Ræsonnement ved mundtlig eksamen på B-niveau

Afklaring, eksempler og inspiration

Rapporten er et produkt af et udviklingsprojekt etableret under Matematiklærerforeningen i samarbejde med fagkonsulenten i matematik for stx og hf

Marts 2020

Indholdsfortegnelse

Indledning

Rapporten omhandler det matematiske ræsonnements rolle ved den individuelle delprøve til den mundtlige eksamen i matematik på STX B-niveau, samt på beslægtede eksamensformer som STX C-niveau og HF B- og C-niveau. Teksten er udarbejdet af en arbejdsgruppe nedsat i et samarbejde mellem Matematiklærerforeningen og undervisningsministeriets fagkonsulent i STX/HF matematik, Bodil Bruun.

Læreplanen for STX Matematik B siger om den anden del af den mundtlige eksamen:

> »*Anden del af prøven er en individuel prøve med fokus på matematisk ræsonnement og bevisførelse*«.

Formuleringen betyder hverken, at der ikke længere optræder klassiske beviser på Matematik B-niveau, eller at alle eksamensspørgsmål skal indeholde klassiske beviser. Reformen i 2017 har heller ikke fjernet beviser fra C-niveau. Tilstedeværelsen af et bevis i et eksamensspørgsmål er således ikke et selvstændigt argument for, at spørgsmålet er løftet fra C- til B-niveau.

Teksten her skal bidrage til at præcisere betydningen af det *matematiske ræsonnement* i forbindelse med mundtlig eksamen. Udgangspunktet for teksten er, at alle beviser er ræsonnementer, men at der findes ræsonnementer, som ikke nødvendigvis har karakter af at være klassiske beviser.

Teksten vil give nogle bud på, hvordan eksamensspørgsmål *med* ræsonnement men uden klassisk bevis kan se ud på højeste taksonomiske niveau. Teksten er først og fremmest en samling af eksempler på sådanne eksamensspørgsmål inden for kernestof på STX-matematik B-niveau. Eksemplerne kan enten bruges direkte, i modificeret form eller som inspiration til egne spørgsmål.

Uanset hvordan man behandler de eksempler, der præsenteres i denne tekst, er det vigtigt at huske, at det i sidste ende for ethvert matematikhold er det faktisk behandlede stof (kernestof og supplerende stof), der danner eksamensgrundlaget, og som fører frem til de spørgsmål, der stilles til eksamen.

Den undervisning, der fører et hold frem til eksamen i matematik på B-niveau, kan tilrettelægges på mange måder. De mange variationsmuligheder gør, at et konkret eksamensspørgsmål i sidste ende naturligvis kun kan anvendes på et hold, hvis det passer til de valg, som holdet sammen med holdets lærer har foretaget i det samlede forløb til B-niveau. Et eksamensspørgsmål kan altså aldrig læses alene men skal altid læses sammen med undervisningsbeskrivelsen for holdet.

Efter denne indledning følger et kapitel, hvor vi forsøger at præcisere indholdet i de to begreber *ræsonnement* og *bevisførelse*. Efterfølgende præsenteres nogle af de tanker, vi har gjort os i forsøget på at udforme spørgsmål baseret på ræsonnement uden klassisk bevisførelse.

I hovedtræk opfatter vi begrebet *matematisk ræsonnement* som dækkende en meget bred vifte af kognitive bevægelser, der *på* et foreliggende grundlag, gennem en række følgeslutninger når frem til, at et udsagn er gældende på en måde, som er almindeligt accepteret. Ræsonnementet ligger altså i selve slutningsmåden.

Uanset om ræsonnementet indgår direkte eller indirekte i løsning af en *konkret* opgave, så er denne form for ræsonnement almindeligvis for simpelt til at opfylde kravene om højeste taksonomiske niveau til den mundtlige eksamen. De direkte og indirekte ræsonnementer forbundet med konkret problem- og opgaveløsning testes dels ved gruppedelprøven dels ved den skriftlige eksamen.

Vi har bestræbt os på at udvikle eksempler på spørgsmål, hvor der indgår ræsonnementer, som argumenterer for komplekse pointer af teoretisk art. Det vil sige pointer, som har en rækkevidde ud over et konkret tilfælde.

Det klassiske bevis bliver typisk gennemgået i lærebogen, hvilket gør det lettere for læreren at forberede eleven til eksamen, end hvis det ikke havde stået nogen steder. Af samme grund er der i forlængelse af hvert spørgsmål i nærværende samling beskrevet, hvad eleven kan forventes at sige noget om i forbindelse med det aktuelle ræsonnement, samt hvilke spørgsmål der kan være relevante for læreren at stille. Dette er medtaget her for at beskrive elementerne i holdets eksamensgrundlag, dvs. indholdet i den undervisning, der aktuelt er gået forud for prøven, og som har dannet grundlag for at forberede eleven til at kunne besvare det enkelte eksamensspørgsmål. Spørgsmålene er altså valgt med udgangspunkt i konkrete holds undervisningsbeskrivelser.

Den præcise afgrænsning mellem ”bevis” og ”ikke-bevis”, når vi taler om ræsonnementer, kan diskuteres. Men denne diskussion er ikke nogen forhindring for arbejdet med formulering af flere gode og mere fleksible eksamensspørgsmål.

Arbejdsgruppen bestående af

Christina Cæsarsen
Jette Vestergaard
Kasper Bjering Søby Jensen
Ole Frehr og
Troels Roussau Johansen
Bodil Bruun (fagkonsulent)

Matematiklærerforeningen
Marts 2020

Afklaring af begreber

Et *ræsonnement* er ifølge Politikens Fremmedordbog et produkt af det at *ræsonnere*, mens det at *ræsonnere* betyder "at tænke over og drage en logisk slutning af noget".

Et ræsonnement er altså en kognitiv bevægelse fra et *grundlag* til en *konklusion*, som er begrundet i et sæt af accepterede logiske regler. Det kan være slutningsregler fra formel logik, men det kan også være mere løse slutningsregler baseret på almindelig menneskelig fornuft og intuition. Eksempelvis vores fælles erfaring med og viden om størrelser som tid og rum.

Et *matematisk ræsonnement* er således en slutningsrække af ovenstående karakter, som munder ud i en konklusion, der udsiger noget om matematikkens stofområde. Ved den individuelle delprøve kan dette være et bevis for en sætning, eller det kan være et ræsonnement, der på anden vis begrunder et udsagn af generel karakter. Ræsonnementer knyttet til konkrete eksempler er, som nævnt i indledningen, ikke tilstrækkelige.

Det matematiske bevis er i sig selv et eksempel på et matematisk ræsonnement kendetegnet ved, at der stilles særligt høje krav til den nøjagtighed, hvormed der på et grundlag sluttes til et udsagn. Bevisførelsen er således karakteristisk ved, at de enkelte skridt i argumentationen samt rækkefølgen af disse skridt, kun kan have en meget begrænset variation. Så selvom der kan være flere forskellige beviser for samme sætning, er de hver især kendetegnet ved at have en låst form.

Omvendt findes der også matematiske ræsonnementer, hvor slutningen må regnes for meget simpel grænsende til det potentielt ubevidste. Grundlæggende kan intet matematisk spørgsmål besvares, uden at der indgår en eller anden form for ræsonnement. Det kan f.eks. være indirekte, ved at der sluttes fra et spørgsmål til den konkrete operation, der skal udføres ved iværksættelse af matematisk færdighed. I lidt mere komplekse opgaver kan selve besvarelsen være baseret direkte på et ræsonnement, hvor der fra tidligere viden om opgavesituationen sluttes til et svar på opgaven.

Læreplanen for matematik B siger, at den mundtlige prøve er todelt. Om første del (gruppedelen) siges at »*prøven er en problemorienteret prøve med fokus på matematikkens anvendelser*«. Om anden del (individuel del) siges at »*prøven er en individuel prøve med fokus på matematisk ræsonnement og bevisførelse*«.

De to delprøver har således et forskelligt fokus på, hvilken del af elevens matematiske kompetence de skal evaluere. I denne tekst er fokus alene på den *individuelle delprøve* – det vil i hovedsagen sige evaluering af elevens ræsonnementskompetence.

I vejledningen står der som fælles bedømmelseskriterier ved individuel mundtlig prøve på alle tre niveauer følgende punkter (nummereringen er tilføjet her – i vejledningen er det pinde):

»*…[der] lægges særlig vægt på, om eksaminanden:*

1. *kan præsentere et konkret afgrænset matematisk emne på en klar og overskuelig måde.*
2. *demonstrere indsigt i matematisk teori og karakteristiske sider af matematisk ræsonnement og bevisførelse.*
3. *kan håndtere matematisk symbolsprog og operere med matematiske begreber.*
4. *kan med eksperimenterende metoder og en logisk følge af matematiske ræsonnementer argumentere for en matematisk påstand og/eller opstille en matematisk model.*
5. *har overblik over og kan perspektivere et konkret afgrænset matematisk emne.*«

De her præsenterede forslag til eksamensspørgsmål vil således tage afsæt i, at de skal kunne bruges til at bedømme eleven ud fra disse fem punkter. Det bemærkes, at særligt punkt 2 og 4 eksplicit nævner ræsonnementet som et bedømmelsesgrundlag.

I vejledningen står endvidere:

> »*Spørgsmålene skal tilsammen dække de faglige mål, kernestof og supplerende stof. Spørgsmålene skal udformes med en overskrift og et eller flere konkrete delspørgsmål, som dog hverken må indeholde en disposition for eksaminationens forløb eller stikord til samtaledelen, og der skal levnes plads til, at eleven selv kan udvælge og disponere stoffet.*«

De foreslåede spørgsmål forsøger at give eksempler fra kernestoffet, da det supplerende stof kan vælges meget forskelligt på de enkelte hold. Vi har forsøgt at ramme et format, hvor der på den ene side stilles konkrete spørgsmål og på den anden side ikke gives en disposition. Det er således forsøgt undgået, at der stilles implicitte krav. Eksempelvis bør der forud for spørgsmålet ”Bevis toppunktsformlen for andengradspolynomier” være et eksplicit krav om, at der forklares noget om andengradspolynomier. En sådan forklaring bør ikke forventes implicit i spørgsmålet.

Endeligt står der i vejledningen:

> »*Beder man om en* redegørelse *for en given påstand, så svarer det i matematik til det højeste taksonomiske niveau, forstået på den måde, at kravet til eksaminanden vil være en gennemgang af et bestemt bevis eller en udledning af et bestemt udtryk gennem en logisk følge af matematiske ræsonnementer. Ordet er således ækvivalent med ord som ”bevis” eller ”udled”. Beder man om en* forklaring *på, hvad en given påstand går ud på, så er kravet på et lavere taksonomisk niveau, og en fuld besvarelse vil ikke kræve, at eksaminanden beviser eller udleder noget, men i stedet at eksaminanden fx forklarer, hvilken mening påstanden giver, og hvor den finder anvendelse.*«

Her præciseres betydningen af to former for opdrag i et spørgsmål. Ordet *forklar* udpeger et emne, der skal forklares med korrekt brug af notation og begreber, men uden et underbyggende ræsonnement. Ordet *redegør* (eller ækvivalente udtryk som *udled* og *bevis*) kræver, at eksaminanden besvarer spørgsmålet med et grundigt og gennemført ræsonnement på *højeste taksonomiske niveau*.

