

Spilteori	Niveau 1	LÆRER
-----------	----------	-------

Kryds og bolle – Eller fornøjelsen ved at vinde

Forløbet handler om elevernes egne undersøgelse af et problem. Det er derfor afgørende at holde igen på, hvad man giver eleverne af hint, ideer osv. Læreren rolle er at være 'forskningsleder', altså ikke at være den der sidder inde med svarene, men at være den der insisterer på, at eleverne faktisk undersøger og argumenterer. Eleverne præsenteres for opgaverne gennem slides. Teksten giver kun ringe mening, før man har sat sig ind i de tilhørende ppt-slides.

Forudsætninger

Bekendtskab med 'hvis ... så ...' argumentation.

Tilsigtede læringsmål

Projektet er først og fremmest tænkt som legeplads for matematisk argumentation: At kunne skelne mellem intuitiv forklaring/heuristiske argumenter/formel argumentation og i simple tilfælde at vurdere, hvilken af disse der er brug for. At kunne opstille matematiske påstande og give bevis for dem i simple tilfælde, dvs. fastlægge nye begreber og objekter gennem definitioner, formulere sætninger i formatet (1) Scenario (angivelse af begreber og objekter), (2) Forudsætning, (3) Ønsket konklusion, (4) Bevis (logisk deduktion forudsætning → konklusion). Se nærmere under den udfoldende opgave. Der skal arbejdes med formel argumentation. Idealet er, at argumentationen er udtømmende og forståelig også for andre elever i klassen. Dette er nok for ambitiøst til, at alle kan honorere det. Men det har også stort læringspotentiale at blive skarp på, hvornår kæden hopper af, og hvorfor man går i stå.

Når eleverne skal give garantier til producenten, bliver det et krav, at deres argumenter er uafviselige. Selvom eleverne ikke får argumenteret i bund, vil der i forløbet uvægerligt fremkomme elevforsøg på sådanne uafviseligheder. Noget vil være rigtigt, andet mangelfuldt eller forkert. Læreren opgave er at stille skarpt på dette, så det bliver klart for eleverne, hvornår et argument holder i matematik – herunder, hvornår det er færdigt, og at vise, hvordan garantien er et eksempel på klassisk matematisk formalisme definition-sætning-bevis.

Forslag til redskaber

Blyant/papir, tavle/farvekridt, en computer eller mobiltelefon, der kan spille kryds-og-bolle.

Den udfoldende opgave

Opgaven præsenteres for eleverne på slides.

Opgaven handler om at formulere, undersøge og argumentere for forskellige påstande om 3x3 kryds-og-bolle, bl.a. som det ser ud som børnespil på en computer eller en PC. Den grundlæggende ide er, at når eleverne skal rådgive kryds-og-bolle spilproducenten, ledes de naturligt til den klassiske fremstilling af matematiske resultater. 'Definition' er en præcisering af spillet, 'påstand og ønsket konklusion' er en matematisering af producentens ønsker til spilniveauer og elevernes hypoteser om, hvorvidt producentens krav kan opfyldes. 'Beviset' er den garanti, som producenten kræver af rådgivningen. Som en sidegevinst opnår eleverne indsigt i forskellige måder at tilrettelægge spillet på, så det er interessant for børnene. Fx om det er muligt at programmere computeren eller mobilen, så spilleren altid vinder (uanset, at man ikke spiller særligt godt).

Første fase

Eleverne præsenteres for den udfoldende opgave om kryds-og-bolle-spillet som et spil, hvor man kan placere op til 5 krydser (og 4 boller – for nemheds skyld lader vi altid kryds begynde). Denne version er den simpleste. Spillet stopper, når pladen er fuld.

Eleverne arbejder i grupper. De opfordres til at skrive reglerne, så de er entydige og forståelige. De spiller nogle gange, så de kan danne hypoteser vedrørende producentens ønsker om spilniveauer. Eleverne skal formulere spørgsmål til, hvordan de efterfølgende skal arbejde: Hvordan undersøger man påstanden?

