

Spilteori	Niveau 3	LÆRER
-----------	----------	-------

Spil og konkurrence – Eller fornøjelsen ved at finde en ligevægt

Introduktion

Forløbet handler om at analysere spilstrategier ud fra den udbyttestruktur (gevinster), som spillet har. Vi ser på simultane spil, hvor der bruges udbyttematrix og på sekventielle spil, hvor der bruges spilletræ. Forløbet ligger i forlængelse af niveau 2 i spilteori, hvor fangernes dilemma blev introduceret. De spilteoretiske begreber, der indgik heri, bliver genoptaget og konsolideret. Forløbet har som i niveau 2 fokus på spil, der ikke i traditionel forstand er spil – specielt konkurrence mellem få aktører på et (fiktivt) marked. Forløbet vil derfor bla. kunne indgå i et samarbejde med samfundsfag og erhvervsøkonomi, og det vil også kunne inspirere til SRP med matematik. Den undersøgende del af forløbet består i, at eleverne selv skal være med til analysere og diskutere konkurrenceformerne. Behandlingen er som i niveau 2 uformel.

Udfoldende spørgsmål

Hvordan kan udbyttestruktur bruges til at analysere strategier i konkurrencesituationer? Hvordan kan spilanalyse bruges som redskab til at tilrettelægge konkurrencesituationer – der udefra set giver bedst resultat (for samfundet, forbrugerne...), eller i det mindste undgår uheldige virkninger af konkurrence?

Forudsætninger

Erfaringer med at analysere situationer, der ikke i traditionel forstand - men i matematisk forstand - opfattes som spil fx svarende til niveau 2.

Tilsigtede læringsmål

At kunne identificere forskellige konkurrencesituationer med få aktører som spil og opstille udbyttemodeller. At kunne skelne mellem sekventielle spil og simultane spil. At kunne analysere udbyttematricer og opstille forskellige ligevægte. At kunne analysere udbytter i spilletræer og opstille forskellige ligevægte.

Bemærkning om spil som model: Som på niveau 2 gælder der her i niveau 3, at den spilteoretiske vinkel på konkurrence i høj grad er analytiske modeller – og ikke praktisk håndgribelige. Der ses ofte bort fra en række faktorer, som sagtens kunne være inddraget i en mere realistisk analyse af konkrete virksomheder. Netop derfor er det vigtigt at diskutere og forstå begrebernes indhold og rækkevidde og at invitere eleverne med i disse diskussioner.

Forslag til hjælpemidler

Papir & blyant. Kortspil

Andet materiale

Gerne muligheder for at søge oplysninger om konkrete markeder og virksomheder, der kan diskuteres som eksempel på de spil, der introduceres. (Facebook og Google og markedet for internet annoncer, Airbus og Boeing og markedet for passagerfly, Lagkagehuset, Emmerys og Holm – bagerkæder på Christianshavn osv.)

Fase 1

Eleverne repeterer lidt om matematiske spil:

- Hvem er **spillerne** (personer virksomheder lande osv.)?
- Hvilke **regler** eller **handlemuligheder** gælder for spillet (hvad må man, hvordan handler man under givne betingelser)?
- Hvilke **oplysninger/informationer** har de forskellige spillere/aktører om andre spilleres muligheder?
- Hvilke **strategier** er mulige i spillet (overblik over handlemuligheder i givne situationer i spillet)?
- Hvad er **gevinst/udbytte** i spillet ved forskellige udfald af spillet og ved de strategier, man har valgt?

Eleverne opfordres til at se på forskellige spil og bruge begreberne ovenfor (Opgave 1), fx

- ☐ Ludo
- ☐ Skak (hvis eleverne ikke kender skak-strategier, kan man google "chess strategy")
- ☐ Poker
- ☐ Brøndby og FCK på spillermarkedet (køb/udvikling af egne spillere)
- ☐ Butiksplacering, markedsføring, produktdifferentiering hos Lagkagehuset og "Guldbageren" (Guldbageren er en frivillig sammenslutning af bagerforretninger, Lagkagehuset er en kæde der ejes af en kapitalfond).
- ☐ Fangernes dilemma

Eleverne skal give konkrete eksempler på, hvordan begreberne ovenfor anvendes ift. de forskellige spil og specificere, hvilke elementer ved aktiviteterne de lægger vægt på. Elevernes arbejde fremlægges og diskuteres i klassen.