Disse to ord vil blive brugt i spørgsmålene som markører for, med hvilken dybde eleven skal behandle det pågældende delspørgsmål. Ordet *redegør* er således markør for eksamensspørgsmålets centrale ræsonnement(er). Elever bør gennem undervisningen trænes i brugen af og forskellen på disse to ords betydning i god tid inden eksamen.

Almindeligvis vil den lavt præsterende, men beståede elev, ikke komme ret dybt med det redegørende spørgsmål (dvs. det centrale ræsonnement) på egen hånd. En elev på dette niveau vil primært præstere på ovennævnte bedømmelseskriterier 1 og 3.

En elev, der præsterer på middelniveau, vil til gengæld selvstændigt komme i gang med det centrale ræsonnement, mens den højt præsterende elev vil gennemføre ræsonnementet og kunne svare reflekteret på uddybende spørgsmål til de forskellige trin i ræsonnementet.

Hvad er et simpelt ræsonnement?

Det simple ræsonnement rækker som nævnt ikke til, at den dygtige elev kan præstere på højeste taksonomiske niveau ved den individuelle delprøve. Det indirekte og direkte simple ræsonnement vil dog kort blive præsenteret her for at gøre afgrænsningen klarere.

Hvis en opgave indeholder en funktion givet ved en forskrift $f(x)$, vil besvarelse af spørgsmål som ”Bestem $f(4)$” og ”Bestem $f'(x)$” først og fremmest kræve aktivering af basale færdigheder. Men forud for denne aktivering vil der gå et *simpelt indirekte* ræsonnement, hvor man ud fra symbolsproget i opgaven finder frem til en konkret færdighed eller kompetence, som derpå aktiveres.

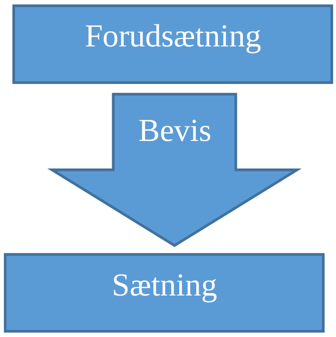
Et spørgsmål af typen ”Bestem monotoniforhold for f” vil kræve aktivering af samme type basale færdigheder, men vil derudover kræve aktivering af et *simpelt direkte* ræsonnement, hvor der sluttes fra fortegnsvariationen for f' til monotoniforhold for f.

I en opgave om to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, hvor der i en eller flere koordinater indgår en parameter t, vil spørgsmålet ”Bestem $\vec{a} \cdot \vec{b}$ for $t = 2$” kræve et simpelt indirekte ræsonnement, for at aktivere de nødvendige færdigheder, mens spørgsmålet ”Bestem t, så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale” i højere grad vil kræve et direkte ræsonnement, hvor der sluttes fra ”ortogonale” til ”løs ligningen $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$”.

Pointen er, at alle besvarelser af selv simple matematiske spørgsmål kræver et mere eller mindre simpelt ræsonnement, enten indirekte for at aktivere korrekte færdigheder eller direkte for at opnå selve svaret. Sådanne simple ræsonnementer kan ikke tilfredsstille kravene om ræsonnement på højeste taksonomiske niveau til den individuelle mundtlige delprøve.

Hvad er et bevis?

Et *matematisk bevis* er et matematisk ræsonnement, som godtgør, at en matematisk sætning er sand. Beviset slutter på grundlag af det, der går forud for sætningen, dvs. *forudsætningerne,* om sætningen er sand (eller falsk).



Sætningen er byggestenen i den matematiske teori. Når vi opbygger en matematisk teori om f.eks. geometrien, så er teorien opbygget af en masse sætninger, der udsiger vigtige generelle ting om geometriske objekter som linjer, trekanter og cirkler.

Begrebet ”sætning” har ikke en præcis og beskyttet betydning. Det kan sagtens anvendes på mange forskellige måder og bliver anvendt på mange måder.

F.eks. kan udsagnet ”$p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 7$ har mindst én rod” godt opfattes som et udsagn, der skal bevises ved at kombinere kontinuitetsegenskaben med eksistens af både negative og positive funktionsværdier. Men her vil vi opfatte dette som en konkret opgave, der løses med et *direkte simpelt ræsonnement*. Vi vil ikke opfatte argumentet som *et bevis*.

Derimod ville udsagnet ”Alle polynomier af ulige grad har mindst én rod” blive opfattet som en sætning, fordi den udsiger noget generelt om en stor gruppe af objekter. Et stringent ræsonnement, der godtgør sandheden af udsagnet, vil vi således opfatte som *et bevis*.

Denne måde at skelne mellem ”bevis” og ”konkret problemløsning” er ikke autoritativ. Man vil kunne finde matematiske tekster, der anvender ordet ”bevis” om det at løse et konkret problem ved ræsonnement. Men i forhold til at afgrænse hvad der forventes til den individuelle delprøve, så giver det mening her at skelne mellem de to ting på ovennævnte måde.

Bevisets stringente slutningsform har stor indvirkning på, hvordan beviset kan fremstilles. Hvis man ser på beviset for løsningsformlen for andengradsligningen, kan det se således ud:

Givet ligningen $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, hvor $a \neq 0$

Begge sider af ligningen ganges med $4a$:

$4a^2 \cdot x^2 + 4ab \cdot x + 4ac = 0$

Ligningen omskrives bl.a. ved brug af potensregneregler og $4ac$ trækkes fra:

$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b = -4ac$

Ved at lægge b^2 til, kvadratkompletteres venstre side:

$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 = b^2 - 4ac$

Venstre side omskrives til et kvadrat og på højresiden defineres $d = b^2 - 4ac$

$(2ax + b)^2 = d$

For $d < 0$ ses at ligningen *ingen* løsning har, da $(2ax + b)^2$ aldrig kan være negativ.

For $d = 0$ ses at $2ax + b = 0$, hvorfor $x = -\frac{b}{2a}$

For $d > 0$ ses at $2ax + b = \pm\sqrt{d}$, hvorfor $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$

Der er tale om en meget præcis argumentation, hvor hvert enkelt skridt begrundes med henvisning til forudsætninger i form af tidligere viste sætninger, definitioner og antagelser.

Der er ikke meget rum til variation. Det er svært at forestille sig, at ræsonnementerne i beviset udføres i andre rækkefølger end den beskrevne. Beviset kan naturligvis gennemføres på andre måder end den beskrevne, men også disse vil fremstå "låste".

Den svage præstation vil være kendetegnet ved en elev, der hurtigt går i stå og må fortsætte i dialog med eksaminator. Den gode elev vil nå igennem beviset på egen hånd og vil efterfølgende kunne svare på uddybende spørgsmål til de indgående ræsonnementer.

Beviset vil typisk stå i sin låste form i elevens lærebog. Eksamen er således ikke en afprøvning af, om eleven kan "finde på" et godt bevis, men en afprøvning af, om eleven i sin fremstilling kan genfortælle beviset, som det står i lærebogen, med klar præcisering af tankegangen i de forskellige trin, samt besvare spørgsmål fra lærer og censor, der dokumenterer, at argumentationstrinene og beviset er forstået.

Hvad er et passende ræsonnement, som ikke er et bevis?

De simple ræsonnementer afprøves som sagt i forbindelse med den problemløsning, der knytter sig til dels den skriftlige eksamen, dels gruppedelprøven. Disse ræsonnementer kan ikke opfylde kravene til den individuelle delprøve.

Vi vil her forsøge at skitsere ideen om et *teoriunderbyggende ræsonnement* som et ræsonnement, der begrunder gyldigheden af et teoretisk udsagn (dvs. et udsagn, der helt eller delvist udtaler sig generelt om noget). Det er oplagt, at beviser i sig selv er teoriunderbyggende ræsonnementer, men begrebet kan sagtens rumme meget mere.

Et eksempel kunne være spørgsmålet "*Redegør for antallet af skæringspunkter mellem to cirkler*". Her kunne der naturligvis opstilles en sætning med et tilhørende formelt bevis. Men spørgsmålet kan også undersøges på andre måder, hvor der blandt andet anvendes intuition, tegninger, mv.

Den svage elev kan starte med at tegne to cirkler og vise, at de kan have to skæringspunkter, samt en mere, der viser, at der ikke behøver at være skæringspunkter. Derpå kan følge en overvejelse om, at der også kan være ét skæringspunkt.

Dernæst kan den lidt stærkere elev tale videre om, hvad afstanden mellem cirklernes centre og størrelsen af deres radier betyder. Hvis radierne til sammen er mindre end afstanden mellem centrene, er det f.eks. oplagt, at der ikke er nogen skæringspunkter. Hvis radierne er lig hinanden, er der oplagt, netop ét. Men hvad nu hvis afstanden er mindre end summen af radierne? Ja, så bliver der yderligere noget at tale om.

Den stærkere elev vil kunne gå mere stringent til værks og indføre symboler for afstanden mellem centrene og for radierne og herud fra opstille udtryk for, hvornår antallet af skæringspunkter er henholdsvis 0, 1 og 2 (samt uendeligt). Og den rigtig stærke elev vil systematisk inddrage cirklens definitoriske egenskaber i argumentationen frem for et intuitivt cirkel-begreb.

Nogle elever vil måske gå den algebraiske vej, hvor de viser, at problemet i bund og grund kan omskrives til en andengradsligning, hvorfor der må være 0, 1 eller 2 løsninger.

Hovedpointen er, at det teoriunderbyggende ræsonnement potentielt kan udføres på mange niveauer og ikke er låst til en bestemt form og rækkefølge. Eleven har dermed god mulighed for at gå til problemet fra forskellige vinkler og vise bredden i sine matematiske kompetencer.

Hovedformålet med denne samling af eksamensspørgsmål er at give gode forslag til, hvordan sådanne teoriunderbyggende ræsonnementer, som ikke har karakter af regulære stringente (lærebogs-)beviser, kan se ud. Diskussionen om, hvorvidt nogle af ræsonnementerne rent faktisk burde kaldes beviser, er *ikke* relevant. Det centrale er arbejdet med ræsonnementet.

En diskussion her er, i hvilket omfang et teoriunderbyggende ræsonnement som ovennævnte skal kunne læses i fast form, på samme måde som et bevis kan læses i en lærebog. Det vil være tiltalende at et ræsonnement sker frit, så vi i højere grad tester evnen til at ræsonnere end evnen til at genfortælle. Det er dog vigtigt at ræsonnementet, der testes til eksamen, har været behandlet i undervisningen.

I denne tekst har vi forsøgt at supplere forslagene til spørgsmål med en kort note, der gennemgår et bud på, hvad man kan forvente af en elevs besvarelse, og hvilke spørgsmål en elev kan stilles. I sagens natur kan det se ud på mange forskellige måder, men noten giver en mulighed for at få indblik i det undervisningsgrundlag, som det konkrete ræsonnement er en del af eller udspringer fra.