Hvilke argumenter? Hvilken undersøgelsesstrategi? osv. Som et led heri præsenteres de for 2x2 kryds-og-bolle. Kan producentens ønsker og krav opfyldes for 2x2 spil? Dette skal besvares fuldstændigt, inklusiv 'garanti'. Herefter vendes tilbage til 3x3.

Læreren lader eleverne arbejde selvstændigt. For læreren handler denne fase om observation og notater om elevernes arbejde til brug for fase 2. Reglerne kan være mere eller mindre detaljerede. De kan fx indeholde formuleringer om, at man skiftes til at placere sit tegn og om, hvordan man vinder/spillet ender uafgjort. Undersøgelsesspørgsmålene kan formuleres på flere måder, fx: Findes der en strategi for bolle til at opnå mindst uafgjort, uanset hvad kryds spiller? 2x2 problemet kan løses på flere måder. Det handler igen om at give det uafviselige argument. Der er i hvert fald 3 væsensforskellige løsninger for 2x2-spillet: gennemgang af alle spilmuligheder, reduktion til ganske få muligheder vha. symmetri eller ved et kort argument (uanset, hvordan kryds starter, er der 3 muligheder for at vinde i næste træk, bolle kan kun forhindre 1). Argumentet, 'Der er jo klart!', gælder ikke – selvom det er klart ☺.

Hvis man ikke kan få hul på et kompliceret problem (her 3x3), er en fundamental undersøgelsesstrategi at betragte et simplere tilfælde, som man kan overskue, for at få en idé om problemets natur. Facit er ikke "1 2x2 vinder kryds altid". Det kan ethvert barn, der kan sidde stille længe nok indse.

Anden fase

Eleverne præsenterer deres undersøgelser for hinanden og giver begrundelser for deres hypoteser. Endvidere præsenterer de deres (fulde) løsninger til 2x2 versionen.

Læreren. Der samles op på elevernes arbejde. Det er vigtigt for den undersøgende tilgang, at det er elevenernes eget selvstændige arbejde, som danner udgangspunkt – ikke løsningsforslag, som er fremkommet vha. vink og hints fra læreren. Der laves nogle kriterier for, hvordan en god undersøgelse/god argumentation er. Kriterierne kan være rummelige. Men der kan indgå ord som overbevisende og kortfattede. I opsamlingen kan også påpeges "algoritmiske elementer" og brug af "det er ligegyldigt hvorfra spillet ses" (symmetri) med henblik på senere undersøgelser. Læreren samler op på elevernes løsning af 2x2 versionen som 'Definition-sætning-bevis' og påpeger, at herved er producentens krav og ønsker tilgodeset. Hvis eleverne er kommet frem til flere løsningsmetoder, bør de alle blive gennemgået. Det handler ikke om at finde 'den smarteste løsning'. Ethvert ærligt løsningsforslag fortjener opmærksomhed og vil utvivlsomt rumme elementer af vigtige diskrete metoder (fx kan en møjsommelig gennemgang af alle muligheder for gennemførelse af 2x2 spil forekomme som 'overkill', men kan give idéer til metoder for analyse af 3x3 spil). Herved sættes også paradigmet for løsning af 3x3 versionen. Læreren sammenfatter elevernes hypoteser, fx som procenter af ja/nej til mulighed for de 4 spilniveauer.

Tredje fase

Eleverne præsenteres nu for, at 3x3 jo er et børnespil, som kan spilles på computer eller mobiltelefon. Vi lader barnet starte og stiller (undersøgelses-)spørgsmålene: (1) Er det muligt for bolle at tilrettelægge spillet (lave en spilstrategi for computeren), så kryds altid vinder? (2) Er det muligt at lave en spilstrategi, så kryds vinder nogle gange, men ikke altid? (3) Er det rigtigt, at hvis både kryds og bolle spiller optimalt, så bliver det uafgjort? (4) Er der en sikker vinderstrategi? Herefter går eleverne i gang med at svare på spørgsmålene og give den garanti, som producenten forlanger.