Læreren lader eleverne arbejde selv med opgaven. Og sikrer fokus på spilteoretiske begreber (men ikke nødvendigvis dem alle i alle opgaver).

Fase 2 Modellering af sekventielt spil

Eleverne: Eleverne præsenterer deres svar fra gruppearbejdet. Overvejelserne og de kriterier, de lægger til grund for deres svar, diskuteres.

Derefter diskuterer de kort forskellen på simultane og sekventielle spil. Gentagne spil og én gangs spil inddrages for at uddybe forståelsen. Eleverne opfordres til at komme med eksempler (fx kan man diskutere: Sten saks papir, skak (spil mellem to spillere), skak (turnering), kryds og bolle).

Eleverne skal modellere følgende simple spil (Opgave 2):

Til spillet bruges 4 kort (klør, spar, hjerter og ruder)

Spiller 1 har klør og spar – spiller 2 har hjerter og ruder.

Spillet 1 spiller ud, og spiller 2 svarer. Først spilles med følgende gevinster (læses som: spiller 1/spiller 2):

Spar/hjerter: (0, 0), spar/ruder (1, 2), klør/hjerter (2, 1), klør/ruder (0,0)

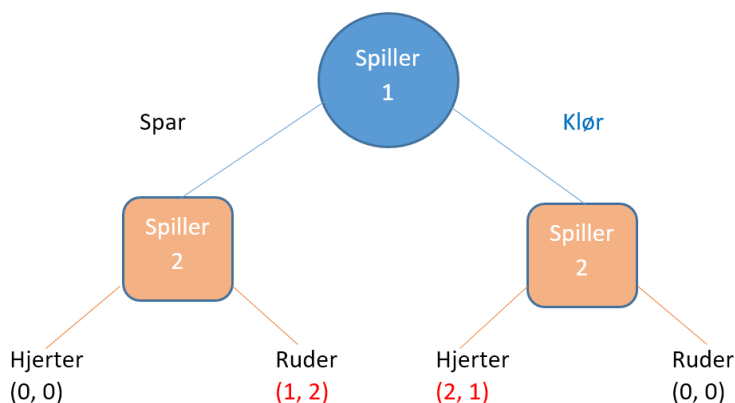
Spillet spilles to gange, hvorefter man bytter og spiller igen to gange. Spillet skal beskrives fuldt ud – hvad er optimal strategi for den, der starter, og den, der slutter?

Dernæst skiftes til en anden udbyttestruktur (læses som: spiller 1/spiller 2):

Spar/hjerter: (4, 0), spar/ruder (1, 2), klør/hjerter (2, 1), klør/ruder (0,4)

Spillet spilles som ovenfor. Også dette spil skal beskrives.

Læreren: I opsamlingen skal eleverne præsenteres for opstillingen af et spil træ (se eksempel nedenfor) og de må gerne argumentere præcist for, hvordan man finder en optimal strategi (hvordan beskrives det præcist?). Specielt skal der være fokus på, at man argumenterer med "**baglæns induktion**", dvs. man argumenterer ud fra 2. spillerens valg – og lader hendes (rationelle) valg definere, hvilke grene i træet der kan nås fra spiller 1.



Figur 1

Man starter nedefra. Spiller 2 vil rationelt vælge de røde positioner, og herefter har spiller 1 valget mellem to slutpositioner og vælger den blå (klør) - det giver udbyttet 2 til spiller 1 og udbytte 1 til spiller 2. Denne slutposition er en Nash ligevægt (se fase 3).

I opsamlingen skal det også komme frem, at det med den første udbyttestruktur er en fordel ved at være spiller 1 – med den anden udbyttestruktur er fordelene hos spiller 2.

Fase 3 Nash ligevægt.

