

Statistik i gymnasiet

Claus Thorn Ekstrøm, KU Biostatistik,

Ernst Hansen, KU Matematik

Per Bruun Brockhoff, DTU Compute

17 januar 2017

I forbindelse med den kommende gymnasireform skal der skrives nye læreplaner for blandt andet matematik. I den forbindelse skal det eksisterende statistikpensum i gymnasiet og undervisningen i statistik diskuteres. Dette dokument giver vores bud på, hvad man bør lægge vægt på i forbindelse med undervisningen i og brugen af statistik i gymnasiet, og tanken er, at dokumentet kan fungere som input til eventuelle ændringer i de kommende læreplaner.

Hvorfor er det vigtigt at lære statistik?

Det er vigtigt at lære statistik fordi det bevidst og ubevidst har stor betydning for den måde vi lever vores liv, den måde vi opfatter verden, og for den måde vi tilegner os ny viden og erfaringer, og fordi statistiske vurderinger gennemsyrrer den verden vi lever i. Statistik handler helt kort om at uddrage viden fra “data”. Data, altså alle former for registreringer og målinger fra alle former for opgørelser, monitoreringer og ikke mindst videnskabelige undersøgelser og eksperimenter har i flere århundreder været en væsentlig del af menneskers gøren og laden. Ved årtusindskiftet blev anvendelsen af statistik inden for det sundhedsvidenskabelige område af førende forskere fremhævet på en 11-punktsliste over de mest vigtige bidrag til vores sundhed i 1000 år (Diverse forfattere 2000). I de seneste få år er vi så endelig blevet ramt af den digitale tsunami, der har været under opsejling et stykke tid med computerens, internettets og kommunikationsmidlernes rivende udvikling. Man lagrer nu mængder af data i en størrelsesorden, som udvikler sig eksplosivt for tiden. Langt størstedelen af de tilgængelige data i verden i dag er genereret i løbet af de sidste 2 år, og mængden af data forventes at 10-dobles de næste 4 år (Wikipedia 2016a)! Det er tal, der næsten ikke er til at forstå, og det understreger nødvendigheden af, at vi alle bliver klædt på til en fremtid, hvor det at bruge og lære af data vil fylde mere end nogensinde, og sandsynligvis mere end nogen er i nærheden af at kunne forestille sig lige nu.

Statistikken anvender ofte sandsynligheds- og tilfældighedsbegreber for at kunne være nuanceret i forståelse af, hvad data egentlig kan og ikke kan fortælle os. Det skyldes dels, at data typisk vil være fremkommet under en vis tilfældighedspåvirkning — en patient reagerer f.eks. ikke på præcis samme måde hver gang man tager en bestemt pille, og dels at anvendelsen af den viden man vil trække ud af data kan have et tilfældighedsaspekt — f.eks. at ville forudsige en miljøpåvirkning ud i fremtiden. Derfor ses statistik og sandsynlighed ofte som to sider af samme sag, men det er kun delvist rigtigt: Sandsynlighedsteorien er i sig selv en vigtig del af den matematiske teori, og har også masser af relevans for mange

virkelige fænomener, som eksempelvis spil og forståelsen af den grundlæggende biologi og artsudvikling. Faget statistik bruger matematik, herunder i høj grad sandsynlighedsteori, men skal som fag ses og forstås bredere end det: Det er et fag, der giver rammerne og principperne for hele processen omkring dataindsamlingen, modellering, analyse og til sidst selve vidensuddragelsen og konklusionerne, se figur senere i dokumentet. Som sådan kan man ikke konkretisere og eksemplificere statistikfagets indhold uden at gøre det i en konkret anvendelsessammenhæng. Eksempler på konkrete sammenhænge kunne være: kemi, fysik, biologi, samfundsfag, økonomi, psykologi, osv.

