/l/time)
0,666	-0,027	12,666	0,028
1,333	-0,048	13,333	0,058
2,000	-0,043	14,000	0,046
2,666	-0,041	14,666	0,040
3,333	-0,040	15,333	0,039
4,000	-0,039	16,000	0,035
4,666	-0,038	16,666	0,031
5,333	-0,037	17,333	0,029
6,000	-0,035	18,000	0,027
6,666	-0,032	18,666	0,024
7,333	-0,028	19,333	0,021
8,000	-0,026	20,000	0,020
8,666	-0,024	20,666	0,017
9,333	-0,023	21,333	0,013
10,000	-0,021	22,000	0,012
10,666	-0,013	22,666	0,009
11,333	-0,009	23,333	0,002
12,000	0,000	24,000	0,000

Punktplot af rådata



Skift til stamfunktionsopfattelse

Anden del af projektet: skift i betragtningstype

- Skift fra CO₂-raten som afledede til CO₂-indholdet til CO₂-indholdet som stamfunktion til CO₂-raten.

Stimuleres gennem spørgsmålene:

- Opstil et kompartmentdiagram, der beskriver mængden af CO₂-indholdet i søen.
- Hvornår er CO₂-indholdet i vandet mindst og hvor stort er det?
- Hvor meget CO₂ blev der frigjort til vandet i løbet af de 12 nattetimer, og hvor meget blev der fjernet i de 12 dagstimer?
- Er søen i ligevægt mht. CO₂-mængden, hvordan kan det afgøres grafisk?

Skift til stamfunktionsopfattelse

- De skal skifte synsvinkel og betragte deres punktploget som en funktion hvis stamfunktion de ønsker at vide noget om.
- For mange studerende er der stor forskel på de to synsvinkler.
- Udfordring: få de studerende til at etablere forbindelser mellem deres begrebsbilleder for afledede funktion og for stamfunktion.
- Num. integration - ”tællen tern”: opleves som nyttigt redskab, der kan svare på relevante og vedkommende spørgsmål.

[Plot af rådata](#)

Skift til stamfunktion som akkumuleret rate.

Sidste del af projektet: Estimer CO_2 -indholdet hvert 20. min.

- Konflikt med begrebsforestillinger eller stort tomrum.
- Ved at de skal integrere funktionen afbildet i punktploget.
- Forvirringen bunder i deres begrebsforestillinger

Pædagogisk-didaktisk observation:

L: Hvad bliver I bedt om at finde?

S: CO_2 -indholdet i søen

L: Ja, hvordan kan I bestemme den?

S: Vi kender raten....

S: Det vil sige vi kender f' ...

S: Men er det så f vi skal finde? (alle kigger på læreren)

L: Det ved jeg ikke. Det er CO_2 -indholdet I skal finde.

S: Vi kender hastigheden så det er f vi skal finde.

S: Vi skal altså integrere

L: Ja, hvad er det I skal integrere?

S: Vores funktion

L: Ja, hvilken funktion?

S: Den her (peger på punktplottet af rådata)

L: Ja, det er rigtigt.

Læreren går.

Et stykke tid efter blive læreren tilkaldt igen

L: Hvordan går det? Har I fået integreret jeres funktion?

S: Nej

L: Hvorfor ikke

S: Vi har jo ikke nogen funktionsforskrift

L: OK – men er der ikke andre måder man kan integrere på?

S: Jo numerisk, og det har vi også gjort men så får vi $-0,025$, og det kan jo ikke passe, der kan jo ikke være negativ mængde CO_2 i søen.

L: Hvordan er I kommet frem til det tal?

S: Vi har integreret funktionen ved at tælle tern. Det der er under x-aksen er negativt.

L: Lad os prøve at holde fast i hvad det er I skal finde.

S: Vi skal finde integralet...

L: Ja men hvorfor er det at I gerne vil integrere?

S: ...????....

L: Hvad står der i opgaven?

S: Nåh – ja. Vi skal finde CO₂-indholdet

L: Ja, hvornår?

S: ...???...Hvad mener du?

L: Er det ved midnat ... eller ... ?

S: Ja ... nej ... det er ved dagry.

L: Hvor står det?

S: Øh..... det står der ikke noget om

L: Nej, hvad er det der står?

Der læses i opgaven og ved fælles hjælp kommer man frem til at det er hvert 20. minut.

S: Men så skal vi jo finde mange tal!

L: Ja.

S: Men integralet er jo bare et tal ... ikke? Hvordan kan det så blive en hel funktion?

L: Hvordan finder man CO₂-indholdet til tiden 0,666?

S: Man integrere

L: Ja, hvad integrere man?

S: Funktionen – raten

L: Ja, hvorfra og hvortil?

S: Nåååh – fra 0 til 0,666

L: Ja.

Læreren går igen – og kaldes ind igen efter et stykke tid.

- S: Vi kan stadig ikke finde ud af det. Skal vi tælle tern over det hele?
- L: Hvad mener I med ”over det hele”?
- S: Nu har vi gjort det for det første datapunkt fra 0 til 0,666. Og så har vi gjort for det andet datapunkt fra 0,666 til 1,333. Er det så CO₂-indholdet til tiden 1,333?
- L: Det er et godt spørgsmål.
- S: Det bliver jo et kæmpe regnestykke....
- L: Ja, men I har jo tabellagt den funktion I skal integrere, så I kan måske bruge et af jeres MatLab-programmer.
- S: Nåh ja, til numerisk integration.
- L: Ja, I kan jo også overveje hvad I vil gøre med de 20 minutter.
- S: De 20 minutter?