Læreren: Det kan være god logistik at fordele spørgsmålene, så de forskellige grupper fokuserer på hver deres undersøgelse.

Tanken er, at eleverne selv overvejer fortolkningen af undersøgelsesspørgsmålene. Fx er påstanden i (1) at, uanset hvor det første kryds placeres, vil det være muligt for computeren at lade barnet vinde. Det er muligt, at eleverne kun kommer noget af vejen i argumentation – fx fordi der er for mange muligheder at undersøge. Derfor kan det være relevant at diskutere undersøgelsesstrategien med dem. Bemærk, at spørgsmålene jo ikke er uafhængige, hvilket læreren kan udnytte i fordeling af opgaver. Når denne fase er tilendebragt, vil eleverne (idéelt) have en klar idé om, hvordan de skal rapportere til producenten.

Fjerde fase

Eleverne præsenterer gruppe for gruppe deres arbejde i fase 3. Tilhørergruppernes rolle er at stille kritiske spørgsmål især til, om 'garantien holder'. Er forklaringerne udtømmende, eller er der overset noget? Er

argumentationen logisk? Er der fejte noget under 'det-ses-klart-tæppet'? ... De skal endvidere tage noter til de spørgsmål, de ikke selv har undersøgt, så alle kan svare på alle producentens spørgsmål og har indsigt i 'garantien'.

Læreren samler op. Hvordan er det gået med hypoteserne fra fase 2? Er der uafklarede argumenter i garantierne? Hvad mangler vi for at kunne rapportere til producenten? ... Herefter laves i fælleskab en disposition til en konsulentrapport til producenten. Hvad skal formatet være? I en udelukkende skriftlig rapport kan især garantidelen nemt blive meget nomenklatur-tung. Der skal mange betegnelser til for at beskrive spiltræk éntydigt. Så figurer og videoer/screencast af spilgennemførelser m.m. kan være gode alternativer til dele af en rapport. Fasen munder ud i vedtagelse af retningslinjer, som bør inkludere dele med ren skriftlighed. Dette er en god lejlighed til at pointere faglige standarder for skriftlighed i matematik.

Femte fase

Eleverne starter arbejdet på den færdige form af deres rapport (1 for hver gruppe). **Læreren** er 'coach', som sikrer, at grupperne arbejder relevante beskrivelser.

Sjette fase

Eleverne giver kort statusmeddelelse om, hvor de står i deres rapportarbejde. Er der alvorlige forhindringer for at gøre den færdig? **Læreren** sammenfatter, hvad der er mangler, før der kan rapporteres til producenten, og udstikker den resterende arbejdsplan, fx om alle elever skal lave udførlig rapportering om alle producentens 4 niveauer. Den afhænger selvfølgelig af produktkravene til eleverne, vel især om forløbet skal med til eksamen.

Nogle tjekspørgsmål til de opstillede læringsmål

- a) Lav en undersøgelse af 3x3 kryds-og-bolle hvor en gevinststilling er defineret ved at 3 kryds eller 3 boller danner en vinkel:

Eksempel 1

		o
x	x	o
x		

Eksempel 2

o	o	
o		
x	x	x

Eksempel 1 er en vinderstilling for kryds og Eksempel 2 for bolle. Er det rigtigt, at kryds altid kan vinde?

- b) Hvilke af stillingerne nedenfor er i en vis forstand ens, forklar!

	x	o
	x	
x		o

1

o	x	
	x	
o		x

2

o		x
	x	
o	x	

3

		o
x	x	
	x	o

4

Forslag til elevprodukter

A. Eleverne afleverer konsulentrapport til producenten. Heri skal beskrives den opgave, de har løst (så der er sikkerhed for, at producenten og konsulenten er enige om, hvad det handlede om), hvad deres løsningsforslag er vedrørende de 4 spilniveauer, og ikke mindst garantien for at deres forslag er korrekte, altså uafviselige argumenter for fx 'Uanset, hvordan kryds spiller, kan bolle altid få mindst uafgjort', m.a.o. matematiske beviser.