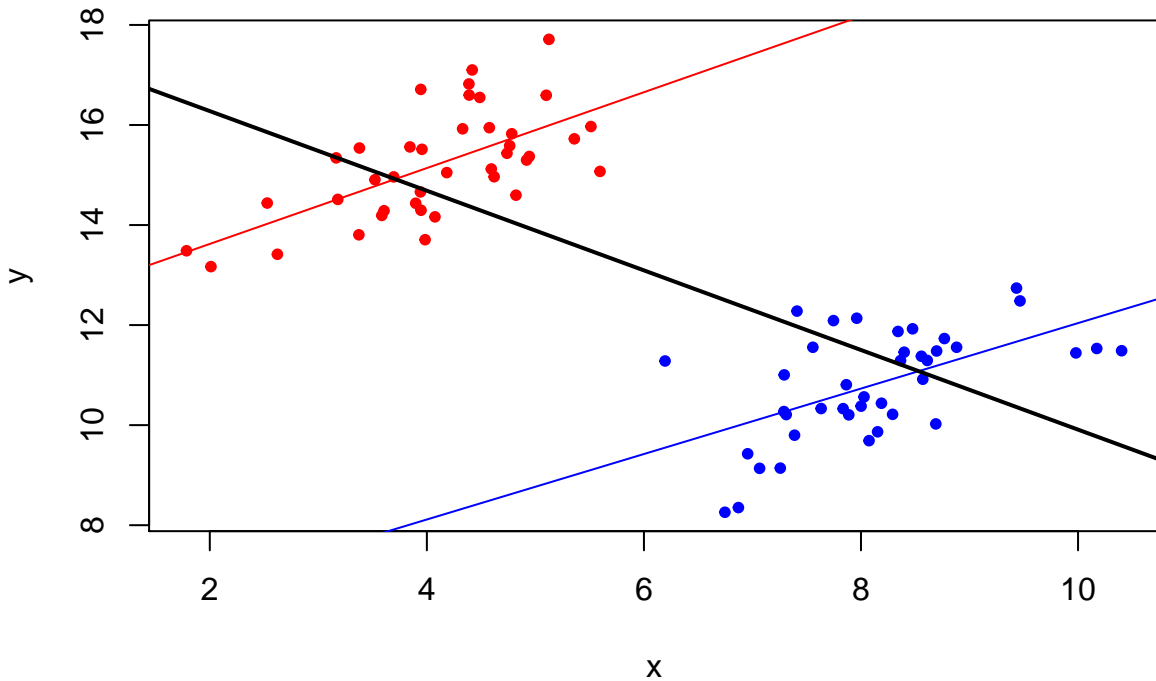
Data, og dermed statistik, anvendes således nu og i stigende grad på alle niveauer af vores liv: fra politiske og samfundsstyrende institutioner over al form for erhversaktivitet til helt konkrete spørgsmål på det helt personlige plan: “Kan jeg nå over vejen uden at blive kørt ned?”, “Hvem vinder det amerikanske præsidentvalg? Og hvor sikre er vi på meningsmålingerne?”, “Hvor meget reduceres min risiko for svære hjerneskader ved at bruge cykelhjelm”, “Hvem vinder EM i fodbold?”. Alle disse spørgsmål kan og bliver i dag forsøgt besvaret med statistik. Og statistiske metoder spiller en central rolle i den mur af ‘kunstig intelligens’ vi omgives af: de reklamer som Facebook viser os, de emails som spamfilteret lader slippe igennem, de oversættelser fra fremmede sprog, der tekster vores TV-udsendelser.

Statistik er desværre også et felt, hvor man let kan blive snydt af umiddelbare og øjensynligt intuitive (men alligevel forkerte) svar. Det er f.eks. velkendt at valgprognoser kun er værd at hæfte sig ved hvis interviewpersonerne er udvalgt repræsentativt. Men repræsentativt for hvad? I dansk sammenhæng er det et fornuftigt mål at gøre stikprøven repræsentativ for den samlede befolkning. Men i det engelske valgsystem med flertalsvalg i enkeltmandskredse, eller i det amerikanske system med valgmand, kan man få helt misvisende prognoser hvis stikprøven er udvalgt uden inddragelse af disse formelle strukturer.