- I projektet kan at de studerende via deres IT baserede modellering få yderligere mening med centrale begreber som afledede funktion, stamfunktion, det bestemte og ubestemte integral og knytte disse begreber til den konkrete problemsituation.
- Den vilkårlige konstant C bliver afmystificeret.
- Mængder af tilført hhv. fjernet CO₂ i søen findes ved arealbetragtninger, og her spiller konstanten ingen rolle.
- Kendskab til mængden af CO₂ til et givet tidspunkt afgør det faktiske niveau, begyndelsestilstand.
- Det er i kraft af modelleringskonteksten at dette bliver klart. Det negative CO₂-indhold gør, at de studerende oplever begrænsningen i deres begrebsforestilling.
- Og det var i kraft af konteksten at resultatet af integrationen blev meningsfuld for de studerende.

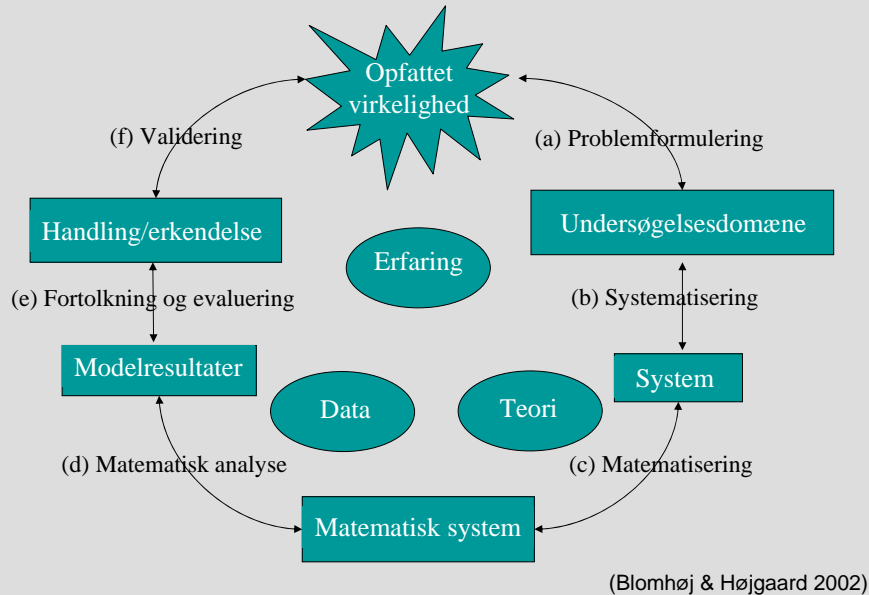
Inspireret af Tall's Procepts. (Tall, 1996)

	Proces	Model	Numerisk	Symbolsk	Grafisk
Vækst-rate	Frem	Hastighed fra afstand-tid relation	Numerisk gradient	$f'(x_0)$ i et punkt Symbolsk differentiation	Tangenthældningen i et grafpunkt, stejlhed
	Tilbage	Position / tilstand fra hastighed	Numerisk løsning af differential-ligninger	$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^t c'(x) dx$	Hældningsfelt
Kumuleret vækst	Frem	Afstand / tilstand fra kendt sammenhæng for hastighed / vækst	Numerisk beregning af areal, summering af variabel størrelse	$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$	Areal under graf
	Tilbage	Hastighed / vækstrate fra position / tilstand	Numerisk af vækstrate	$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$	Tangenthældningsgraf fra grafen for en arealfunktion

4 IT som redskab til matematisk modellering

- Problemløsning og modellering af dynamiske geometriske fænomener. [Fodbold](#)
- Modellering af stokastiske fænomener ved hjælp af simulering.
- Deskriptiv modellering ved lineær regression og transformationer af data.
- Modellering af dynamiske systemer med differenslignings- eller differentialligningsmodeller.

Model af en matematisk modelleringsproces



Matematisk modelleringskompetence omfatter at kunne

- formulere spørgsmål, der kan belyses ved hjælp af en matematisk model
- anvende faglig viden til at strukturere og simplificere systemer
- anvende matematik og IT til at opstille og analysere modeller
- vurdere og kritisere egne og andres brug af modeller
- reflektere over og kritisere en samlet modelleringsproces
- kommunikere om opstilling, analyse, anvendelse og kritik af en matematisk model, bl.a. ved hjælp af IT.

Salmonella inficerede æg – et risiko fænomen



Det faglige sigte med forløbet på 8.-9. kl.:

- Risikovurdering
- Risiko ved gentagne hændelser
- Stikprøver som fænomen, konkrete undersøgelser og beregninger af hyppighed
- Simulering af stikprøveudtagning i regneark
- Troværdighed af stikprøveundersøgelser
- Ansvarlighed i kommunikation om risici
- Model for risiko af en hændelse: $s(h) \cdot k(h)$

Ansvarlighed - ved deklaration af æg

Lav en deklaration til denne sending æg som I kan stå indenfor.

Elev 1 ..jeg synes ikke vi skal tage nogen stikprøver.

Elev 2 Nej .. vi skal hellere spare pengene.

Elev 3 Vil I ..vil I så bare sælge æggene?

Elev 1 ...Ja ..vi kan alligevel ikke være sikre. Så skal vi bare sælge en hel masse billige æg.

Elev 2 ...og blive rigtig rige.

Elev 3 ..Hvor er du bare led...helt ærligt, tænk hvis der er nogen der får salmonella!