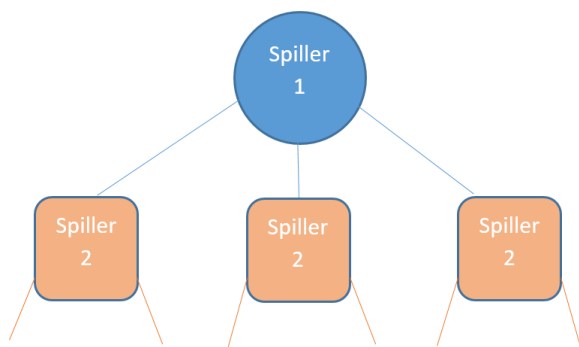
Eleverne præsenteres for følgende udsagn:

Nash-ligevægt er et økonomisk begreb, der er navngivet efter John Forbes Nash, der beskrev begrebet i sin ph.d.-afhandling fra 1950. Det er en ligevægt som findes i spil med to eller flere personer. Hvis hver spiller har valgt strategi, og ingen spiller får noget ud af at skifte strategi, hvis de andre ikke gør, udgør disse valg af strategier en Nash-ligevægt. Bemærk, at der kan findes valg af strategier, som er bedre for alle spillere. <https://da.wikipedia.org/wiki/Nash-ligev%C3%A6gt>

Bemærk: Den sidste sætning ovenfor refererer til fangernes dilemma, hvor der kræves samarbejde for at opnå en (fælles) gunstigere position end Nash-ligevægten.

Eleverne skal ud fra ovenstående definition argumentere (præcist) for at "bedste strategier for spiller 1 og 2" i spillene fra Fase 2 begge er Nash-ligevægte (Opgave 3).

Dernæst præsenteres eleverne for dette spil træ:



Figur 2

Eleverne skal designe en slags forretningsspil (med en passende fortælling) med udbytter svarende til dette spil træ (Opgave 4). Situationen kunne fx være, at to kæder vil introducere nye brands for tandpasta. Kæde A har valgt mellem mærkerne X, Y og Z, mens kæde B så kan vælge enten Z eller et helt nyt mærke W. Der skal fortælles en realistisk historie (fx at mærke Z vil være kundernes foretrukne, men hvis begge vælger Z, bliver deres salg hver for sig mindre). Udbytte kan gøres op i enheder af 10.000 kr.

Spillene laves af et par, og et andet par elever analyserer og finder Nash-ligevægte.

Eleverne opfordres derefter til at designe et spil træ (Opgave 5), hvor der er 3 træk i spillet – dvs. at spiller 1 laver et træk, dernæst spiller 2 og til sidst spiller 1 igen - også her skal de finde Nash ligevægt. Igen laves spillene parvis og analyseres af et andet par.

Endeligt skal eleverne designe et spil træ med to træk, hvor der er to eller flere Nash-ligevægte.

Udvalgte eksempler på elevernes arbejde præsenteres i klassen.

Lærerenes rolle er hele tiden at fastholde opmærksomhed på, hvad definitionen af Nash ligevægt betyder – og at der argumenteres præcist. Der udvælges interessante eller mønstergyldige eksempler fra arbejdet, som tages op til samlet diskussion.

Fase 4 Simultane spil - udbytte matrix og Nash-ligevægt.

Eleverne starter med at diskutere fangernes dilemma i versionen med røde og sorte kort (se spil teori niveau 2) og skal bestemme, hvilket af de 4 udfald der kan karakteriseres, som en Nash ligevægt (Opgave 6). Der skal argumenteres ud fra hver af de 4 celler, om den kan være en Nash ligevægt (der findes IKKE et bedre valg, som vil forbedre situationen givet modstanderens valg).

Figur 3		Spiller B	
		Rødt	Sort
Spiller A	Rødt	2/2	0/3
	Sort	3/0	1/1

Bemærk: Det er vigtigt at argumentere ud fra hver celle for sig. Nedenfor er en mulig argumentation, der ender i, at begge spillere må spille sort som deres optimale strategi.