Den individuelle mundtlige eksamen bygger på kendte eksamensspørgsmål formuleret med udgangspunkt i stof, der er behandlet på holdet. Det er således ikke intentionen, at eleverne til prøven skal besvare spørgsmål, som ikke allerede er besvaret i forbindelse med undervisningen.

Eksamensspørgsmål og bedømmelse

I formuleringen af eksamensspørgsmål bør der tages hensyn til de bedømmelseskriterier, der tidligere er omtalt. Samtidig bør kravet om, at spørgsmålet på den ene side indeholder konkrete delspørgsmål og på den anden side ikke indeholder en disposition, også opfyldes.

Det ovennævnte teoriunderbyggende ræsonnement kunne eksempelvis indbygges i følgende spørgsmål, der har samme struktur som mange spørgsmål med klassiske beviser:

> »Forklar hvordan figurerne punkt, linje og cirkel kan fremstilles i et koordinatsystem.
> Ligningerne for såvel linje og cirkel samt formlen for afstand mellem to punkter skal indgå.
> Redegør for antallet af skæringspunkter mellem to cirkler.«

Her bruges signalordet *forklar* til at udpege et bredere område, der ønskes en mindre grundig oversigtspræsentation af, mens signalordet *redegør* bruges til at markere, hvor der ønskes et dybt og grundigt ræsonnement.

Den svage elev vil typisk opnå sin karakter (02 eller 4) ved dels de forklarende dele af spørgsmålet, som typisk har vægt på bedømmelseskriterierne 1 og 3 (præsentere et konkret afgrænset matematisk emne samt håndtere symbolsprog og operere med begreber), dels ved i tæt dialog med eksaminator at vise kendskab til de simpleste sider af redegørelsen.

Den stærkere elev, som skal opnå de højere karakterer (7 og 10) må nødvendigvis også være i stand til at kunne begå sig selvstændigt i de redegørende dele af spørgsmålet. Det vil sige, at eleven vil kunne dokumentere en dybere indsigt i teori, ræsonnement og eventuelt bevisførelse. Men naturligvis er der rum for huller i argumentationen for disse elevers præstationer.

Eleven, der skal opnå den højeste karakter (12), må som udgangspunkt kunne præstere med kun få og uvæsentlige fejl og mangler inden for alle bedømmelseskriterierne. Det er imidlertid ikke et krav, at der indgår et klassisk bevis i eksaminationen for at opnå højeste karakter. Det er alene et krav, at eleven dokumenterer evnen til at ræsonnere på højeste taksonomiske niveau.

I læreplanen hedder det, at der lægges vægt på, om ”eksaminanden demonstrerer indsigt i matematisk teori og matematisk ræsonnement”. En censor (eller eksaminator) der kun vil give højeste karakter til en elev, som har præsenteret et klassisk bevis for en sætning, overholder således ikke læreplanens bestemmelser.

Hvis den daglige undervisning både indeholder beviser og matematiske ræsonnementer, bør eksamen også gøre det. Det ene er ikke ’finere’ end det andet - de er ligeværdige. Herunder følger arbejdsgruppens eksempler på mundtlige eksamensspørgsmål, hvor der indgår matematisk ræsonnement men ikke bevis. Vi håber, at disse spørgsmål vil blive diskuteret ude i faggrupperne og være til inspiration.
Kommentarer kan sendes til Ole Frehr på mail: of@nyborg-gym.dk

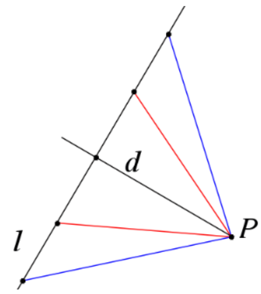
Spørgsmål 1: Analytisk geometri

Forklar hvordan figurerne punkt og linje fremstilles i et koordinatsystem, herunder såvel ligning som parameterfremstilling for linjen og bestemmelse af afstand mellem punkt og linje. Redegør for cirkler, herunder for antallet af skæringspunkter mellem linje og cirkel.

Hvad skal eleven tale om?

Spørgsmålet inviterer eleven til først at give en bred introduktion til centrale begreber og formler i den analytiske geometri, herefter til at gå i dybden med cirklen og via ræsonnementer komme frem til, hvad der kan siges om antal skæringspunkter mellem en linje og en cirkel. Undervisningsgrundlaget er altså den analytiske geometri fra kernestoffet.

Under *forklaringen* kan eleven komme ind på grundlæggende egenskaber ved koordinatsystemet, samt hvordan de tre typer af figurer kan fremstilles ved ligning og for linjens vedkommende også ved parameterfremstilling.



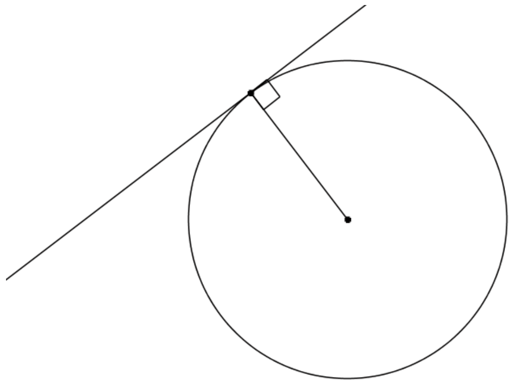
Endvidere præsenteres bestemmelse af afstand fra punkt til linje. I forbindelse med dette kan eleven med fordel uddybe lidt om hvordan punkterne på linjen ligger i forhold til punktet P. Herunder at der er ét punkt i den beregnede afstand, samt at punkterne rundt om alle ligger længere væk (og alle længere afstande findes), samt at de to og to ligger i samme afstand fra P.

I den centrale *redegørelse* kan eleven tegne en cirkel og forklare om cirklens grundlæggende egenskaber: Centrum og radius. Eleven kan præsentere og gerne udlede ligningen for cirklen ud fra de to egenskaber. Og eleven kan tegne en linje og forklare om mulige antal af skæringspunkter mellem cirkel og linje.

Eleven kan argumentere for, at hvis afstanden fra punkt til linje er større end radius, er der ingen skæringspunkter, hvis den er mindre, er der to skæringspunkter, og er de lig med hinanden, vil der være netop ét skæringspunkt (dvs. linjen er "en tangent").

Disse principper kan for $\mathrm{dist}(P, l) = d$ formuleres symbolsk som $d > r$, $d < r$ og $d = r$. Herunder kan eleven netop argumentere ud fra egenskaber ved "afstand fra punkt til linje" for disse tre situationer. F.eks. hvorfor der faktisk er netop to skæringspunkter for $r > d$.

Eleven kan argumentere for at den korteste afstand fra punkt til linje netop står vinkelret på linjen, hvorfor den radius, der rammer linjen, står vinkelret på denne.



Eleven har også mulighed for at gå til problemet algebraisk. Eleven kan vise grundprincippet i at opstille og løse en ligning til at findes skæringspunkter med, herunder at dette bliver en andengradsligning, som netop kan have 0, 1 eller 2 løsninger.

Hvad kan man spørge eleven om?

For den stærke elev, der selv gennemfører ræsonnementet, er der mulighed for at gå videre og bede eleven tale om en algebraisk formulering af problemet med antal skæringspunkter, herunder hvordan dette giver anledning til en andengradsligning med 0, 1 eller 2 løsninger.

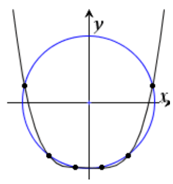
For den mindre stærkere elev, der selv kan forklare om mulige antal skæringspunkter, kan man bede om at der indføres tegn for centrale størrelser, og at sammenhænge opskrives formelt.

For den svage elev kan der tages afsæt i et eksempel: $(x-3)^2+(y-2)^2=25$ og $y=2x+1$

For den helt svage elev, der har svært ved at komme i gang med redegørelsen, kan man bede eleven om at tegne en cirkel på tavlen og ud fra denne tale om, hvad der kendetegner en cirkel. Herefter kan man bede eleven tegne en vilkårlig ret linje og spørge til skæringspunkter mellem denne og cirklen. Da eleven formentlig har tegnet en linje uden skæringer med cirklen, kan man bede eleven tegne en linje der skærer cirklen (alternativt kan det gøres omvendt). Ud fra dette kan man tage en snak med eleven om, hvad der kendetegner de to situationer.

Som ideer til fortsat faglig dialog, når dialogen om selve spørgsmålet er afsluttet, kan nævnes:

- Hvad med skæringspunkter mellem en cirkel og en vandret- eller lodret linje?
- Hvad er vektorernes rolle i analytisk geometri (f.eks. normal- og retningsvektor for linje)?
- Hvad med vektorer i forhold til tangenter?
- Hvad med skæringspunkt mellem to linjer. Kan ”afstand mellem punkt og linje” bruges her?
- Lidt sværere perspektiverende spørgsmål: Hvad med en figur som parablen – hvor mange skæringspunkter kan den have med en ret linje? Og med en cirkel? Hvorfor kan der ikke være 6 skæringspunkter som antydet til højre.



Spørgsmål 2: Analytisk geometri

Forklar hvordan figurerne punkt, linje og cirkel kan fremstilles i et koordinatsystem, herunder ligningerne for såvel linje og cirkel samt afstand mellem to punkter. Redegør for antallet af skæringspunkter mellem to cirkler.

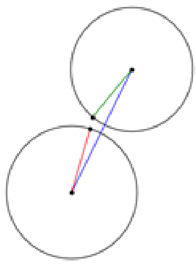
Hvad skal eleven tale om?

Spørgsmålet inviterer eleven til først at give en bred introduktion til centrale begreber og formler i den analytiske geometri, herefter til at gå i dybden med cirklen og via ræsonnementer komme frem til hvad der kan siges om antal skæringspunkter mellem to cirkler.
Undervisningsgrundlaget er altså den analytiske geometri fra kernestoffet.

Under *forklaringen* kan eleven komme ind på grundlæggende egenskaber ved koordinatsystemet, fremstillinger af de tre figurtyper punkt, linje og cirkel, samt egenskaber ved disse. Særligt bør eleven omtale ”afstand mellem to punkter”, gerne med omtale af Pythagoras sætning.

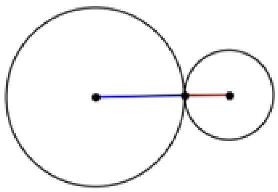
I det centrale *ræsonnement* kan eleven tegne to forskellige cirkler og forklare, hvad der gør de to cirkler forskellige (her er begreberne ”centrum” og ”radius” helt centrale). Tegningen kan ske såvel på en tavle som i et dynamisk geometriprogram.

Eleven kan ved eksempler vise, hvad antallet af skæringspunkter mellem to cirkler kan være. Her er det vigtigt at kunne argumentere for 0, 1 og 2. Det mere eksotiske tilfælde med ”uendeligt mange” vil nok kun den dygtige elev komme ind på.