Elev 4 Man kan da godt være ..lidt sikker...

Elev 2 Ok, så ta´r vi to stikprøver ..det bli´r ...tyve.

Elev 1 Nej...æggene koster jo osse 50 øre.

Elev 3 Vil I så skrive, de er testede.

Elev 4 Så skal JEG i hvert fald ikke købe nogen ..

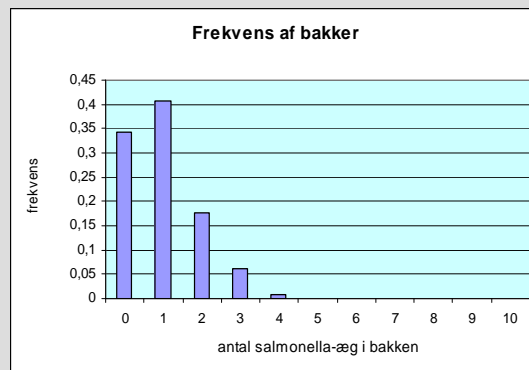
Elev 2 Ja.. så skri ..så skriver vi bare, de er salmonellatestede.

Elev 3 Gud ja ..gad vide om der er nogen der gør det.

Elev 1 Tror I ikke, det er ulovligt?

Simuleringsresultater for 1000 bakker

	Antal bakker med salmonella-æg										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
hyppighed:	343	403	180	64	9	1	0	0	0	0	0
frekvens:	0,34	0,4	0,18	0,06	0,01	0	0	0	0	0	0



Spørgsmål fra eleverne under forløbet

Hvad er sandsynligheden for en bakke uden salmonella?

$$P(0 \text{ blå}) = (1 - 0.1)^{10} = 0.3487$$

$$P(\text{mindst 1 blå}) = 1 - 0.3487 = 0.6513$$

$$P(\text{netop 2 blå}) = k(10,2) 0.1^2 (1-0.1)^8 = 0.1937$$

Betyder det, at over en tredjedel af prøverne er fri for salmonella, selv om der er 10% af æggene, der er inficeret?

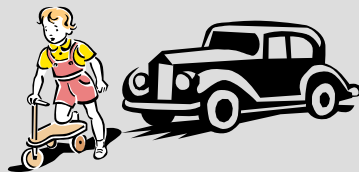
Hvor mange stikprøver skal der egentlig til?

Men i virkeligheden bliver de undersøgte æg da ikke lagt tilbage, er der nogen der indvender!

10=44 – du rammer hårdere end du tror!

En bil der kører 50 km/t overhales af en bil, der kører 60 km/t. Da bilerne er lige ud for hinanden løber en pige ud på vejen. Bilen der kører 50 km/t kan netop nå at standse inden den rammer pigen. Men den anden rammer hende med 44 km/t. 9 ud af 10 bliver dræbt ved en sådan påkørsel.

Passer kampagnens påstand?



(Blomhøj, 2003)

Modellering ved hjælp af differensligninger og regneark

Uddrag fra en rapport fra et forløb i læreruddannelsen:

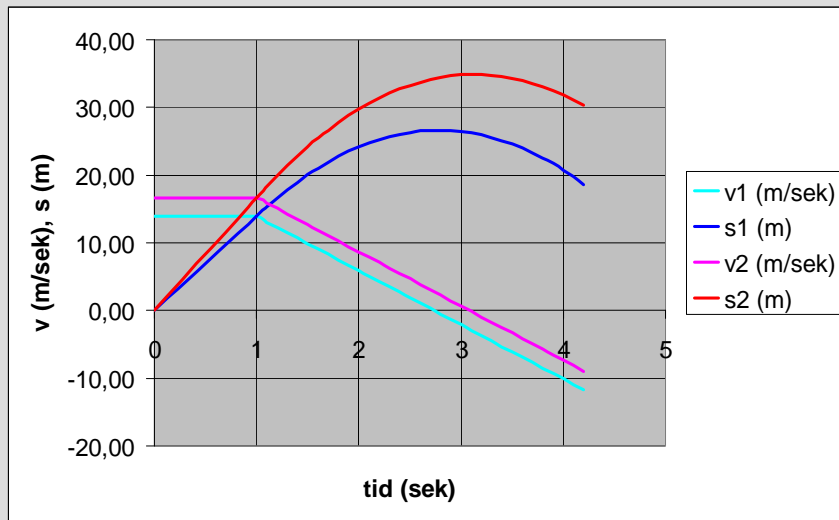
Hvis vi regner i 'små' tidsskridt, Δt , kan vi (under opbremsningen) regne som om hastighederne (farten) er konstant for hver bil:

$$v(t+\Delta t) = v(t) - b \Delta t$$

$$s(t+ \Delta t) = s(t) + v(t) \Delta t$$

hvor $v(t)$ [m/sek] og $s(t)$ [m] er bilens fart og position til tiden t , og hvor b [m/sek²] er bremseevnen.

Ud fra disse formler har vi lavet et regneark i excel: [10=44](#)



Dialog om fortolkning af resultaterne (9. klasse)

L: Hvor er pigen?

E1: Der! [Peger på skæringen mellem 1. akse og hastighedsgraf for bil 1.]

L: I 2,7 sekunder.?

E2: Nej, hun står her! [Peger på toppunktet af stedgraf for bil 1.]

L: Hvor?, hvor mange meter fra det sted, hvor førerne først så pigen?

E2: 26 meters. [Peger på 2. akse.]