B. Eleverne laver video af gennemførelse af et eller flere spil, som dækker et af de 4 niveauer. Eleverne skal forklare, hvorfor den spilstrategi, de illustrerer, er udtømmende for spilniveauet, ved at henvise til symmetrier, ved at dække alle tilfælde, ...

Metodiske pointer

Vi arbejder med at matematisere et hverdagsfænomen som simple spil. Man kan argumentere for bestemte egenskaber ved at gennemspille alle muligheder. Det er typisk for diskret matematisk argumentation at benytte symmetri m.m. til at reducere omfanget og at opdele i tilfælde. Spilstrategier er eksempler på algoritmer. Et bevis kan bestå i angivelse af en algoritme samt et bevis for, at algoritmen virker. Elevdiskussioner, om hvorvidt en given strategi virker, giver 'hvis ..., så ...'-logik et naturligt retorisk fundament (hvis du er med på ..., så må du også acceptere ..., så derfor ...).

Links med lidt gruppeteori og til mere avancerede kryds-og-bolle spil

Der er masser af materiale på nettet, fx

<https://ibmathsresources.com/2013/11/24/game-theory-and-tic-tac-toe/>

<https://www.youtube.com/watch?v=VOrVMQjQpGg&list=PLa8j0YHOYQQIkW0OUGBrqe6PqxeOSqrZi>

<http://mathforum.org/library/drmath/view/55291.html>

Idéer til videre forløb

Ovenstående er helt fyldestgørende i forhold til læreplanerne, men man behøver jo ikke at stoppe: Eleverne opfordres til selv at undersøge spil, hvor computeren starter. De formulerer nu selv undersøgelses-spørgsmålene. Undersøgelsesspørgsmålet kunne nu lyde: Er det muligt at lave en strategi for at computeren ikke vinder – dvs. for at bolle altid opnår at vinde eller at spillet ender uafgjort?

En ide er at undersøge det omvendte: "Findes der en strategi, hvor bolle kan tvinge kryds til at vinde?", i så fald skal der naturligvis tænkes over, hvad forholdet mellem de to sætninger er, og hvordan man så argumenterer (nej, der findes ikke en strategi, hvor bolle kan tvinge kryds til at vinde i alle tilfælde). En mulig tilgang er at se på hvad der sker, hvis kryds starter med at vælge midterfeltet, og i 3. træk sætter krydset modsat bolle:

1. mulighed

		o
	x	
x		

2. mulighed

	o	
	x	
	x	

Igen samles der op – har man brugt ideen om indirekte bevis ovenfor, skal der naturligvis være et vist fokus på, hvordan eleverne formulerer sig om det.

Eleverne opfordres til at formulere andre mulige undersøgelsesspørgsmål, evt. med lettere ændrede regler. Og også principper for, hvordan godt kryds-og-bolle spil på computeren kunne konstrueres.

Idéer til undersøgelse kunne fx være at ændre regler, så kryds trækker først, men bolle så har andet og tredje træk, hvorefter man skifter. Der kunne også laves andre gevinststillinger end tre på række. Mht. fornuftige muligheder for at konstruere spillet kunne man overveje:

- Skal barnet selv kunne vælge, om det vil begynde eller være nummer to (og hvilke spil i fase to og 3 er mest interessante)?
- Kunne der indbygges mekanismer så computeren vandt nogle gange – og i så fald, hvordan (skulle det være tilfældigt eller skulle det være, hvis barnet fx dummede sig og undlod at blokere en gevinst)?
- Skal der være en slags progression ("levels") i spillet og i så fald, hvordan?

Der findes andre spil, som kan analyseres på samme måde, herunder en række kryds-og-bolle spil, fx den variant, hvor hver spiller har tre brikker, som de så flytter rundt på pladen. Man kan også overveje cylinderflade og torus – måske er det opgaver til B niveau. Her kunne også være en opgave i at lave en simpel strategi for kryds-og-bolle på 4x4 med krav om 4 på række, der sikrer uafgjort. Dette spil kan også analyseres på torus og cylinder.