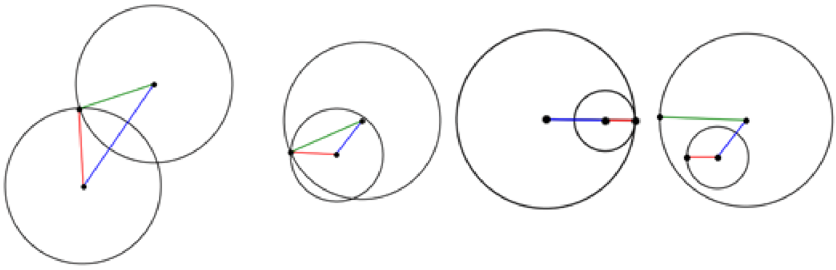


Eleven bør herefter komme ind på de tre centrale længder i problemstillingen med to cirkler, nemlig cirklernes radier og afstanden mellem cirklernes centre. Eleven bør her rimelig nemt komme frem til, at hvis radierne til sammen er kortere end afstanden mellem centrene, så er der ingen skæringspunkter.

På samme måde kan eleven også se, at den situation, hvor radierne tilsammen udgør afstanden mellem centrene, udgør et særligt tilfælde, hvor der er netop ét skæringspunkt.



Det springende punkt er det tilfælde, hvor radierne tilsammen er længere end afstanden mellem centrene. Det virker oplagt ved første øjekast, at der her er to skæringspunkter, men situationen er mere tricky end som så, fordi der også kan være 0 og 1, som illustreret herunder.



Eleven har altså her god mulighed for at vise evnen til at ræsonnere over problemstillingen på en række forskellige niveauer.

Den dygtige elev vil vælge at indføre symboler for radierne, f.eks. r_1 og r_2, samt et symbol for afstanden mellem centrene, f.eks. $|C_1C_2| = d$. Her vil tilfældene $r_1 + r_2 < d$ og $r_1 + r_2 = d$ være de simple tilfælde, mens eksemplet $r_1 + r_2 > d$ giver anledning til en mere kompliceret situation.

Den dygtige elev vil se, at der også er et skel, når man sammenligner $|r_2 - r_1|$ med d.

En dygtig elev vil formentlig også kunne løse problemstillingen ved at opstille en andengrads-ligning, der repræsenterer problemet med skæringspunkterne.

Hvad kan man spørge eleven om?

Den knapt så svage elev, som godt selv kan komme i gang med overvejelserne, kan opfordres til at indføre symbolsk notation og udtrykke opgavens sammenhænge ved brug af denne.

Den svage elev, der ikke selv kan komme i gang, kan læreren bede om at tegne to *forskellige* cirkler og diskutere, hvorfor de er forskellige. Herefter kan man tale om skæringspunkter og bede eleven tegne to cirkler, der har skæringspunkter, og bruge disse som afsæt for dialogen.

Som ideer til fortsat faglig dialog, når dialogen om selve spørgsmålet er afsluttet, kan nævnes:

- Kan der være andet end 0, 1 eller 2 skæringspunkter (hvad hvis cirklerne er ens?).
- Kan problemet løses ved beregning? Kan dette bruges til at bestemme antal skæringer?
- Hvad kan der siges om antal skæringspunkter med andre figurer? F.eks. linje og parabel.

Spørgsmål 3: Polynomier og differentialregning

Forklar om andengradspolynomiet, herunder forskrift, graf, toppunkt og rødder. Redegør for sammenhængen mellem koefficienterne i forskriften og grafens udseende.

Hvad skal eleven tale om?

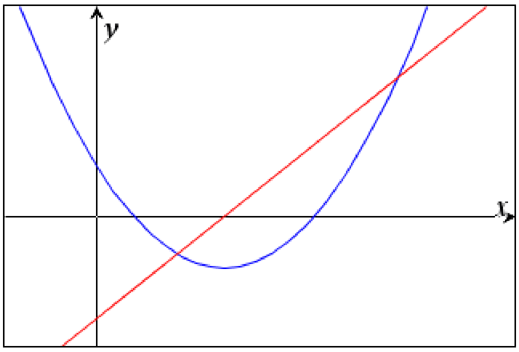
Spørgsmålet inviterer eleven til først at give en bred introduktion til andengradspolynomiet som funktion, for herefter at gå særligt i dybden med sammenhængen mellem forskrift og graf. Undervisningsgrundlaget er altså emnet funktioner, herunder særligt andengradspolynomiet.

Under *forklaringen* kan eleven komme ind på forskriften og grafen for andengradspolynomiet. Her vil en introduktion til parablen som figur, herunder ”toppunkt” og ”parabelgrene” være en oplagt indgang. Også relevante formler bør præsenteres, f.eks. for toppunkt og nulpunkt(er). Eleven kan også med fordel finde den afledede funktion.

Eleven bør her give en introduktion af sammenhængen mellem graf og forskrift, da det er disse sammenhænge der skal argumenteres for i den redegørende del.

I det centrale *ræsonnement* kan eleven starte med at bestemme $f(0) = c$ og $f'(0) = b$ og give en fortolkning af disse to værdier. Eleven kan evt. også komme ind på, at tangenten til $(0, c)$ har ligning $y = b \cdot x + c$.

Eleven kan herefter tegne grafen for f og f'. Her vil eleven være nødt til at kunne ræsonnere over sammenhængen mellem graferne for f og f'. I første omgang placeringen af nulpunktet for f' samme sted som toppunktet for f. Herefter skal grafen for f' passe med forløbet af grafen for f. Der er grundlæggende to varianter afhængigt af, hvilken vej parabelgrenene på grafen for f peger.



I forklaringen af grafen for f' kan eleven trække på sin viden om lineære funktioner, herunder at funktionen har hældningstallet $2a$. Viden om, hvorvidt $2a$ er positiv eller negativ, kan anvendes til at argumentere for fortegnet for a afhængigt af udseendet af grafen f.

Det vil også være muligt for eleven at argumentere for betydningen af skæringspunktet mellem grafen for f og andenaksen, hvis eleven ikke fik beregnet $f'(0)$.

Eleven har også mulighed for at diskutere diskriminanten, som bestemmes ud fra koefficienterne. Her har eleven mulighed for at tale om andengradsligninger og benytte teorien omkring løsning af disse til at tale om antallet af nulpunkter. Eleven kan også tale om bestemmelse af eventuelle nulpunkter.

Hvad kan man spørge eleven om?

For den stærkere elev vil dialogen kunne kredse om forløbene af f og f'. Hvor skal f' have nulpunkt – hvilket punkt på grafen for f har med dette nulpunkt at gøre? Hvad skal gælde om grafen for f', der hvor f er voksende/aftagende? Hvad betyder det for hældningen på grafen for f', og hvad fortæller denne hældning om værdien af a.

For den mindre svage elev kan dialogen måske i højere grad kredse om f'. Hvilken type funktion er det, og hvad ved man om den funktionstype? Hvad er symbolet for hældningen på dens graf? Hvad er dens skæring med andenaksen, og hvad fortæller det om grafen for f?

For den svage elev kan en dialog starte med konkret spørgsmål som ”Tegn en parabel”, ”Skriv forskriften for et andengradspolynomium”, ”Find den afledede funktion”, ”Beregn $f(0)$ og fortolk tallet”, ”Udpeg skæringspunktet med y-aksen og fortæl hvad x er i det punkt”.

Som ideer til fortsat faglig dialog, når dialogen om selve spørgsmålet er afsluttet, kan nævnes:

- Hvad ville der ske, hvis vi tillod $a = 0$? Kan også stilles som et spørgsmål om førstegradspolynomier, herunder om samme analyse kan laves for disse.
- Hvad sker der, hvis $b = 0$?
- Hvad er sammenhængen mellem koefficienter og diskriminant? Hvad fortæller diskriminanten om forløbet af grafen for f. Hvorfor?
- Hvordan ser et tredjegradspolynomium ud? Hvad ved vi om den afledede for en sådan funktion? Kan vi lave en tilsvarende analyse for denne?

Spørgsmål 4: Polynomier og differentialregning

Forklar om polynomier, herunder særligt forskrift og karakteristika ved graferne for første- og andengradspolynomier. Redegør for sammenhængen mellem et polynomiums grad og dets maksimale antal nulpunkter og maksimale antal lokale ekstrema.

Hvad skal eleven tale om?

Spørgsmålet inviterer eleven til at omtale polynomier generelt, men særligt omtale første- og andengradspolynomiernes grafer.
Undervisningsgrundlaget for spørgsmålet er den almindelige omtale fra kernestoffet af funktioner, lineære funktioner, andengradspolynomier og polynomier generelt.

Under *forklaringen* kan eleven give en generel introduktion til begrebet polynomium, herunder ideen om "grad". Eleven skal særligt omtale polynomier af grad 1 og 2 med fokus på disses grafer.

Her er det mest interessante for resten af spørgsmålet at kortlægge antallet af nulpunkter og lokale ekstremumspunkter for polynomier af disse to grader. Eleven kan i den forbindelse omtale relevante formler for bestemmelse af nulpunkter samt toppunkt for andengradspolynomiet.

I det centrale *ræsonnement* kan eleven ud fra antal nulpunkter og lokale ekstremumspunkter for polynomier af grad 1 og 2 generalisere til antallet for polynomier af grad 3, 4 og n. Dermed opnås en formodning om, at et polynomium af grad n har højest n nulpunkter og $n-1$ lokale ekstrema.

Eleven kan herefter se på et polynomium f af grad $n+1$ og overveje med sin viden om differentialregning, at den afledede funktion f' er et polynomium af grad n. Hvis formodningen er korrekt, har f' altså højest n nulpunkter.

Herefter kan viden om sammenhæng mellem f og f' anvendes til at overveje, hvor mange lokale ekstrema f højest har, hvis f' højest har n nulpunkter… nemlig højest n ekstremumspunkter.

Endeligt kan eleven overveje, hvor mange nulpunkter f højest kan have, hvis f højest har n lokale ekstremumspunkter. Her kan det overvejes, f.eks. ud fra tegning af graf, at når en graf har passeret førsteaksen én gang, kræves et lokalt ekstremumspunkt for at den kan passere én gang til. Hvis der er n lokale ekstremumspunkter, kan grafen højest passere førsteaksen $n+1$ gange.

Eleven har altså nu vist, at hvis et polynomium af grad n højest har n nulpunkter, så har et polynomium af grad $n+1$ højest $n+1$ nulpunkter (og n lokale ekstremumspunkter). Hermed kan der lavet et induktions-ræsonnement for, at det faktisk gælder.

Et polynomium af grad 1 kan vises at have ét nulpunkt, hvorfor et polynomium af grad 2 har (højest) ét lokalt ekstremum og dermed højest 2 nulpunkter. Dermed har et polynomium af grad 3 højest 2 lokale ekstrema og dermed højest 3 nulpunkter… og så videre. Et polynomium af grad n vil derfor vise sig at have højest n nulpunkter og dermed højest $n-1$ lokale ekstrema.

Hvad kan man spørge eleven om?

Med den mindre svage/stærkere elev kan man starte med at diskutere karakteren af den afledede funktion til et polynomium af grad n, samt hvilke sammenhænge der er mellem en funktion og dens afledet. Eventuelt spørge specifikt til nulpunkter og lokale ekstremumspunkter.