Visse paradokser af sandsynlighedsmæssig og/eller statistisk karakter har ligefrem fået folkløse-status. Det gælder f.eks. Monty Hall problemet (Ellis 1995), hvor en deltager i et tv-show skal vælge mellem tre døre, hvor der er en bil bag den ene. Dette er blot et pudsigt eksempel på, hvordan sandsynlighedsbegrebet kan være intuitivt udfordrende. Men det forplanter sig hurtigt til konkrete udfordringer i forbindelse med at bruge data. Simpsons paradoks (Wikipedia 2016b) er et klassisk eksempel på dette (se figur 1), og lignende problematikker af mere fundamental betydning for os alle opstår ofte, når vi prøver at anvende sandsynlighedsbegreber og statistik til at uddrage viden. Det er med andre ord vigtigt, at man lærer at forstå og arbejde med statistik for at undgå de faldgruber, der måtte være.

Efterspørgslen på personer, der kan arbejde med statistik og dataanalyse er enorm. Behovet for personer, der er i stand til at analysere og fortolke data er vokset støt de seneste mange år, som en naturlig følge af den digitale revolution beskrevet ovenfor. Der har næsten altid i Danmark været uddannet for få folk med disse kompetencer fra vores universiteter, og dette bliver lige nu blot værre med den voksende efterspørgsel. Der er heller ikke tvivl om at statistikkompetencerne hos alle vores højtuddannede akademikere, som ikke har statistik som deres egentlige kompetence, langt fra står mål med behovet i den moderne it-højteknologiske verden, som de skal agere i nu og i fremtiden.

I USA har de allerede indset denne mangel på studerende med statistikkendskab og for længst



Figur 1: Et eksempel på Simpsons paradoks. Data består af to undergrupper svarende til de røde og de blå punkter. I hver undergruppe ses en positiv lineær sammenhæng mellem x og y . Hvis undergrupperne ignoreres vil den overordnede sammenhæng fremtræde som negativ (den sorte linje).

startet på at få statistik mere og bedre ind i grundskolen og gymnasiet (Franklin et al. 2007; Franklin et al. 2015; Bargagliotti and Franklin 2015; Lee and Stangl 2015). Og selvom der naturligvis er forskelle mellem de amerikanske og danske uddannelsessystemer, så er der rigtig mange relevante paralleller, når det kommer det til håndteringen af statistik i forbindelse med matematikundervisningen i folke- og gymnasieskolen. Ikke mindst SET-rapporten (Franklin et al. 2015) vil være værd at læse for alle gymnasielærere, der kommer i berøring med emnet, dvs. i hvert fald alle lærere i matematik, biologi, samfundsfag, fysik, kemi, historie, bioteknologi, geovidenskab, økonomi og psykologi.

Den 11/8 2016 skriver Berlingske om en helt ny undersøgelse (“Danske Unge Spores for Dårligt Ind På Fremtidens Arbejdspladser” 11AD–8AD), der beskriver hvordan Danmark halter bagefter på at klargøre vores unge mennesker til det nye digitale arbejdsmarked. Matematik og it nævnes som nogle af de vigtige mangler. Data, statistik, og databehandling er efter vores overbevisning en central del af dette, og folke- og gymnasieskolen er naturligvis fundamentet for det hele.

Når man taler statistik er det svært ikke også at tale it. Datamængderne er ofte store, hvilket direkte nødvendiggør et it-værktøj til at lave de relevante beregninger, og det er ikke altid muligt at finde analytiske løsninger til de statistiske modeller. Desuden lægger den statistiske argumentationsrække direkte op til kunne formuleres ved hjælp af simulationer fra data-genererende processer. Fortolkningen af p -værdier, konfidensinterval, usikkerheder osv. kan alle belyses ved hjælp simulationer, hvilket blot understreger, at et it-værktøj fra starten

bør tænkes med i hele den overordnede plan for statistikundervisningen i gymnasiet.

