Grafteori	Niveau 3	ELEV

Bevis for at Dijkstras algoritme holder, hvad den lover!

Sætning

Lad (G, w) være en vægtet graf, og lad $u \in V(G)$ være et hjørne i grafen. For hvert hjørne $z \in V(G)$ bestemmer Dijkstras algoritme afstanden fra u til z.

Erfaring har vist at omformningen nedenunder er en frugtbar vej til at vise sætningen om Dijkstras algoritme.

Omformning af sætningen

Lad (G, w) være en vægtet graf og lad $u \in V(G)$ være et hjørne i grafen. Med betegnelser fra beskrivelsen af Dijkstras algoritme gælder for hvert gennemløb af algoritmesløjfen

i) For $z \in S$ er $t(z) = \mathrm{d}(u, z)$
ii) For $z \notin S$ er $t(z) =$ længden af korteste sti fra u til z direkte fra S.
(Hvis z ikke er kantforbundet til S (altså ingen *direkte* sti fra S), betyder det, at $t(z) = +\infty$)

Vi må starte med at fastslå, at hvis vi har bevist 'Omformning …', så har vi også bevist 'Sætning', altså bevist at Dijkstras algoritme virker.

Beviset

Beviset for omformningen er et induktionsbevis efter $k = |S|$, hvor S er mængden af hjørner, hvis afstand til u algoritmen allerede har givet et bud på. Vi vil vise, at algoritmens bud er korrekt. Dette betyder, at vi i hvert induktionstrin må godtgøre: Hvis både i) og ii) gælder for S, så må i) og ii) også gælde, når algoritmen har tilføjet en hjørne.

Induktionens start, $k = 1$

Vi er i situationen $S = \{u\}$. Algoritmen har sat $t(u) = 0$, så $t(u) = \mathrm{d}(u, u)$ er oplagt, dvs. i) holder for $k = 1$. Da $t(z) = w(uz)$ for $z \neq u$, er ii) ligeledes opfyldt for $k = 1$. Afstanden direkte fra S er jo lig med kantlængden, når z er kantforbundet til u og ellers $+\infty$.

Induktionsskridtet

Antagelsen er, at vi har gennemført algoritmesløjfen k gange, og at i) og ii) gælder for den sidste gennemførelse af algoritmesløjfen. Hvis $k = |V(G)|$, er vi færdige. Der er ikke flere hjørner, og i) siger netop, at vi har bestemt afstanden fra u til ethvert af grafens hjørner.

Ellers vælger algoritmen jo et hjørne $v \notin S$, så $t(v)$ er mindst mulig. Vi sætter så $S' = S \cup \{v\}$. Induktionsantagelsen er, at i) og ii) gælder for S, og induktionsskridtet betyder, at vi skal vise, at i) og ii) også gælder for S'. Først viser vi i), dvs. vi skal vise at $t(v) = \mathrm{d}(u, v)$. Vi må bruge antagelsen at både i) og ii) gælder for S. Induktionsantagelsen ii) siger, at $t(v)$ er længden af den korteste sti til v direkte gennem S. Da $\mathrm{d}(u, v)$ er længden af den korteste sti overhovedet, må der gælde, at $t(v) \geq \mathrm{d}(u, v)$. Hvis vi kan vise den modsatte ulighed $t(v) \leq \mathrm{d}(u, v)$, har vi vist $t(v) = \mathrm{d}(u, v)$. Vi tager nu en korteste sti fra u til v. Per definition er længden af denne sti $\mathrm{d}(u, v)$. Endvidere gælder det, at for ethvert hjørne undervejs er denne sti også en korteste sti til det pågældende hjørne (Dijkstras idé). Stien starter i u og altså i S. Den ender i v, altså uden for S. Lad v' være stiens første hjørne uden for S. Algoritmen har valgt v så $t(v) \leq t(v')$. Den korteste vej overhovedet til v' er direkte gennem S. Det var netop sådan vi bestemte v'. Induktionsantagelsen siger hermed, at $t(v') = \mathrm{d}(u, v')$. Og der gælder, at $d(u, v') \leq d(u, v)$, fordi v' er et hjørne undervejs på den korteste sti fra u til v. Alt i alt,

$$t(v) \leq t(v') = d(u, v') \leq d(u, v)$$

som læst fra venstre til højre er den ulighed, vi var på jagt efter. Hermed er i) vist for S'.

Vi viser nu ii) for S'. Hvis $S' = V(G)$, er vi færdige. Ellers gælder for $z \notin S'$, at algoritmetrinnet opdaterer $t(z)$ til

$$t(z) = \min \begin{cases} \text{korteste afstand fra } u \text{ til } z \text{ direkte fra } S \\ w(vz) + t(v) \end{cases}$$

Den første mulighed er værdien af $t(z)$ før algoritmetrinnet, den anden er længden af den korteste sti til z via det nye punkt v, fordi vi viste under i), at $t(v) = \mathrm{d}(u, v)$ (Dijkstras idé igen). Alt i alt, muligheden for, at det nye punkt kan give en kortere sti, er netop, at opdateringen af $t(z)$ ovenfor giver den korteste afstand til z direkte fra S'.

Konklusion: Hvis i) og ii) gælder for S, så gælder i) og ii) også for $S' = S \cup \{v\}$, så vi ender med, at i) og ii) gælder for hele $V(G)$, og at altså Dijkstras algoritme faktisk finder de korteste stier fra u.