- ☐ Celle (Rødt/Rødt). Hvis spiller A spiller Rødt, så får B et et højere udbytte ved at spille Sort end Rødt. Derfor er (Rødt/Rødt) ikke en Nash-ligevægt.
- ☐ Celle (Sort/Rødt). Hvis spiller A spiller Sort, så får spiller B et højere udbytte ved at spille Sort end ved at spille Rødt. Derfor er (Sort/Rødt) ikke en Nash ligevægt.
- ☐ Celle (Rødt/Sort). Hvis spiller A spiller Rødt, så får spiller B højst udbytte ved at spille Sort. Men hvis B spiller Sort, så vil spiller A få et større udbytte ved at spille Sort. Derfor er (Rødt/Sort) ikke en Nash ligevægt.
- ☐ Celle (Sort/Sort). Hvis spiller A spiller Sort, så får spiller B et større udbytte ved at spille Sort end Rødt. Og hvis spiller B spiller Sort får spiller A det største ubytte ved at spille Sort. (Sort/Sort) er dermed en Nash-ligevægt .

Eleverne skal nu se på et andet eksempel (Opgave 7).

To virksomheder A og B konkurrerer på et marked med den samme slags produkt – ciabattabrød (C) og grovbrød (G). Hvis virksomheden producerer et andet brød end konkurrenten, får man mere efterspørgsel, end hvis man producerer samme slags brød. Valget foregår samtidigt i de to virksomheder.

Spillere er firma A og firma B. Handlinger/regler er, at man kan vælge mellem C og G. Information er, at man vælger samtidigt og ikke kender det andet firmas valg. Strategien er at vælge C eller G.

Udbytte i kr. ved de forskellige udfald er (læses som Firma A/Firma B):

C/C (40.000/40.000), C/G (90.000/100.000), G/C (80.000/70.000), G/G (60.000/60.000)

Udbytte matrixen skal opstilles og Nash-ligevægte bestemmes.

Udbyttematricen ser således ud:

Figur 4		Firma B	
		ciabattabrød	grovbrød
Firma A	ciabattabrød	40/40	90/100
	grovbrød	80/70	60/60

Ved at argumentere ud fra de enkelte celler ses, at der er to Nash-ligevægte C/G og G/C. En af vanskelighederne ved ikke-kooperative spil er, at der som i eksemplet her er, flere ligevægte med forskellige udbytte. En anden vanskelighed er, at selvom der er en unik strategisk ligevægt (her C/G), kan den ikke betragtes som en strategi, der kan tilvejebringes.

Eleverne opfordres til at ændre på udbyttematricen, så der kommer ligevægte i hhv. C/C og G/C, og til at lave fortællinger om, hvorfor netop den konkurrence situation er opstået.

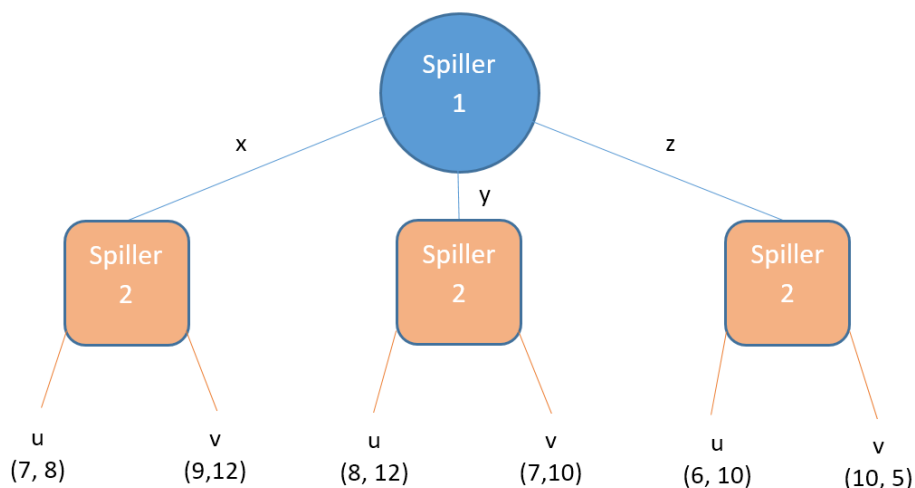
Eleverne præsenteres for en udbyttematrix for et spil mellem Emilie og Mathias (Opgave 8). De skal finde de to Nash ligevægte (a, y) og (b, x), samt finde de to ligevægte og argumentere for deres fremgangsmåde.