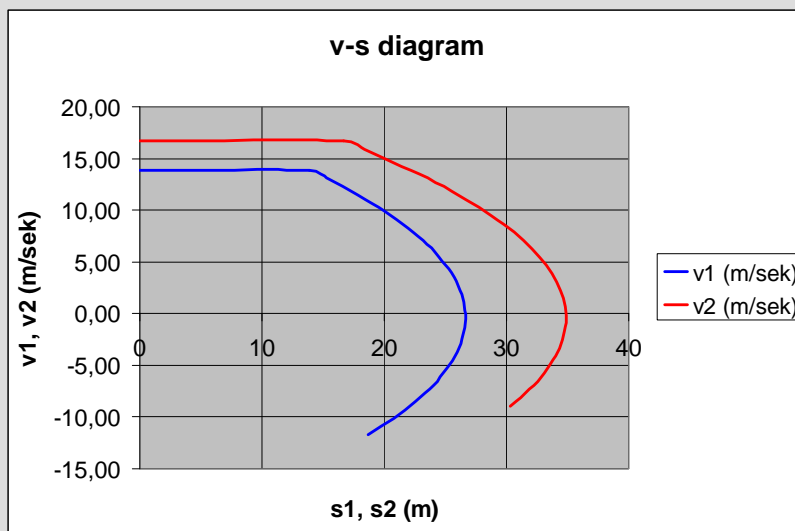
L: Så hvad med bil 2? [Læreren går.]

.....

L: Hvad fandt I ud af?

E1: Bil 2 har passeret det sted, hvor pigen stod, før bil 1 når at stoppe. Pigen er død, inden bil 1 stopper. [Elevne griner.]

E2: Bil 2 rammer pigen med 11 m/sek.
 E1: Det svarer kun til 40 km/time.
 L: I kan jo prøve at ændre på reaktionstiden.
 L: Hvad sker der i øvrigt efter, at pigen er død, ifølge modellen?
 E1:bil 2 stopper efter 3 sek.
 L: Hvor langt har den da kørt?
 E1: Ca. 35 meter.
 L: Og hvad sker der så derefter?
 E2:den begynder at bakke.
 E1: Så bliver pigen kørt over igen! (Eleverne griner.)
 L: Hvad er det der gør, at modellen ikke svarer til virkeligheden her?



Modellens resultater

Med en reaktionstid på 1 sek. og en bremseevne på 8 m/sek^2 rammer bil 2 pigen med 40 km/time. Med disse parametre passer kampagnens påstand altså ikke.

Vi har eksperimenteret med modellen og fundet ud af, at den hastighed som bil nr. 2 rammer pigen med vokser, når vi sætter reaktionstiden op og når vi sætter bremseevnen op. Men når vi ændrer på disse størrelser betyder det også, at pigen står et andet sted. Det er selvfølgelig bedst at have gode bremses.

Rådet for større færdselssikkerhed har brugt en reaktionstid på 1.5 sek. og en bremseevne på 8 m/sek^2 . Med disse værdier rammer bilen, der kørte 60 km/time pigen med en hastighed på 43 km/time.

En reaktionstid på 1.5 sek. er nok lige i overkanten for bilister, der ikke er påvirket af spiritus eller andet. En bremseevne på 8 m/sek^2 er til gengæld nok en rimelig antagelse.

Om modellen i øvrigt passer på virkeligheden afhænger bl.a. af om vejen er glat og om det går opad bakke eller nedad bakke.

Refleksioner over forløbet i læreruddannelsen

Opgaven var i øvrigt ikke så ligetil, som man kunne forvente. Man måtte danne sig et væsentligt overblik over, hvordan tid, hastighed og vejlængde var indbyrdes afhængige under opbremsning. Og hvad med reaktionstiden?

For det første er det meget motiverende at arbejde med et problem, man se meningen med og som er virkeligt. For det andet er en forståelse af problemet og en idé om, hvad det er modellen skal kunne bruges til af stor betydning under arbejdet med opbygning og analyse af modellen.

Det viste sig faktisk, at vi havde været omkring samtlige trin i modelleringsprocessen. Det var jeg faktisk overrasket over at se – jeg havde ikke gennemtænkt det på forhånd.

Det var meget spændende selv at opstille en model, der kunne bruges til at regne efter om påstanden i kampagnen var rigtig.

Vi lærte noget om trinvis beskrivelse af hastighed og bevægelse og noget om at bruge regneark.

Det vigtigst for mig var, at det var en virkelig problemstilling, og at vi selv kunne undersøge den ved hjælp af en matematisk model. Sådan vil jeg gerne kunne arbejde i min egne undervisning.

Regnearkets betydning for modelleringsarbejdet

Det var svært i starten. Jeg skulle først vænne mig til, at Excel gør det, jeg skriver, det skal gøre, og ikke det, jeg tænker jeg vil have det til at gøre.

Man kan ikke se formlerne samtidig med tallene, og regnearks-notationen gør det vanskeligt at læse formlerne. Det er ikke til at se, hvad man har tænkt.

Det er muligheden for dynamisk at ændre på konstanterne og med det samme at kunne se resultatet, der giver modellen liv, og gør det spændende at arbejde med modellering og regneark.