Hvad er vigtigt?

I forbindelse med undervisning i statistik må det vigtigste være, at de studerende lærer nogle værktøjer, som

1. de **forstår**. Det er bydende nødvendigt at de studerende forstår, *hvornår* det giver mening at anvende eller ikke at anvende de pågældende metoder, og *hvorfor* de giver mening at bruge.
2. de er i stand til at **anvende**. De skal have den nødvendige kompetence til at kunne oversætte et problem til et matematisk/statistisk problem, og kunne fortolke de resultater, der kommer ud af den statistiske analyse, så de kan oversættes til den relevante kontekst.
3. kan bruges til at analysere problemstillinger, som de støder på i dagligdagen, eller via andre fag så som fysik, biologi, samfundsfag mv. (Statistik skal være **virkelighedsnært**).

Det bør prioriteres højere at lære dem færre værktøjer, som de så opnår en dybere forståelse af, end at de lærer mange metoder mere overfladisk.

Som nævnt ovenfor er det svært helt at adskille statistik fra det at lære et it-værktøj. Hvis disse to ting ikke integreres vil det betyde, at gymnasieeleverne har et værktøj, som man kun i ringe grad kan bruges på virkelige data. Der er ingen, der orker at regne middelværdien ud af 200 observationer i hånden, eller lave en optælling og et søjlediagram af 1000 målinger. Det bør derfor tilstræbes, at de studerende har adgang til it-værktøjer, som kan de fornødne ting.

Statistik som en del af matematik — og andre fag

Traditionelt er statistik blevet set som del af anvendt matematik, og derfor har statistik typisk været forankret i matematikundervisningen. Denne konstruktion giver god mening fra 3 synsvinkler:

1. Sandsynlighedsregning er “ren” matematik, og sandsynlighedsberegninger indgår i statistik.
2. De logiske argumenter, der anvendes i statistikken, er af samme slags som i matematikken.
3. Matematiske modeller er ofte et vigtig element i beskrivelsen af det fænomen, som vi vil modellere.

Alle tre punkter er valide argumenter for, hvorfor statistik hører hjemme som en del af matematikundervisningen, men problemet opstår, når man glemmer, at statistik faktisk forsøger at modellere (og kvantificere) systemer, der indeholder en stokastisk komponent.

Eksempelvis har nogle af eksamensopgaverne fra gymnasiet været formuleret på nedenstående vis (løst omformuleret for at understrege pointen)

tilpas en ret linje til punkterne og find hældningen for linjen

eller

*beskriv sammenhængen mellem x og y ved hjælp af en eksponentiel vækstkurve.
Hvad kan du sige om væksten?*

Hvis man kommer fra en matematisk baggrund giver disse opgaver god mening. Man har et problem, der skal oversættes til et matematisk problem, hvor man så kan regne løsningen ud. Der er netop *en* løsning på spørgsmålet, og man undersøger om den studerende er i stand til at gennemføre de tekniske trin, der er nødvendige for at løse opgaven. Man har dog helt fjernet den stokastiske komponent fra opgaverne.

Dette er helt anderledes, hvis man kommer fra andre fag, og vil belyse en eller anden sammenhæng. Her er det spørgsmål man oftest stiller noget i stil med

Her er nogle observationspunkter. Find en god model til at skrive sammenhængen.