Figur 5		Emilie		
		x	y	z
Mathias	a	1,1	2,1	2,0
	b	2,3	0,2	2,1
	c	2,1	1,2	3,0

Eleverne skal dernæst konstruere et simultant spil (en udbyttematrix) svarende til det sekventielle spil, de repræsenterede ved et spillematrix i opgave 4, hvor de til det simultane spil også skal digte en tilsvarende fortælling. Igen kan man lade eleverne arbejde parvis og bytte med andre par, når man beregner Nash-ligevægt.

Lærerens rolle er i høj grad at fastholde, hvordan der argumenteres – og sikre, at der tages udgangspunkt i definitionen på Nash ligevægt. I eksemplet med ciabattabrød og grovbrød kunne det udefra set være bedst at ende i positionen (C/G), men pointen er, at ingen af producenterne alene ved egen beslutning kan ende der. Befinder man sig i positionen (C/C), kan Firma A kun opnå bedre position i (G/C). (C/G) er en beslutning som Firma B træffer. Evt. kan man spørge eleverne, hvad der skulle til i udbyttestruktur, for at (G/C) var eneste Nash-ligevægt.

Endeligt kan eleverne præsenteres for følgende variant af Figur 2 - og det samme spil i en simultan variant:



Figur 6

Her i det sekventielle spil er (x, v) en Nash-ligevægt

Figur 7		Spiller 2	
		u	v
Spiller 1	x	7,8	9,12
	y	8,12	7,10
	z	6,10	10,5

Her i dette simultane spil er (y, u) en Nash-ligevægt.

Eleverne skal selv undersøge Nash-ligevægte og se, om de kan finde en meningsfuld fortælling til disse tilfælde.

Fase 5 Forskellige konkurrencesituationer. Oplæg til elevarbejder (kan udelades)

En oplagt mulighed er at lave et samarbejde med samfundsfag eller erhvervsøkonomi. Her kan man fx hente inspiration i kapitel 14 i dette kompendium:

<http://www.floekintro.dk/wp-content/uploads/2011/08/mikrooekonomi.pdf>

Det omhandler forskellige konkurrence situationer, hvor Nash-ligevægt kombineres med forskellige beregninger af udbytter (udbyttefunktioner).

Konkurrencesituationen handler om "oligopol", dvs. markeder med få virksomheder/producenter – men i realiteten behandles kun duopol.

Allerede 3 spillere/virksomheder er vanskelige at behandle med simultane modeller. Se evt. her:

<https://math.stackexchange.com/questions/1580543/game-theory-finding-nash-equilibrium-in-3-times-3-times-3-matrices>

Man kan, når man betragter konkurrerende virksomheder, betragte nogle principielle situationer:

- Om man konkurrerer på pris eller mængde
- Om det foregår simultant eller sekventielt.
- Der er forskellige økonomer der har givet navne til disse konkurrenceformer og de tilsvarende ligevægte.

Nedenfor ses et klip fra kapitel 14 i "Lær nemt - Microøkonomi" af Niels Bruhn Christensen og Anders Poulsen (Gratis men med reklamer):

<http://www.floekintro.dk/wp-content/uploads/2011/08/mikrooekonomi.pdf>

14. Oligopol

Vi ser nu på en markedsform hvor der er *få virksomheder*. Et sådant marked kalder vi et **oligopol**.

Oligopol: Et marked med få virksomheder

14.1 Klassifikation af oligopoler

Oligopol markeder underopdeles efter hvorledes konkurrencen mellem virksomhederne foregår. Vi skelner mellem:

- om virksomhederne konkurrerer på *mængde* eller *pris*
- om virksomhederne bestemmer sig *simultant* (samtidigt) eller *sekventielt* (efter tur)

Dette giver som illustreret i figur 14.1 fire forskellige slags oligopoler. Tre af dem er opkaldt efter personen, der først beskrev dem.

Figur 14.1 Klassifikation af oligopoler		
	Mængde	Pris
Simultant	Cournot	Bertrand
Sekventielt	Stackelberg	X

Et projekt eller forløb kunne tage udgangspunkt i en historisk begivenhed eller en konkurrencesituation med konkrete aktører, og som kan modelleres som et af de 3 standardspil analyseret i kompendiet.