I starten kunne vi ikke finde ud af, hvordan vores regneark skulle virke. Vi var i tvivl om, hvad vi skulle regne ud og hvilke værdier vi skulle kunne ændre på i vores model. Da vi først fandt ud af, at reaktionstiden og bremseevnen skulle være konstanter, som man skulle kunne ændre på – det vil sige de skulle være mærket med \$-tegn i formlerne – gik det meget bedre. [D43](#)

Fra en rapport fra modellingskursus ved nat-bas, RUC

Under opbremsningen:

$$v(t) = v_0 - bt \quad \text{og} \quad s(t) = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2$$

Bil 1 | $v_{10} \cdot t_r$ | $v(t) = 0 \Rightarrow s_1 = v_{10}^2 / 2b$ | Her står pigen | s_1 | s (m)

Bil 2 | $v_{20} \cdot t_r$ | $(v_{20} - v_{10}) \cdot t_r$ | s_2

Afstand som bil 2 kan bremse på: $s_2 = \frac{v_{10}^2}{2b} - (v_{20} - v_{10}) \cdot t_r$

Løsning af ligningen for s_2 giver kun én brugbar t-værdi:

$$t = \frac{-v_{20} + \sqrt{v_{20}^2 - 2bs_2(t)}}{-b} \quad \text{Indsat i } v_2(t) \text{ får vi:}$$

$$v_2(s_2)^2 = v_{20}^2 - 2bs_2 \quad \text{Heri indsættes bremseafstanden for bil 2, og vi får } v_{2hit}:$$

$$v_{2hit}^2 = v_{20}^2 - v_{10}^2 + 2bt_r(v_{20} - v_{10}) \quad \Rightarrow$$

$$bt_r = \frac{v_{2hit}^2 - v_{20}^2 + v_{10}^2}{2(v_{20} - v_{10})} \quad \text{Indsættes begyndeshastighederne: 13,89 m/s, 16,67 m/s og } v_{2hit} = 12,22 \text{ m/s fås:}$$

$$bt_r = 11,61 \text{ m/s}$$

$$t_r = 0 \Rightarrow v_{2hit} = 9,22 \text{ m/s}$$

Refleksioner over modellens resultater

Ifølge vores model er kampagnens påstand kun rigtig, hvis

$$b t_r = 11,61 \text{ m/s}$$

Hvis man regner med tyngdeaccelerationen, $g = 9,82 \text{ m/s}^2$, som den maksimale bremseeffekt får vi en mindste reaktionstid på $t_r = 1,17 \text{ s}$.

Det er lidt langsomt for chauffører, der ikke er påvirket af alkohol eller andre stoffer. Vores konklusion er derfor, at selv under forudsætning af, at vores model er rimelig, er "10=44" kampagnen lettere overdrevet.

...med de realistiske parametre, $t_r = 1 \text{ s}$ og $b = 8 \text{ m/s}^2$, skal en bil med 60 km/t bruge 34 meter til at stoppe, mens en bil med 50 km/t kun skal bruge 24 meter. Så grænsen på 50 km/t i byer giver god mening.

IT-baserede modelleringsprojekter fra et kursus problemorienteret projektarbejde

Systematik i solsystemet

Udvikling i befolkningssammensætning -
Befolkningspyramider

YOUNG MOBILE A/S - Det optimale mobilabonnement

Befolkningstal og indvandring i Danmark [D18](#)

Investeringsteori

Trafikmodellering – over en bro og ved lyskryds

Eksempler på forløb udviklet på kurset

Nedbrydning og udskillelse af narkotika

Modelleringsprojekter i gymnasiet

Design og placering af et hus

Design af en vodka-klovn [D20](#)

Faldskærmsudspring [D21](#)

Medicindosering [D23](#)

Rapporterne findes på:

<http://magenta.ruc.dk/nsm/uddannelser/gymnasielaerer/>

Eller via www.ruc.dk

5. Didaktiske udfordringer ved integration af IT

IT-viden: Viden om IT-værktøjers faglige og didaktiske muligheder og begrænsninger.

Matematisk viden: Viden om hvilke aspekter af de matematiske begreber, der særligt kan understøttes ved brugen af et givet program og om de mulige faglige udfordringer som eleverne kan møde i arbejdet med programmet.

Didaktisk viden: Viden om tilrettelæggelse og gennemførelse af IT-baseret matematikundervisning. Læreren må kunne udvikle forestillinger om hvordan eleverne vil arbejde med et givet IT-baseret oplæg og om hvilke tekniske og faglige vanskeligheder eleverne kan forventes at møde, samt om hvordan man kan udfordre forskellige typer af IT-baserede elevvirksomhed.

Holdninger og opfattelser der kan fremme integration af IT i matematikundervisning

En mulig fagopfattelse:

Matematik handler om at opdage og beskrive *fænomener* ved hjælp af matematiske begreber og metoder samt at undersøge og forklare sådanne fænomener gennem ræsonnementer, beviser og modellering.

En mulig læringsopfattelse:

En læreproces i matematik indebærer, at den lærende ud fra egen viden og egne erfaringer og under indflydelse af den sociale sammenhæng konstruerer kognitive strukturer baseret på den lærendes matematiske aktiviteter. Derfor forudsætter læring i matematik, at den lærende er matematisk aktiv.