For det første ved man jo i virkeligheden ikke, *hvilken* statistisk model, der er rimelig at benytte, og det er ikke engang sikkert, at der *er* en “korrekt” statistisk model. Man kan forestille sig en situation, hvor man eksempelvis gerne vil beskrive sammenhængen mellem børns længde/højde og deres alder. Vækstkurver har ofte form som (del af) en logistisk kurve, men hvis man kun betragter børn, som er mindre end 5 år, kan en ret linje måske ligeså vel beskrive sammenhængen (for børn under 5 år). Med andre ord kan det altså nogle gange godt være fordelagtigt at bruge en simplere model, der er god til at beskrive det konkrete fænomen vi er i gang med at modellere.

For det andet er det heller ikke muligt at give noget entydigt bud på, hvad der præcis menes med en **god** model. I gymnasiet har R^2 i nogle fag været brugt som en slags mål for om en model var god, men det er en størrelse, der ikke nødvendigvis giver noget entydigt svar, og som ikke generelt kan bruges til at sammenligne to modeller (se andet dokument om brugen af R^2).

Denne anden type spørgsmål er måske tættere på, hvordan man i praksis ville bruge statistikken. Ulempen ved dette — i forhold til de første to spørgsmål — er, at man kan komme ud for, at to studerende besvarer det samme spørgsmål på to forskellige måder (den ene kunne fx. bruge en ret linje mens den anden brugte et 2.-grads-polynomium), og kommer frem til lidt forskellige løsninger, hvor den ene ikke er meget bedre end den anden. Dette kunne opstå, hvis den ene har tegnet data op og siger: “min punktsky viser, at jeg kan beskrive sammenhængen med en ret linje”, mens den anden siger “min punktsky ligner en ret linje med måske en lille krumning, så jeg bruger en parabel”. Begge personer, har i princippet argumenteret korrekt, og derfor er begge svar derfor også korrekte.

I begge situationer har de studerende vist, at de kan tænke “statistisk”, og kan oversætte en problemstilling til en matematisk relevant model, og det er denne vinkel, der mest fundamentalt adskiller statistikken fra matematikken. Hvis *alle* altid var enige om, hvilken statistisk model, der skulle benyttes, og hvilke forudsætninger, der var gældende, så ville alle statistiske problemstillinger blive reduceret til matematiske problemer. Sådan er det desværre bare ikke, og man bliver nødt til at lære de studerende at “ræsonnere statistisk”.

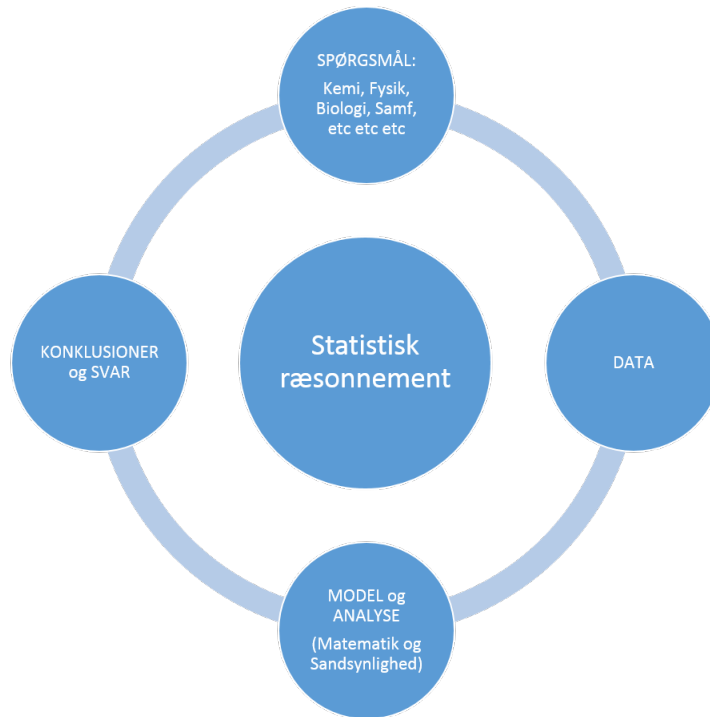
Hvordan kan man implementere statistik i gymnasieskolen?