For den svage elev kan dialogen starte med tegning af grafer for første- og andengradspolynomier. Herefter kan eleven vise, at afledet funktion til andengradspolynomiet er et førstegradspolynomium og desuden forklare, hvilke sammenhænge der er mellem funktion og afledet. Man kan også diskutere, hvordan vi kan være sikre på, at førstegradspolynomiet kun har ét nulpunkt, og hvad det betyder for andengradspolynomiets graf.

Som ideer til fortsat faglig dialog, når dialogen om selve spørgsmålet er afsluttet, kan nævnes:

- Man kan bede eleven overveje, hvor mange nulpunkter et andengradspolynomium rent faktisk kan have, og hvad det i hver situation betyder for det mulige antal ekstremumspunkter for tredjegradspolynomiet. Ud fra dette kan eleven forsøge at skitsere grafen for tredjegradspolynomiet i hver af de omtalte situationer.
- I forlængelse af ovennævnte kan samme overvejelse gøres for fjerdegradspolynomiet ud fra den viden, der da er opnået om andengradspolynomiet.
- Der kan spørges til den generelle betydning af $f(0)$ og $f'(0)$ for et vilkårligt polynomium.
- Der kan spørges til, om alle antal fra 0 til n hhv. $n-1$ af nulpunkter og lokale ekstrema kan forekomme? Dette kan evt. indledes med et generelt spørgsmål om hvordan grafen for et polynomium ”starter og slutter” i forhold til graden (lige/ulige).

Spørgsmål 5: Polynomier og differentialregning

Forklar om andengradspolynomiet, herunder forskrift, graf, toppunkt, rødder og afledet funktion. Redegør for bestemmelse af hældning på tangenter til andengradspolynomiets graf, herunder særligt tangenter med skæringspunkterne med akserne samt toppunktet som røringspunkt.

Hvad skal eleven tale om?

Spørgsmålet inviterer til generelt at tale om andengradspolynomiet og de egenskaber der knytter sig til det. Særligt bestemmelse af tangenthældning står centralt.
Undervisningsgrundlaget for spørgsmålet er kernestoffets behandling af andengradspolynomier samt den mere generelle behandling af funktionsbegrebet og differentialregning.

I den bredere *forklaring* kan eleven komme bredt rundt om andengradspolynomiet med omtale af forskrift og graf samt sammenhængen mellem disse to, formler for nulpunkter og toppunkter samt forskrift for den afledede funktion.

I det centrale *ræsonnement*, bør eleven starte med at forklare om tangenter, tangenthældninger og forbindelsen til den afledede funktion. Der er ikke tanken at eleven her skal nærmere ind på definitionen af differentialkvotient eller beviser med tretrinsmetoden.

Det nemmeste for eleven er nok at starte med at argumentere for tangenthældningen i skæringen med andenaksen. Her skal eleven argumentere for x-værdien i det pågældende punkt og ud fra dette beregnes at $f'(0) = b$.

Herefter kan eleven argumenter for tangenthældningen i grafens skæringer med førsteaksen. Her kan den reflekterede elev skelne mellem tilfældene med 0, 1 eller 2 skæringspunkter. Det er særligt det sidste tilfælde som er relevant, hvor eleven bør komme frem til $f'\left(\frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}\right) = \pm\sqrt{d}$.

Endeligt kan eleven tale om tangenten til toppunktet (som også er skæring med x-aksen, hvis funktionen kun har ét nulpunkt). Her skal eleven vide, at tangenthældningen er kendt, mens toppunktets x-værdi x_T som udgangspunkt ikke er kendt. Det er således sidstnævnte, der er relevant at komme frem til ved at løse $f'(x_T) = 0$.

Hvad kan man spørge eleven om?

Den mindre svage elev kan måske starte dialogen med afsæt i forskriften for f og finde f' samt med hjælp finde på at bestemme x-værdier for skæring med andenaksen og måske også for førsteaksen.

Den svage elev kan i dialogen blive bedt om at skitsere grafen for f i et koordinatsystem og indtegne tangenter til eksempelvis skæringspunkterne med førsteaksen. Her kan der i dialogen spørges ind til hvad en tangent er, hvad en hældning er, hvad den fortæller om grafen, mv.

Som ideer til fortsat faglig dialog, når dialogen om selve spørgsmålet er afsluttet, kan nævnes:

- Der kan spørges til en række overvejelser om parablens symmetriske egenskaber, herunder at det generelt gælder at $f'\left(\frac{-b}{2a} \pm k\right) = \pm 2a \cdot k$. Spejling i symmetriaksen bevarer altså $f(x)$ og skifter fortegn på $f'(x)$.
- Der kan spørges ind til, hvordan toppunktets andenkoordinat, $y_T = -\frac{d}{4a}$, kan bestemmes, samt hvordan formlen kan udledes, også selvom eleven måske ikke kommer helt igennem.
- Der kan spørges til bestemmelse af tangenthældninger til f.eks. graf for tredjegrads-polynomier eller polynomier af vilkårlig art (her er skæring med andenaksen en mulighed).
- Der kan spørges til placeringen af grafen for f' i forhold til grafen for f.

Spørgsmål 6: Funktioner og vækst

Forklar om potensfunktioner på formen $f(x) = b \cdot x^a$, herunder vækstegenskaber og væksthastighed. Redegør ved brug af differentialregning for betydningen af konstanten a.

Hvad skal eleven tale om?

Spørgsmålet inviterer eleven til at tale om emnet potensfunktioner, som stadig er et emne til den mundtlige eksamen. Emnet løftes fra C- til B-niveau med et eksplicit krav om anvendelse af differentialregning i redegørelsen.
Undervisningsgrundlaget for spørgsmålet er emnerne potensfunktioner, vækstegenskaber, funktioner og differentialregning fra kernestoffet.

I den brede *forklaring* bør eleven præsentere potensfunktioner som emne, herunder forskriften, skitse af grafen i de principielt forskellige tilfælde, brugen af topunktsformler, omtale af regression, mv. Særligt bør potensvækst forklares og der bør i forlængelse heraf tales om tangent/tangenthældning, som en del af at der tales om væksthastighed.

I det centrale *ræsonnement* bør eleven tage afsæt i $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$ og dermed vise at $f'(x) = a \cdot b \cdot x^{a-1}$. Den stærke elev vil her huske præmisserne $b > 0$ og at $x^a > 0$ for $x > 0$.

Eleven kan herefter argumentere for de forskellige situationer, $a < 0$, $0 < a < 1$ og $a > 1$, ved at bruge den afledede funktion.

For $a < 0$ argumenteres for, at $f'(x) < 0$. Dermed vides det, at f er en aftagende funktion.

For $0 < a < 1$ argumenteres for, at $f'(x) > 0$, hvorfor f er voksende. Samtidig argumenteres for, at f' selv er en potensfunktion med negativ eksponent og derfor en aftagende funktion, hvorfor væksthastigheden for f aftager.

For $a > 1$ argumenteres for, at $f'(x) > 0$, hvorfor f er voksende. Samtidig argumenteres for, at f' selv er en potensfunktion med positiv eksponent, det vil sige, den er voksende, hvorfor væksthastigheden er voksende.

Eleven kan endvidere sige noget om særtilfældene $a = 1$ og $a = 0$.

Hvad kan man spørge eleven om?

Med den mindre svage elev kan man diskutere bestemmelse af den afledede funktion til en potens-funktion, samt hvordan fortegnet for dennes funktionsværdier afhænger af fortegnet for a.

Den svage elev kan man bede om at tegne grafen for potensfunktionen i et af de tre tilfælde, samt 3 tangenter til grafen. Ud fra denne tegning kan eleven sætte ord på, hvordan tangenthældningerne og dermed vaksthastigheden udvikler sig ”for voksende x-værdier”.

Som ideer til fortsat faglig dialog, når dialogen om selve spørgsmålet er afsluttet, kan nævnes:

- Hvis vi betragter potensvækst som en %%-vækst, hvordan afhænger %-væksten i y-værdierne så af a-værdien? Hvad sker der i de forskellige tilfælde?
- Der kan spørges ind til andre former for vækst, f.eks. eksponentiel vækst. Her kan eleven udfordres på, om der kan laves en tilsvarende analyse af betydningen af a for denne vækst-funktion: $f'(x) = \ln(a) \cdot b \cdot a^x$, hvis fortegn varierer i tilfældene $0 < a < 1$ og $a > 1$. Tilsvarende spørgsmål kan stilles til den lineære vækstfunktion.
- Der kan spørges ind til, hvorfor en potensfunktion ikke har noget nulpunkt eller noget lokalt ekstremum (forklaringen er ”den samme”).
- Eleven kan bevise sætningen om potensvækst herunder argumentere for, at der er tale om en %%-vækst.

Spørgsmål 7: Vektorer og analytisk geometri

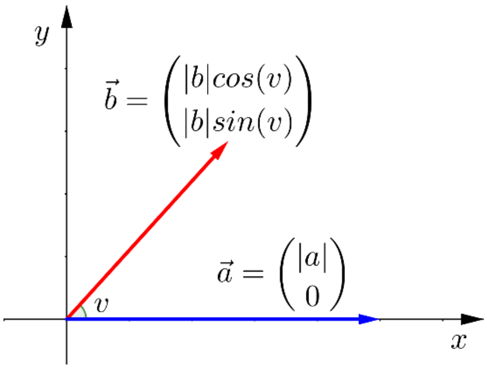
Forklar om vektorer, herunder særligt om vinkler og enhedsvektorer. Inddrag enhedscirklen. Redegør for bestemmelse af prikproduktet mellem to vektorer, herunder sammenhængen mellem prikprodukt og vinkel mellem to vektorer, hvor den ene er parallel med førsteaksen.

Hvad skal eleven tale om?

Spørgsmålet er inspireret af, at en række beviser i vektorregningen, med vejledningen af marts 2020, officielt er blevet placeret som hørende til på A-niveau. Ideen er at tage et af disse beviser og tage "det sværeste" ud af det.
Spørgsmålet inviterer eleven til at give en bred introduktion til emnet "vektorer", med et særligt fokus på vinkler og enhedsvektorer, med henblik på en delvis udledning af prikproduktet.
Undervisningsgrundlaget for spørgsmålet er kernestoffets behandling af emnet "vektorer".

Grundtanken i *forklaringen* er, at eleven kan præsentere de dele af emnet vektorer, som eleven mener passer til den efterfølgende redegørelse. Eleven hjælpes på vej i udvælgelsen af delene, idet der er et hint om to ting fra emnet, som bør omtales. Eleven vil næppe kunne nå hele vektorregningen, så et bevidst udvalg er nok nødvendigt.

I det centrale *ræsonnement* kan eleven starte med at give en definition af prikproduktet ved vektorkoordinater.



Herefter kan eleven tegne to vektorer ind i et koordinatsystem, hvor den ene vektor er parallel med førsteaksen og den anden danner vinklen v med førsteaksen. Med fordel kan vektorerne afsættes ud fra samme punkt.