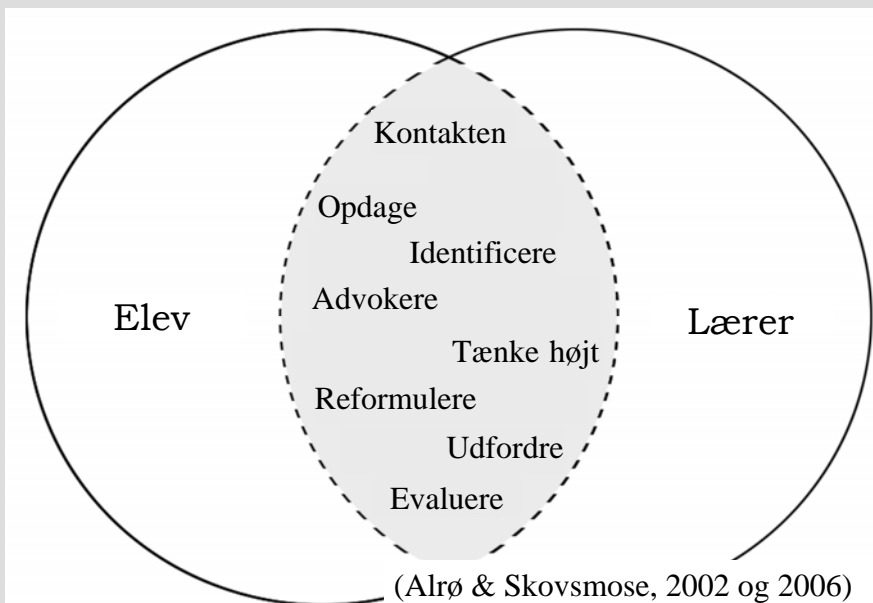
Opfattelse af og holdning til undervisning:

Matematikundervisningens hovedopgaver er at tilrettelægge og organisere situationer, hvor eleverne gennem deres aktiviteter og interaktive samspil med hinanden og med læreren kan konstruere relevant faglig viden. På grundlag heraf må undervisningen søge at støtte opbygningen af en fælles faglig viden i klassen.

Opfattelse af og holdning til IT:

Anvendt i matematikundervisning er avancerede IT-værktøjer stærke medier til udforskning af og kommunikation om matematiske sammenhænge. Brugen af IT bevirker let en transformation af det faglige indhold i undervisningen, og må derfor overvejes nøje i forhold til undervisningens intentioner. Kompetence til at anvende sådanne IT-værktøjer har selvstændig værdi.

En model for dialogiske læreprocesser



Integration af IT i matematikundervisning gennem samspil mellem praksis og forskning



Tak for opmærksomheden

L: Fortæl mig hvor langt i er kommet. Kan I tegne en figur der illustrerer problemet.

E: Vi kan ikke overskue det.

L: Så tegner vi. Vi må lade vandkanten være en ret linje. Den druknende befinder sig i en vis afstand fra linjen på den ene side. Livredderen befinder sig i en (sikkert) anden afstand på den modsatte side (denne figur fremkom lidt efter lidt).

E: Jeg er med! Livredderen kan så enten løbe vinkelret ned til vandkanten for det er den hurtigste vej, den er nemlig kortest.... Bagefter skal han (hun!) måske svømme langt, for det ikke sikkert at den druknende er lige ude i vandet, og så skal livredderen svømme på skråt. Den korteste svømmetur få livredderen ved at løbe over til det sted, hvor han kan svømme vinkelret ud

L: Hvad mener du så er hurtigst for livredderen, den korteste løbetur efterfulgt af den længste svømmetur, eller omvendt?

E: Det skal være det sidste for han løber hurtigere end han svømmer.

L: Hvis livredderen svømmede lige så hurtigt som han løb (selvom det ville være utænkeligt!), så ville det være hurtigst at følge en ret linje (stiplet linje tegnes)!

E: Jo, men han løber hurtigere end han svømmer, så i alle tilfælde må han løbe længst og svømme kortest. Han skal nok vælge den vej der giver ham størst mulig fordel både som løber og svømmer.. Han løber nok sådan her på skrå ned til vandkanten, bagefter tager han en anden skrå vej ud til den druknende.

L: Godt skal vi sætte bogstaver på linjestykkernes længder, eller skal vi foreslå nogle afstande f.eks. at livredderen er 50 meter fra vandkanten, den druknende befinder sig 25 meter ude og der er 100 meter mellem de to punkter som er vinkelret inde på vandkanten (hvis du forstår?).

E: Nej lad os bare sætte bogstaver på.

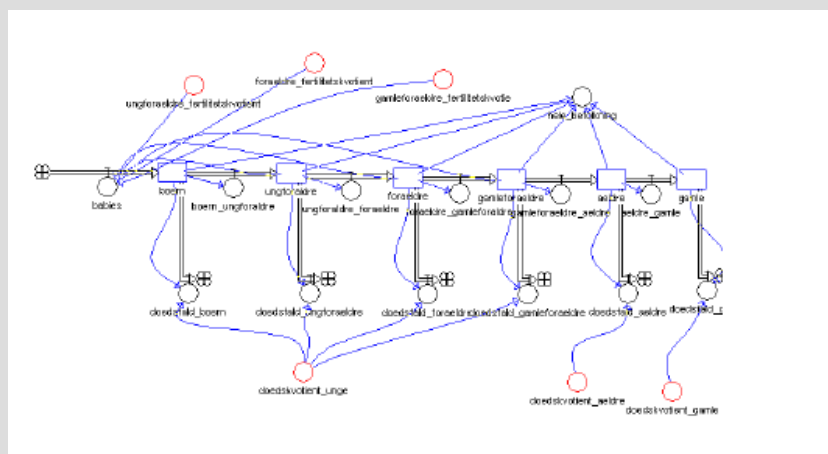
[D11](#)

"En undersøgelse foretaget af Rambøll Management for Jyllands-Posten kunne søndag den 23. maj 2004 afsløre, at en million danskere frygter, at muslimer i fremtiden vil komme til at udgøre et flertal af befolkningen i Danmark – hele 59 pct. af de adspurgte tror endda, at dette vil ske inden for de næste 30 år.