Statistisk ræsonnement kan groft illustreres som i figur 2, hvor man har en (fagspecifik) virkelighed, man gerne vil beskrive. I praksis gøres det ved at formulere dette så simpelt som muligt herunder formulere de fagspecifikke spørgsmål man gerne ser besvaret, indsamle data, der kan belyse problemstillingen, og derefter oversætte denne virkelighed til en relevant statistisk model og analysemetode. Til sidst kan man uddrage konklusioner og oversætte disse tilbage til den relevante fagspecifikke kontekst. Det er super vigtigt, at hele kæden gennemføres: målet med den statistiske analyse er at kunne udtale os om den konkrete problemstilling — ikke at løse et matematisk problem. Vi ser en oplagt mulighed i at faget statistik, evt kombineret med noget it, kan udgøre matematiske elementer af de forskellige andre (ikke-matematiske) gymnasiefag i en fornuftig kombination med at dele af statistikken og sandsynlighedsteorien skal være en del af selve matematikfaget. En fælles forståelse af hvad statistikken er på tværs af alle fagområderne kan så søges i f.eks. en figur som figur 2, og de ord der skal til for at forstå den overordnede tankegang i “statistisk ræsonnering”. De fire cirkler i figuren matcher 100% de fire punkter, som man i den amerikanske SET report anbefaler som måden, man bør tænke og arbejde med statistik på high school niveau (Franklin et al. 2015, side 31-32).

En måde at integrere statistikundervisningen i matematikfaget er at bruge statistiske problemstillinger som indgang til at diskutere matematiske problemstillinger. Så sikrer man, at man ikke kun laver “matematik for matematikkens skyld”, men at man laver matematik, fordi man kan bruge det til noget.

Desuden er der jo mange ting i løbet af den daglige skolegang, der lægger op til at tale om variation. Hvis eleverne eksempelvis laver fysikrapporter er det jo ikke ualmindeligt, at de skal estimere nogle konstanter eller (tidligere) har skullet udregne R^2 for en på forhånd givet model. Her kunne det være oplagt på tværs af grupperne at vise, hvor stor variation, der bare er blandt grupperne i klassen for de målte værdier.

Indtil nu har vi ikke nævnt hypotesetest direkte. Ideen bag hypotesetest er nært knyttet til den naturvidenskabelig metode og de tanker som Karl Popper præsenterede om falsificering af hypoteser i 1930’erne (Popper 2005). Hypotesetestes og p -værdier er konceptuelt ret svære, og bliver alt for ofte brugt alt for automatiseret og ukritisk. Der er en generel trend i de statistikfaglige miljøer globalt set i retning af at fokusere mere på usikkerheder og konfidensintervaller end hypotesetest. The American Statistical Association (ASA) udsendte i marts 2016 for første gang i historien en pressemeddelelse med konkrete input til hvordan man (ikke) laver statistik (Wasserstein and Lazar 2016; Ekstrøm and Brockhoff 2016). En



Figur 2: Samspillet mellem kontekst, data, matematisk modellering og fortolkning danner rammen for statistisk ræsonnement.

meget kort version af dette kan udtrykkes som: Man kan *ikke* lave statistik alene ved en eller anden automatiseret (og matematisk veldefineret) p-værdi-beregning. Verden i dag består efterhånden af alt for mange sådanne forkerte/ufuldstændige statistiske anvendelser som følge af for dårlig metodisk forståelse og indsigt globalt set. På KU Matematik berøres hypotesetest nu faktisk slet ikke i det indledende statistikkursus (se fx Ekstrøm and Brockhoff 2016).