Eleven skal herefter have indført koordinatsæt for de to vektorer ud fra deres længder og retning. Den simple af disse er den vandrette vektor, mens den anden vektor må indføres ved anvendelse af enhedsvektor med given vinkel til førsteaksen.

Når eleven har opstillet de to koordinatsæt, kan definitionen ud fra koordinatsæt anvendes og dermed opnås på algebraisk vis formlen $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$.

En central del af ræsonnementet bliver her, at eleven selv kan se, at udledningen ikke gælder fuldstændigt men er begrænset til de særlige tilfælde, hvor den ene vektor ligger parallelt med førsteaksen. Det er argumentet for, at prikproduktet er uafhængigt af placeringen af vektorerne, som er grunden til, at det fulde bevis er ”skubbet” til A-niveau. Så det centrale her er, at eleven fremfører argumentet uden nødvendigvis at vise det eller at vise det fuldt ud.

Eleven bør også i redegørelsen komme ind på andre sider af prikproduktet, f.eks. definition af determinant ($\det(\vec{a},\vec{b}) = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$) samt udledning af formlen for denne og overvejelser om at denne størrelse hænger sammen med arealet af det udspændte parallelogram.

Hvad kan man spørge eleven om?

Dialogen med den mindre svage elev kan tage afsæt i mere overordnede spørgsmål om at definere vektorer med bestemte længder og vinkler ud fra enhedsvektoren og enhedscirklen.

I dialogen med den svage elev kan man starte med at bede eleven om at tegne to vektorer ud fra samme punkt og markere vinkler, længde, give bud på koordinatsæt, mv. Endvidere kan man bede eleven om at tegne en enhedscirkel og overveje længde og koordinatsæt for en vektor der går fra centrum til periferi af denne, samt hvordan man ved beregning kan ændre længden til noget andet.

Som ideer til fortsat faglig dialog, når dialogen om selve spørgsmålet er afsluttet, kan nævnes:

- Eleven kan spørges om determinantbegrebet, hvis det ikke har været med i redegørelsen.
- Eleven kan spørges om, hvordan vinklen mellem to vektorer kan bestemmes.
- Eleven kan spørges om, hvorfor determinanten udtrykker arealet af det udspændte parallelogram. Højden af parallelogrammet kan (af figur ovenfor) ses at være $|\vec{b}| \cdot \sin(v)$ og grundlinjen $|\vec{a}|$. Endvidere kan overgangsformler som $\cos(v) = \sin(90° - v)$ anvendes til at se sammenhængen til definitionen på determinanten. Overvejelser om behovet for numerisk tegn kan der også spørges til.

Spørgsmål 8: Funktioner og differentialregning

Forklar om funktioner, herunder regning med funktioner (sum, produkt og sammensætning). Redegør for differentiation af funktioner, herunder et bevis for sumreglen. Argumentér for at to voksende funktioners sum er voksende, mens deres produkt ikke nødvendigvis er det.

Hvad skal eleven tale om?

Spørgsmålet inviterer eleven til at tale mere generelt om funktioner og funktionsbegrebet, samt vise en bevidsthed om det at lave regnearter på funktioner. Derudover inviterer det til en rimelig fri snak om differentialregning, hvor der kan tales om såvel sum- og produktreglen, som sammensætning af en funktion med en lineær funktion. Beviserne for de to sidstnævnte regler er med 2020-vejledningen som udgangspunkt placeret på A-niveau.
Undervisningsgrundlaget er kernestoffets behandling af funktioner og differentialregning, idet der forudsættes at have været et særligt fokus på regnearter for funktioner.

I den brede *forklaring* kan eleven komme ind på centrale ideer om hvad en funktion er, herunder forskrift, graf, definitions- og værdimængde, lodretkriterium, mv. Endvidere skal der forklares om ideen med at lave regneoperationer på funktioner.

I et centrale *ræsonnement* kan eleven starte med at fortælle om udledning af afledet funktion og anvende dette til at bevise sum-reglen, som anvendes i det efterfølgende ræsonnement. Det er dog muligt for eleven at springe dette bevis over, så man kan gå direkte til ræsonnementet omkring sum og produkt af voksende funktioner. Det vil naturligvis trække ned i bedømmelsen, men eleven har en chance for at komme videre.

Eleven kan ræsonnere grafisk ved at tegne grafen for to voksende funktioner og argumentere for, at hvis man for to vilkårlige punkter x_1 og x_2 har $f(x_1) < f(x_2)$ og $g(x_1) < g(x_2)$, så gælder også at $f(x_1) + g(x_1) < g(x_1) + g(x_2)$.

Eleven kan også ræsonnere ved beregning, Hvis f og g er voksende, så er $f'(x) > 0$ og $g'(x) > 0$ og deraf fås, at $f'(x) + g'(x) > 0$. Den dygtige elev kan her tage et passende forbehold for isolerede stationære punkter.

For at vise at produktet ikke nødvendigvis er voksende, kan eleven give et modeksempel, ved at gange to voksende lineære funktioner sammen og se, at det giver et andengradspolynomium.

Det vil desuden være muligt for eleven at vise, at produktet af to voksende, negative funktioner alle steder er aftagende. F.eks. $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$ og $g(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$ for hvilke der fås $(fg)(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$.

Hvad kan man spørge eleven om?

I dialogen med den svage elev kan man bede eleven om at tegne to voksende funktioner i samme koordinatsystem og ud fra dette finde et antal punkter, for hvilke der angives summen af funktionsværdierne, og dermed diskutere, om sum-funktionen er voksende alle steder.

Det er også muligt, at bede eleven tegne grafer for to voksende lineære funktioner og overveje, hvad funktionsværdierne for produkt-funktionen vil være forskellige steder. Særlig interessant kan her være nulpunkterne for de to lineære funktioner, og hvad der er mellem disse to steder og udenfor.

Som ideer til fortsat faglig dialog, når dialogen om selve spørgsmålet er afsluttet, kan nævnes:

- Der kan spørges til bestemmelse af lokale ekstrema/monotoniforhold med afledet funktion.
- Der kan spørges til stykkevist definerede funktioner.
- Der kan spørges til begrebet *kontinuitet*, herunder overvejes eksempler på funktioner som ikke er kontinuerte (hvor stykkevist definerede funktioner kan komme i spil).
- Der kan spørges til begrebet *differentiabilitet*, herunder overvejes eksempler på funktioner som ikke er differentiable. Det kan kædes sammen med begrebet kontinuitet, hvor kontinuerte men ikke-differentiable funktioner kan omtales.
- Der kan spørges til forskellige typer af funktioner, hvad der kendetegner disse, mv.
- Der kan spørges til dobbeltafledet, og hvordan denne kan anvendes ved bestemmelse af lokale ekstrema.

Spørgsmål 9: Sandsynlighedsregning

Forklar om kombinatorik og sandsynlighedsregning. Redegør for ét ikke-symmetrisk og ét symmetrisk sandsynlighedsfelt til beskrivelse af slag med to terninger, herunder hvordan hændelser i det symmetriske sandsynlighedsfelt kan bruges til at bestemme hændelser i det ikke-symmetriske. Generalisér resultatet til 3 terninger og til n terninger.

Hvad skal eleven tale om?

Spørgsmålet inviterer eleven til at præsentere centrale begreber fra sandsynlighedsregningen og anvende disse til nogle af de ræsonnementer, som knytter sig til at beskrive et sandsynlighedsfelt fastlagt ved apriori-sandsynligheder i terningslag, samt generaliseringer af resultater. Undervisningsgrundlaget for spørgsmålet er kernestoffets behandling af kombinatorik, sandsynlighedsregning samt statistiske test og simulering af nulhypotese.

I den brede *forklaring* kan eleven præsentere grundlæggende begreber fra sandsynlighedsregningen, f.eks. udfaldsrum, sandsynlighedsfordeling, hændelse, symmetrisk sandsynlighedsfelt, mv. Derudover kan vigtige begreber som permutation og kombination fra kombinatorikken præsenteres.

Spørgsmålet bygger på den opfattelse, at situationen med terningkast har et passende principielt indhold til at kunne bruges til at teste ræsonnement af passende kompleksitet, såvel ved opstilling af sandsynligheder og generalisering til n terninger som ved egentlig simulering.

Spørgsmålet kan eventuelt trække på en rapport om simulering af kast med 2 (og flere) terninger, så der allerede er lavet eksperimenter med simulering. Det er dog vigtigt, at alle elever har adgang til en passende besvarelse af en sådan rapport, hvis den skal være grundlag for spørgsmålet.

I det centrale *ræsonnement* kan eleven starte med at forklare lidt om hvordan udfaldene ved et slag med to terninger kan formuleres. Blandt de oplagte muligheder er de 11 udfald af ”øjensum”, de 21 udfald af ”terning-kombinationer” og endeligt de 36 udfald hvor der skelnes mellem terningerne. Andre muligheder kan man naturligvis forestille sig.

Eleven kan diskutere – evt. på baggrund af simulering af et stort antal kast med 2 terninger – hvilke af disse udfaldsrum der giver hhv. symmetrisk og ikke-symmetrisk sandsynlighedsfordeling.

Eleven kan ud fra det symmetriske sandsynlighedsfelt (med 36 udfald) udlede teoretiske sandsynligheder for udfald i de øvrige udfaldsrum, ved at trække på teorien for sandsynligheden for hændelser i symmetrisk sandsynlighedsfelt (”antal gunstige divideret med antal mulige”).

Eleven bør på denne baggrund overveje hvordan resultaterne kan udvides til kast med 3 terninger, heraf en række centrale hændelser som ”3 ens” og ”øjensum 3 eller 18”. Eleven kan også regne på mere avancerede udfald, hvis eleven ønsker det.

Endeligt bør eleven generalisere til kast med n terninger, herunder for centrale hændelser som ”n ens” samt ”øjensum n eller $6n$”. Også her kan andre udfald behandles, hvis eleven vil.

Hvad kan man spørge eleven om?

For den mindre svage elev, kan man spørge ind til sandsynlighedsfordelinger i bestemte spils fortolkning af slag med 2 terninger. F.eks. ”matador”-fortolkningen (øjensum), ”back-gammon”-fortolkningen (udfaldskombination) og ”Risk”-fortolkningen (en rød og en blå terning).

For den svage elev kan dialogen starte med at tale lidt om, hvordan terninger fungerer, herunder udvalgte ”nemme” sandsynligheder. Man kan spørge eleven hvilke øjensummer, der kan forekomme, og om disse er lige sandsynlige, samt hvilke, der er mest sandsynlige.

Som ideer til fortsat faglig dialog, når dialogen om selve spørgsmålet er afsluttet, kan nævnes:

- Der kan spørges til andre sandsynlighedstyper. F.eks. beregning af chancen for at vinde hovedpræmien i ”kendte” spil som Lotto eller TIPS-13 (som elever dog nok skal have forklaret princippet i). I begge spil er beregningen nem, hvis hvert udfald opfattes symmetrisk, men det kan diskuteres om det er en rimelig betragtning for TIPS-13.
- Der kan spørges ind til bestemte sandsynlighedsfordelinger, f.eks. binomialfordelingen, og hvad disse ville kunne bruges til i forhold til slag med terninger. F.eks. chancen for at få 2 ens tre gange i træk.
- Der kan spørges ind til binomialtest, f.eks. hvor mange 6’ere i træk man skal have, før en terning må siges at være ”skæv”.
- Der kan spørges ind til simulering med CAS-værktøj, hvor eleven forklarer det principielle ræsonnement der ligger bag en simulering af en nulhypotese.