Det står ifølge undersøgelsen i skærende kontrast til prognoser fra Danmarks Statistik. Her forudser man nemlig, at andelen af indvandrere og efterkommere fra ikke-vestlige lande "kun" vil komme til at ligge på 10,9 pct. i 2050. Men med statistikker og prognoser er det som med en gammel lygtepæl – de er gode at læne sig op ad, men dårlige til at oplyse. Og der resultat, der spyttes ud af maskinen, afhænger meget af de data, der kommer ind i den. (...)"

Peter Skaarup, 25.05.2004

En befolkningsmodel i Dynasys



D14

Projekt Vodkakloven

- Et problemorienteret projektarbejde om modellering, optimering, differentialregning og rumlige figurer

Af: Dres Poulsen

En succeshistorie

Dette er en afrapportering af et forsøg med anvendelse af problemorienteret projektarbejde i en 2. g matematisk klasse i gymnasiet. Forsøget lykkedes over al forventning, og det er min opfattelse, at det problemorienterede projektarbejde kan få en central plads i matematikundervisningen fremover. Det problemorienterede projektarbejde (fremover PPA) har nogle helt klare forcer ifht. udviklingen af bestemte elevkompetencer, og det gennemførte projektforsøg har været eksemplarisk ifht. anvendelsen af den matematik, som eleverne lærer i gymnasiet. Flere elever berettede under evalueringen af projektet, at de var meget overraskede over, at de faktisk kunne bruge den matematik, som de havde lært i gymnasiet, til at løse et "rigtigt" problem. At PPA på denne måde kan være med til at motivere matematikundervisningen for eleverne (og måske undervisning i det hele taget), fremstår for mig som en meget vigtig erfaring, som jeg gerne vil bringe videre. Jeg håber derfor at følgende succeshistorie kan være en inspiration for andre undervisere.

[D15](#)

1. Projektets overordnede udviklingsigte

Vi har valgt at deltage i udviklingen og gennemførelsen af et konkret problemformuleret projekt i matematikundervisningen, fordi vi er tilmeldt standardforsøget i matematik, hvor en del af undervisningen netop tænkes gennemført som projekter, og fordi vi gerne vil teste et forløb, der vil kunne bruges i matematikundervisningen eller i tværfaglig sammenhæng efter reformen. Det vi især har ønsket at lære er at indkredse et godt matematisk problem, der udfordrer eleverne til på egen hånd at sætte sig ind i noget nyt stof – gerne noget, der tvinger dem væk fra almindelig opgaveregning og traditionelle lærebøger.

2. Intentionerne for elevernes udbytte af projektet

Ideen med projektet er at arbejde med en matematisk problemstilling der skal vise eleverne at matematik kan være både dynamisk og induktiv. Samtidigt skal eleverne trænes i opstilling, efterprøvning, justering og kritisk vurdering af en matematisk model, ligesom det er hensigten, at eleverne får udvidet deres grafkendskab og deres evne til at fortolke grafer samtidig med, at de får træning i brug af regneark. Sidst men ikke mindst skal eleverne have øget deres projektarbejdskompetence.

9. Konklusion

På trods af de problemer vi har beskrevet tidligere, var projektet en succes ikke mindst fordi alle elever var glade for at kunne arbejde selvstændigt med et problem uden facit under strukturerede former.

I de rette rammer og med et solidt forarbejde af lærerne er problemorienteret projektarbejde i matematik er et fremragende alternativ til den traditionelle matematikundervisning, uden i øvrigt at undervurdere sidstnævnte. Erfaringen fra dette forløb kan opsummeres i tre punkter:

1. Eleverne bliver engagerede deltagere i deres egen matematiske udvikling.
2. Matematik kan læres i fællesskab, gennem fælles aktivitet og fælles erfaringer.
3. Gruppearbejde får en ny meningsfuld betydning.

[D15](#)

Tid timer	Koncentration mg/L
0	10,0
2	7,0
4	5,0
6	3,5
8	2,5
10	1,9
12	1,3
14	0,9
16	0,6
18	0,5

Eleverne bliver bedt om at opstille en model for hele problemstillingen og aflevere en rapport skrevet til lægen, der tager fat på følgende spørgsmål:

1. Hvordan falder koncentrationen i blodet som tiden går.
2. Hvordan kan man planlægge en løbende medicinering med en fast dosis D og fast tidsinterval T , så koncentrationen efter et par injektioner ligger indenfor 5-15 mg/L?
3. Hvordan kan man planlægge en løbende medicinering med en startdosis og derefter en fast dosis D og fast tidsinterval T , så koncentrationen med det samme ligger indenfor 5-15 mg/L?
4. Hvad skal man overveje inden man bruger denne medicineringsplan på en anden patient

I samtlige grupper udspandt sig en dialog tæt på følgende:

E1: Vi kan se, at den falder hele tiden, men den falder mindre og mindre.

L: Hvaffor en?

E1: Øh ... det må være koncentrationen af medicin.

L: Ja. Er der noget system?

E2: Ja, den falder til det halve hver fjerde time.

L: Ja. Den falder altså ikke med en fast størrelse, men hvad er det så der er fast?

E1: Det er det den falder... altså det vi ganger med.

E3: Det må være procenten ...

L: Falder den også med en fast procent, hvis vi kun ser på spring på 2 timer?

E1: Den falder fra 10 til 7. Så der er altså 70% tilbage.