Centrale emner

- Deskriptiv statistik er vigtig.
- Begreberne variation og usikkerhed er vigtige.
- Lineær regression er vigtig.
- Normalfordelingen og binomialfordelingen er vigtige som helt grundlæggende modeller for tilfældige fænomener i hver deres domæne.
- Chi-i-anden test kan fint bruges som et passende simpelt eksempel på hypotesetestbegrebet — specielt, hvis det bruges til noget *mere* end blot at lave hypotesetests, men at man også forsøger at beskrive relative effekter og/eller usikkerheder.
- Usikkerhedsbetragtninger er vigtigere end hypotesetest.

Overordnet set mener vi, at det kan være udemærket, at statistikundervisningen i matematiktimerne fortsat inkluderer de to centrale problemstillinger:

- 1) sammenligning af binomialsandsynligheder.

2) simpel regression, hvor observationerne modelleres ud fra én kovariat.

Men vi foreslår at begge emner åbnes op så de bruges til at italesætte bredere strømninger i den statistiske proces:

- Erfaring med data-genererende mekanismer, det vil sige simulation.
- Erfaringsbaseret forståelse af betydningsindholdet af usikkerhedsintervaller som f.eks. konfidensintervaller og prediktionsintervaller.
- Brug af deskriptiv statistik (først og fremmest tegninger) til at indkredse en relevant model, og erfaring med at forskellige data-genererende mekanismer får de deskriptive metoder til at reagere forskelligt.
- Et reelt valg mellem flere plausible modeller.

Hvis man sammenligner binomialsandsynligheder i to grupper, skal det fremstå som lige så vigtigt et resultat, hvis binomialsandsynlighederne er forskellige som hvis de er ens, og man skal kunne formulere interessante konklusioner i begge tilfælde (f.eks. konfidensintervaller for den fælles sandsynlighed i tilfælde af at grupperne er ens, separate konfidensintervaller for de to sandsynligheder i tilfælde af at grupperne er forskellige, og eventuelt et konfidensområde for odds ratio). Man skal også have en vis erfaring med trevejstabeller og med hvordan opdeling efter ekstra variable kan ændre konklusionerne.

Hvis man laver regression skal man kunne diskutere forskellige transformationer af data og eller af kovariaten.

Man skal have en vis erfaring med kvadratisk regression og med sammenligning af regressionslinjer fra to eller flere grupper. Man skal kunne uddrage relevante konfidensintervaller, f.eks. for hældningen, i de forskellige tilfælde, og man skal helst også kunne sige noget om usikkerheden i forbindelse med prædiktation af fremtidige observationer.

Vi vil dog gerne i tillæg fremhæve et 3. fokusområde, der er ligeså vigtig som de to ovenstående:

- 3) Grundlæggende usikkerhedsbetragtninger ved brug af normalfordelingen, herunder som det simpleste eksempel: den statistiske usikkerhed ved et stikprøvegennemsnit.

Alle statistiske beregninger kan faktisk ses som en form for gennemsnitsbetragtning, og dette emne lægger derfor den helt fundamentale bund for tilsvarende betragtninger i mere komplekse situationer. Det åbner f.eks. for forskellige relationer til blandt andet laboratoriefag, hvor usikkerheder, fejl og “fejlophobning” er vigtige og i dag underdækkede områder. Selvom normalfordelingen naturligvis ikke kan bruges som det optimale værktøj til alle former for gennemsnitsbetragtninger, så har den netop en helt “central” og nærmest naturlovmæssig rolle i denne sammenhæng på grund af den centrale grænseværdisætning.

Statistik behøver ikke nødvendigvis at blive opfattet som et selvstændigt emne indenfor matematikken, da statistiske problemstillinger kan bruges som indgangsvinkel til eller udgangsvinkel på at lære nye matematiske emner. Eksempelvis lægger lineær regression direkte op til mindste kvadraters metode, simulationstankegangen og simulationer lægger op til prædiktation, integralregning/arealer kan bruges som indgang til sandsynlighedsregning, og generelle funktioner kan bruges som oplæg til modelsammenligninger.