Spørgsmål 10: Sandsynlighedsregning

Du skal forklare om binomialfordelingen, herunder begreberne binomialeksperiment og binomialsandsynlighed. Du skal med udgangspunkt i et eksempel redegøre for tosidet binomialtest.

Hvad skal eleven tale om?

Spørgsmålet lægger op til, at eleven først laver en bred introduktion til binomialfordelingen og derefter fokuserer på anvendelsen af binomialfordelingen ved et binomialtest. Undervisningsgrundlaget er altså sandsynlighedsregning fra kernestoffet med vægt på binomialfordelingen og binomialtest.

Under *forklaringen* forventes det, at eleven definerer et binomialeksperiment, herunder stokastisk eksperiment, stokastisk variabel, basiseksperiment, antalsparameter, sandsynlighedsparameter og giver et par eksempler.

Desuden forventes det, at eleven opskriver formlen for binomialsandsynlighederne og viser et diagram over binomialsandsynlighederne for et af de tidligere nævnte eksempler.

Det vil være naturligt at komme ind på middelværdi og spredning og sammenhæng mellem antalsparameter, sandsynlighedsparameter og middelværdi.

I forlængelse af dét kan eleven komme ind på, hvordan diagrammet og middelværdien ændrer sig, hvis én af parametrene ændrer sig.

Under *redegørelsen* forventes det, at eleven giver et konkret eksempel på en undersøgelse, hvor hypotesen kan testes ved et binomialtest. Der skal redegøres for, hvorfor denne undersøgelse kan beskrives ved et binomialeksperiment. Det vil være naturligt at komme ind på stikprøver med og uden tilbagelægning, og at en stikprøve uden tilbagelægning med god tilnærmelse godt kan beskrives som et binomialeksperiment, hvis blot populationen er stor nok i forhold til stikprøven.

Herefter redegøres for, hvordan hypotesen testes vha. binomialfordelingen, herunder redegøres for begreberne test-størrelse, signifikansniveau, acceptmængde og kritisk mængde.

Hvad kan man spørge eleven om?

For den stærke elev, der selv gennemfører ræsonnementet, er der mulighed for at gå videre og f.eks. bede eleven om at redegøre for, hvordan signifikansniveauet, hvis det bliver større eller mindre, påvirker den kritiske mængde.

For en middel elev, der selv kan forklare om konkrete eksempler på binomialeksperiment og binomialtest, kan man bede om at der indføres tegn for centrale størrelser og at sammenhængene opskrives formelt. Man kan også bede eleven tegne diagrammer over binomialsandsynligheder og spørge om, hvordan diagrammerne ændrer sig, hvis parametrene ændrer sig.

For den svage elev kan der tages afsæt i et eksempel, som læreren angiver. F.eks. 10 kast med en terning.

Som ideer til fortsat faglig dialog, når dialogen om selve spørgsmålet er afsluttet, kan nævnes:

- Hvad er et etsidet binomialtest (hvis man har gennemgået det), og hvordan adskiller det sig fra et tosidet binomialtest.
- Hvad beskriver binomialkoefficienterne? Hvordan kan de illustreres? – Pascals trekant.
- Hvordan finder man kumulerede sandsynligheder?
- Hvordan finder man middelværdi for en stokastisk variabel, der *ikke* er binomialfordelt.

Spørgsmål 11: Vektorer og analytisk geometri

Forklar om tegning af vektorer, herunder om addition og subtraktion af vektorer, vektor gange tal, tværvektor og andre operationer knyttet til tegning af vektorer. Redegør grafisk for projektion af punkt på linje og projektion af vektor på vektor.

Hvad skal eleven tale om?

Spørgsmålet er inspireret af, at en række beviser i vektorregningen, med vejledningen af marts 2020, officielt er blevet placeret som hørende til på A-niveau. Dermed er der et særligt behov for at tænke I andre ræsonnementer inden for emnet vektorer.
Spørgsmålet inviterer eleven til at præsentere vigtige sider af emnet vektorer, med særlig fokus på tegning af vektorer, samt redegøre for, hvordan man ud fra tegning kan ræsonnere sig frem til, hvad man forstår ved projektion.
Når der er eksplicit krav om grafisk redegørelse undgår man at nogen kan læse spørgsmålet som om der forventes bevis for diverse projektionsformler. Spørgsmålet adskiller sig tydeligvis fra gruppedelen og den skriftlige eksamen, da her er der tale om begrebsforståelse af begrebet projektion og argumentation i forbindelse med de generelle tilfælde.
Undervisningsgrundlaget for spørgsmålet er vektorregningen fra kernestoffet.

Under *forklaringen* er grundtanken at eleven forklarer om tegning af vektorer, det vil sige alene behandler vektorer som ”pile”, uden at sætte tal på. Det gør det relevant at forklare om regnearter som addition, subtraktion og ”tal gange vektor”, samt en operation om ”tværvektor”. Også begreber som parallel og ortogonal kan forklares, sammen med ”udspændt parallelogram” og ”vinkel mellem vektorer”.

Under *ræsonnement* kan eleven tage afsæt i indførelse af projektion af punkt på linje med og uden koordinatsystem. Eleven kan derefter argumentere for projektionen af vektor på linje, herunder hvordan projektionen er, når vektorens endepunkt ligger på linjen og begyndelsespunktet ikke ligger på linjen, når vektorens begyndelses- og endepunktet ligger på linjen, når vektoren er parallel med linjen, når begyndelsespunktet ligger på linjen, og endepunktet ikke ligger på linjen, eller når vektoren er vinkelret på linjen.

Ydermere kan eleven argumentere for sammenhængen mellem projektionen af vektor på linje og projektionen af vektor på vektor.

Hvad kan man spørge eleven om?

For den stærke elev, som selvstændigt vil redegøre via ræsonnementer og argumentationer, kan dialogen starte ved, at man beder eleven om at argumentere for, at alle objektprojektioner bygger på projektion af punkter på linje. Projektion af vektor på vektor reduceres til projektion af vektorens begyndelsespunkt og endepunkt på linjen.

Den mindre stærke elev kan man spørge, om projektion af vektor på linje er uafhængig af, hvilken vektorrepræsentant man projekterer på linjen.

For den mindre svage elev kan dialogen køre på nogenlunde samme måde men i en mere håndholdt version. F.eks. kan man bede eleven direkte om at konstruere vektorer og linjer, som ligger på forskellig vis i forhold til hinanden, og forholde sig til projektionen af vektor på linje i disse konkrete tilfælde.

For den svage elev kan dialogen starte med, at eleven bedes tegne et punkt, der ikke ligge på linjen, og projektere det på linjen. Man kan spørge eleven om, hvilken geometrisk figur projektionen er. Derefter kan man bede eleven tegne to vektorer med fælles begyndelsespunkt og konstruere projektionen af den ene vektor på den anden. Man kan også spørge eleven om sammenhængen mellem vektors retning og projektion-vektorens retning.

Man kan bede eleven om at sige noget om sammenhængen mellem tegning og regning af prikprodukt, hvor der med tegning tænkes på længde-vinkelformlen og med regning tænkes på koordinatformlen. Herunder forklaring af fortegnets betydning.

Man kan bede eleven om at sige noget om sammenhæng mellem tegning og regning af determinant, hvor der her især tænkes på areal-fortolkningen af determinanten.

Man kan bede eleven tale om enhedsvektorer, som geometrisk kan konstrueres ud fra en enhedscirkel og ad denne vej oversætte til koordinater for enhedsvektorer.

Spørgsmål 12: Vektorer og analytisk geometri

Forklar begreberne normalvektor og retningsvektor for en ret linje. Redegør ved hjælp af vektorer for to rette linjers beliggenhed i forhold til hinanden i et koordinatsystem.

Hvad skal eleven tale om?

Spørgsmålet inviterer eleven til at give en introduktion til grundlæggende begreber indenfor analytisk geometri, herefter gå i dybden med hvordan linjer kan fremstilles og argumentere for at to linjer kan være parallelle, sammenfaldende, ortogonale.

Under forklaringen kan eleven tage udgangspunkt i en grafisk forklaring af, hvad retningsvektor og normalvektor for en ret linje er. Ydermere kan eleven forklare hvordan man kan komme fra en retningsvektor til en normalvektor og omvendt ved hjælp af tværvektor.

Eleven kan forklare hvordan man kan opstille en ligning for en ret linje på formen $ax + by + c = 0$ ved hjælp af et punkt på linjen og en normalvektor.

Eleven kan forklare hvordan man kan opstille en retningsvektor ud fra linjens ligning på formen $y = ax + b$. Desuden kan eleven forklare, at man let kan omskrive ligningen på den forrige form, ved at trække y fra, på begge sider af lighedstegnet. $(0 = ax - y + b)$

Eleven kan forklare hvordan man kan opstille en parameterfremstilling for en ret linje ved hjælp af et punkt på linjen og en retningsvektor.

Under redegørelsen kan eleven argumentere for, at hvis to linjer er parallelle, har de enten ingen skæringspunkt eller er der uendelige mange skæringspunkter, dermed er linjerne sammenfaldende. Ved at undersøge om et tilfældigt punkt der tilhører den ene linje også tilhører den anden linje kan man afgøre om der er tale om ingen skæringspunkt eller uendelige mange skæringspunkter mellem de to linjer.

Hvis to linjer er hverken parallelle eller sammenfaldende, har de netop et skæringspunkt. Dette kan bestemmes ved at løse et lineært ligningssystem.

Det centrale ræsonnement i dette spørgsmål kan deles i tre tilfælde, så man tager udgangspunkt i, på hvilken form linjerne er angivet.

Tilfælde 1: Eleven kan argumentere for, at hvis to linjer er givet ved ligninger på formen

$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, kan man afgøre om linjerne er parallelle ved at undersøge om deres normalvektorer er parallelle. Her benyttes viden om sammenhængen mellem parallelle vektorer og determinant for vektorpar.

Hvis normalvektorerne er parallelle, kan man afgøre om der er tale om ingen skæringspunkt eller uendeligt mange skæringspunkter mellem de to linjer, ved at undersøge om et tilfældigt punkt der tilhører den ene linje også tilhører den anden linje.

Tilfælde 2: Eleven kan argumentere for, at hvis to linjer er givet ved deres parameterfremstilling, så vil man kunne aflæse en retningsvektor for hver linje. Og hvis de to retningsvektorer er parallelle, er linjerne parallelle eller sammenfaldende. For at undersøge om linjerne er sammenfaldende, kan man undersøge om et punkt på den ene linje også ligger på den anden linje.