L: Ja og når vi skal finde 70%, hvad er det så vi ganger med for at finde det?

E1: Vi ganger med 0,7

L: Passer det at den fortsætter med at falde til 70%, når vi går videre?

E2: Hvis vi ganger 7 med 0,7 så får vi 4,9 og det passer ikke! Det skulle give 5.

E3: Det passer da fint. Det er jo næsten det samme! Det er bare afrundingsfejl.

L: Hvis den også falder med en fast procent hver time, hvor mange procent skulle det så være, når den falder med 30% på to timer.

E1: Det må være 15%

L: Prøv at se om det passer. Hvad skal man så gange med for at få koncentration en time efter?

aflæse koncentrationen ved 18 timer. Problemerne opstår, når de skal beregne hvad koncentrationen er efter 1 time. Efter nogen tid ses problemet og faktoren findes ved at prøve sig frem. I halvdelen af grupperne ser eleverne selv at det faktisk er en andengradsligning de skal løse og nogle kommer selv frem til at fremskrivningsfaktoren hørende til en time må være

$$\sqrt{\sqrt{0.5}} \text{ eller } \sqrt[4]{0.5}$$

Derefter gik eleverne i gang med at bruge EXCEL og her behøvede de ikke megen hjælp. De introducerende EXCEL-opgaver havde rustet dem tilstrækkeligt. Her fik de først problemer, når opgavetesten skulle skrives. De første udkast var oftest umulige at forstå (se dialog 2 under afsnit 5).

[D15](#)

[Medicindosering](#)

Referencer

- Alrø, H. and O. Skovsmose (2002). Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection, critique. Dordrecht: Kluwer.
- Artigue, M. (2005). The integration of symbolic calculators into secondary education: some lessons from didactical engineering. In Guin, D. et al. (eds), The Didactical Challenge of Symbolic Calculators, pp. 231-290. Mathematics Education Library, NY: Springer.
- Artigue, M. (1998). Teacher training as a key issue for the integration of computer technologies. Information and Communications Technologies in School Mathematics. J.D. Tinsley and D.C. Johnson (Eds.), 1998, pp. 121-129. Published by Chapman and Hall.
- Balacheff, N. (1993): Artificial intelligence and real teaching. I Keitel, C. & K.Ruthven (eds.), 1993, s. 131-158.
- Blomhøj, M. (1993): Modellerings betydning for tilegnelsen af matematiske begreber, *Nordisk matematikdidaktik* 1 (1), 18-38.
- Blomhøj, M. (2001): Villkor för lärande i en datorbaserad matematikundervisning – eleverna användning av avancerade matematikprogram. I B. Grevholm Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv, Studentlitteratur, Lund.
- Blomhøj, M. & T. Højgaard Jensen (2003): Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning, *Teaching Mathematics and its applications* 22 (3), pp. 123-139.

- Blomhøj, M. (2003): Modellering som undervisningsform. I: O. Skovsmose & M. Blomhøj, Kan det virkelig passe – Om matematiklæring, 51-72. København: L&R Uddannelse.
- Blomhøj, M. (2006). Konstruktion af episoder som forskningsmetode - udforskning af læringsmuligheder i IT-støttet matematikundervisning. I: O. Skovsmose og M. Blomhøj (red.), Kunne det tænkes? – om matematiklæring, København: Maling Beck.
- Blomhøj, M. & T. Hoff Kjeldsen (2006): Teaching mathematical modelling through project work - Experiences from an in-service course for upper secondary teachers. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38, 2, pp. 163-177. Brousseau, G. , (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, Kluwer.
- Blomhøj, M. (2008): ICME's Challenges and future. In Menghini, M., Furinghetti, F., Giacardi, L and Arzerello, F. (eds.), *The first century of the international commission on mathematical instruction*. Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana, 169-179.
- Christiansen, B. (1990): Gymnasiets matematikundervisning set i fagdidaktiske perspektiver. MI-tekst nr. 29. København: Matematisk Institut, DLH.
- Guin, D.; Trouche, L. (1999): The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. – In: *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 3, p. 195-227.
- Guin, D. and Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of instrumental orchestrations. *ZDM* 34 (5).

- Hillel, J. (1993): Computer algebra systems as cognitive technologies: Implication for the practice of mathematics education. I C. Keitel og K. Ruthven (red.), *Learning from computers: Mathematics education and technology*, s. 1-16. Berlin: Springer-Verlag.
- Hoyle, C., and Noss, R., 2003, What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education?, in: *Second international handbook of mathematics education*, Vol. 1, A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, and F. K. S. Leung, eds., Kluwer Academic, Dordrecht, pp. 323-349.
- Mehanovic, S. (2010): Working with Dynamic Geometry Systems Upper secondary students' work with the dynamic mathematical software GeoGebra, submitted.
- Noss, R. og C. Hoyle (1996): *Windows on mathematical meanings – learning cultures and computers*. Dordrecht: Kluwer.
- Niss, M. (1993): Centrale problemstillinger i matematikkens didaktik i 1990'erne. I Andersen, 15. Nordiske LMFK-kongres (11-47). Konferencerapport. Århus: LMFK.
- Niss, M., 1999: Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 40 (1), 1-24.
- Sfard, A., (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Tall, D., 1992: The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof. I *Handbook of research on mathematical teaching and learning*. D.A. Grows (ed.), NCTM, Macmillan Publ. co. USA.

Tall, D., 1996: Functions and Calculus. I *International handbook of mathematics education*, A.J. Bishop et al. (eds.), 289-325, Dordrecht, Kluwer.