Udfordringer

Vanskeligheden med disse udvidede diskussioner er, at de ikke passer særlig godt ind i den klassiske ramme for matematikundervisning.

- a) En egentlig teoretisk-matematisk behandling af modellerne er for omfattende til at kunne gennemføres på gymnasialt niveau. Derfor foreslår vi at der lægges vægt på simulation og oversættelse af modelnotation til simulationer, og ikke på matematisk udledning af resultater.
- b) Modsat den sædvanlige facon i matematik er der ikke nødvendigvis ét rigtigt svar i sammenligning af modeller.
- c) Det er forestår et udviklingsarbejde om, hvordan man kan inddrage udvidede modelbeskrivelser i den skriftlige studentereksamen. Den ikke-matematiske natur af den undervisning vi foreslår, gør det givetvis nødvendigt at eleverne får adgang til rigtige datasæt af en anseelig størrelse ved eksamen (man skal ikke tænke i 7-8 observationer, som man typisk gør i de aktuelle regressionsopgave - man skal nærmere tænke flere hundrede observationer). Det bliver derfor vigtigt at it-organisation af eksamen der muliggør dataadgang, og at man har optrænet en it-parathed hos eleverne.
- d) Rigtigt mange lærere i gymnasiet vil have brug for en faglig opkvalificering for at kunne varetage denne type undervisning. Dette gælder såvel matematiklærere som alle de tidligere nævnte fagspecifikke lærere. I USA er der allerede nogen, der har udviklet et såkaldt MOOCS (Lee and Stangl 2015), hvor man som lærer kan efteruddanne sig online. Det kan vi i Danmark godt allerede dels benytte direkte og dels lade os inspirere af til at udvikle lignende ting, der er optimeret til den danske gymnasieskole.

Referencer

Bargagliotti, Anna, and Christine Franklin. 2015. "The Statistical Education of Teachers: Preparing Teachers to Teach Statistics." *Chance* 28: 19–27.

"Danske Unge Spores for Dårligt Ind På Fremtidens Arbejdspladser." 11AD–8AD. *Berlingske Tidende*. <http://www.business.dk/arbejdsmarked/danske-unge-spores-for-daarligt-ind-paa-fremtidens-arbejdspladser>.

Diverse forfattere. 2000. "Looking Back on the Millennium in Medicine." *New England Journal of Medicine* 342 (42–49).

Ekstrøm, Claus Thorn, and Per Bruun Brockhoff. 2016. "Balladen Om P-Værdier." *Aktuelt Naturvidenskab*.

Ellis, Keith. 1995. "The Monty Hall Problem." <http://www.montyhallproblem.com/>.

Franklin, C., A. Bargagliotti, C. Case, G. Kader, R. Scheaffer, and D. Spangler. 2015. "The Statistics Education of Teachers." American Statistical Association. www.amstat.org/education/SET/SET.pdf.

Franklin, C., G. Kader, D. Mewborn, J. Moreno, R. Peck, M. Perry, and R. Scheaffer.

2007. “Guidelines and Assessment for Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A PreK-12 Curriculum Framework.” American Statistical Association. <http://www.amstat.org/education/gaise> .

Lee, Hollylynne, and Dalene Stangl. 2015. “Taking a Chance in the Classroom: Professional Development MOOCs for Teachers of Statistics in K-12.” *Chance* 28 (56–63).

Popper, Karl. 2005. *The Logic of Scientific Discovery*. Taylor & Francis, London; New York.

Wasserstein, Ronald L., and Nicole A. Lazar. 2016. “The Asa’s Statement on P-Values: Context, Process, and Purpose.” *The American Statistician* 70 (2): 129–33. <http://www.amstat.org/newsroom/pressreleases/P-ValueStatement.pdf>.

Wikipedia. 2016a. “Big Data.” https://en.wikipedia.org/wiki/Big_data.

———. 2016b. “Simpson’s Paradox.” https://en.wikipedia.org/wiki/Simpson's_paradox.