Tilfælde 3: Eleven kan argumentere for, at hvis den ene linje er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

og den anden ved en ligning på formen $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$,

kan man aflæse en retningsvektor for den første linje og en normalvektor for den anden linje. Hvis de to vektorer er ortogonale, vil de to linjer være enten parallelle eller sammenfaldende. For at undersøge om de to vektorer er ortogonale, skal man undersøge om deres skalarprodukt er nul.

Eleven kan argumentere for, hvordan man undersøge om linjerne er sammenfaldende (ved at aflæse koordinaterne for et punkt fra parameterfremstillingen og indsætte dem i ligningen for den anden linje).

Hvis retningsvektoren og normalvektoren ikke er ortogonale, vil de to linjer have netop ét fælles punkt.

Hvad kan man spørge eleven om?

For den stærke elev, som selvstadigt vil redegøre via ræsonnementer og argumentationer kan dialogen starte ved, at man beder eleven om at argumentere for hvordan man skifter mellem forskellige repræsentationsformer for en ret linje.

For den mindre stærke elev kan dialogen tage udgangspunkt i linjer som eksaminator har tegnet og bede eleven at angive en retningsvektor, en normalvektor for disse og bede eleven forholde sig til sammenhængen mellem disse vektorer og linjernes indbyrdes beliggenhed.

Hvis eleven har svært ved at komme i gang med ræsonnementsdelen, kan eksaminator tage udgangspunkt i konkrete eksempler, som illustrerer de tre tilfælde, og som kan give anledning til en matematisk analyse af de fremlagte situationer.

Som idéer til fortsat faglig dialog, når dialogen om selve spørgsmålet er afsluttet, kan nævnes:

- Eksaminator kan spørge om hvordan man bestemmer det evt. skæringspunkt mellem to linjer i de tre tilfælde.
- Eksaminator kan spørge om hvordan man bestemmer vinkel mellem to linjer vha. vektorer.
- Eksaminator kan spørge om skæring med akserne eller vinkel mellem linjen og akserne
- Eksaminator kan spørge om hvordan man bestemmer afstanden mellem to parallelle linjer

Spørgsmål 13: Funktioner

Lad f være en voksende eksponentiel vækst, med forskriften $f(x) = b \cdot a^x$. Forklar ved hjælp af skyder hvordan x-tilvæksten skal være, når $f(x)$ skal være k gange større ($k > 1$). Beskriv med udgangspunkt i konstruktionen de generelle egenskaber for den eksponentielle vækst.

Redegør for at x-tilvæksten skal være

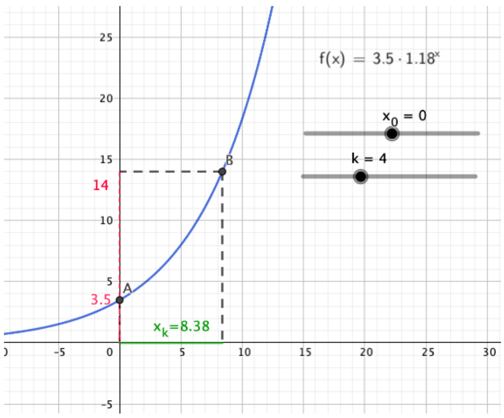
$$x_k = \frac{ln\,(k)}{ln\,(a)}$$

hvis $f(x)$ skal være k gange større.

Hvad skal eleven tale om?

Spørgsmålet er et eksempel på, hvordan man kan løfte et C-niveau emne, så det er tilstrækkeligt til at eksaminere på B-niveau. Her er både symbol- og formalismekompetencen og hjælpemiddelkompetencen i spil. Bemærk at den eksperimenterende tilgang er en del af spørgsmålet.

Eleven kan starte med at konstruere en eksponentiel vækst i et dynamisk program, som skal benyttes til at forklare at hvis $f(x)$ er k gange større, vil x vokse med et bestem konstant.



Eleven skal forklare de grundlæggende omkring eksponentiel vækst.

Eleven skal udlede formlen for x_k enten ved algebraisk tilgang eller via ræsonnementer og konstruktioner i CAS-værktøjet.

Under *forklaringen* kan eleven tage udgangspunkt i de grundlæggende egenskaber omkring eksponentiel vækst, herunder forskrift, betydning af konstanterne *a* og *b*, monotoni. Dette kan eleven illustrere ved en undersøgende tilgang på baggrund af en konstruktion i CAS-værktøjet.

Eleven kan illustrere grafisk, at uanset hvorhen man starter et vilkårligt sted på grafen for f, vil *x*-tilvæksten være det samme, hvis *y*-værdien skal blive *k* gange større.

.

Under *redegørelsen* kan eleven tage udgangspunkt i skæringen mellem grafen for f og y-aksen, og argumentere for, at hvis man vil bestemme x-tilvæksten, så f er k gange større, vil det betyde at $f(x_k) = k \cdot b$.

Eleven kan opstille ligningen $f(x_k) = k \cdot b$ og løse den med hensyn til x_k ved at benytte regneregler for logaritme.

Eleven kan argumentere for, at fordoblingskonstanten er et partikulært tilfælde af denne sammenhæng, dvs. $k = 2$.

Hvad kan man spørge eleven om?

For den stærke elev, som selvstadigt vil redegøre via ræsonnementer og argumentationer kan dialogen starte ved, at man spørger om hvor meget *x* ændrer sig når *y* ændrer sig med en fast procent.

For den mindre stærke elev kan eksaminator stille spørgsmål omkring fordobling- og halveringskonstanten. Derefter kan eleven undersøge om det samme gælder, hvis der i stedet for fordobling er tale om f.eks. tredobling. Eksaminator kan tage udgangspunkt i begyndelsesværdien og spørge om hvad det betyder, at det er tredoblet. Hvad sker det med *x*-tilvæksten?

Eksaminator kan bede eleven om at illustrere ved hjælp af CAS-værktøjet, at hvis man starter et vilkårligt sted på grafen, vil *x*-tilvæksten være det samme, hvis *y*-værdien skal tredobles. Eventuelt kan man bede eleven at undersøge sammenhængen, uden at påpege hvilken sammenhæng gør sig gældende.

For den svage elev kan fialogen tage udgangspunkt i konkrete eksempler, som kan benyttes til hjælpe elev på vej til dele af redegørelsen. Den svag elev kan man også spørge om den procentvise ændring når *x* ændrer sig med en bestemt værdi.

Som idéer til fortsat faglig dialog, når dialogen om selve spørgsmålet er afsluttet, kan nævnes:

- Man kan spørge om hvordan man finder forskriften for en eksponentiel vækst, når man kender to punkter på grafen.

- Man kan spørge om, hvordan man kan argumentere for monotonien af en eksponentiel vækst ved hjælp af differentialregning.

Spørgsmål 14: Funktioner

Forklar hvad sammensatte funktioner er og hvordan man bestemmer differentialkvotienten af sammensatte funktioner. Redegør for at en funktion der er sammensat af to lineære funktioner er en lineær funktion. Vis, at ved at sammensætte $f(x) = a \cdot x + b$ og $g(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ fås $f(g(x)) = x$ og $g(f(x)) = x$.

Hvad skal eleven tale om?

Spørgsmålet kan besvares, ved at tage udgangspunkt i funktionsbegrebet, efterfulgt af forklaring om hvordan man sammensætter to funktioner og hvordan man bestemmer differentialkvotienten for en sammensat funktion. Den redegørende del omhandler dels argumentation af forskriften for den sammensatte funktion af to vilkårlige lineære funktioner, dels udledning af forskriften for den sammensatte funktion af de to givne lineære funktioner.

Eleven kan under *forklaringen* komme ind på forskrift for en funktion, definitionsmængde, værdimængde og graf.

Eleven kan forklare om hvordan man sammensætter funktioner, at når man sammensætter to funktioner f og g, har rækkefølgen man sammensætter dem i betydning. Dvs. $f(g(x)) \neq g(f(\mathrm{x}))$.

Eleven kan derefter forklare hvordan man differentierer en sammensat funktion.

Eleven kan under *redegørelsen* argumentere for forskriften for den sammensatte funktion af to vilkårlige lineære funktioner $f_1(x) = a \cdot x + b$ og $f_2(x) = c \cdot x + d$ ved at udlede $f_1 \circ f_2$ og $f_2 \circ f_1$ eller ved at tage udgangspunkt i en eksperimenterende tilgang med CAS-værktøjet og via ræsonnementer komme frem til, at en funktion der er sammensat af to lineære funktioner er en lineær funktion.

Eleven kan argumentere for at hældningskoefficienterne for $f_1 \circ f_2$ og $f_2 \circ f_1$ er ens, mens begyndelsesværdierne er forskellige.

Eleven kan argumentere for at forskriften for både $f \circ g$ og $g \circ f$ er $h(x) = x$.

Hvad kan man spørge eleven om?

For den stærke elev, som selvstadigt vil redegøre via ræsonnementer og argumentationer kan dialogen starte ved, at man beder eleven om at argumentere for symmetrilinje for

$f(x) = a \cdot x + b \; og \;\; g(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.

For den mindre stærke elev, der har svært ved at komme i gang med redegørelsen, kan eksaminator tage et konkret eksempel med to lineære funktioner f_1 og f_2 , og bede eleven bestemme fx $f_1(f_2(x))$. Derefter kan man stille spørgsmål om hvilke type funktion eleven er kommet frem til.

For den svage elev, som også har svært ved at håndtere sammensætning af to lineære funktioner, kan man bede eleven om at beregne en funktionsværdi $f_2(x_0)$ og derefter beregne $f_1(f_2(x_0))$. Alternativt kan samtalen tage udgangspunkt i en grafisk fremstilling, hvor ræsonnementet kan være baseret på et bestemt taleksempel.

Som idéer til fortsat faglig dialog, når dialogen om selve spørgsmålet er afsluttet, kan nævnes:

- Man kan spørge om andre operationer med funktioner og definitionsmængde for de funktioner, som fremkommer ved disse operationer.
- Man kan bede om at argumentere for produktet af to lineære funktioner er et andengradspolynomium evt. andre operationer med funktioner
- Man kan spørge om differentialkvotient for $f(x) = e^{ax+b}$ eller blot $f(x) = e^{kx}$.
- Man kan spørge om hvilken type funktion fås ved at sammensætte en lineær funktion med et andengradspolynomium (eller ved at sammensætte to andengradspolynomier)

Spørgsmål 15: Funktioner og analytisk geometri

Forklar betydningen af konstanterne a, b og c for udseendet af grafen for andengradspolynomiet $p(x) = ax^2 + bx + c$. Redegør for parablens symmetriegenskaber vha. en dynamisk model i CAS og benyt disse til at udlede toppunktsformlen.

Hvad eleven forventes at tale om:

Spørgsmålet lægger op til, at eleven arbejder systematisk med en dynamisk beskrivelse af parablen, hvor alle koefficienter er tilknyttet skydere, og hvor symmetriaksen og toppunkt indtegnes. Der lægges endvidere op til at differentialregning inddrages i den præcise argumentation.

Betydningen af koefficienterne a, b og c tænkes illustreret grafisk ved hjælp af skydere i et CAS-program. Eleven forventes at ændre på én skyder ad gangen. I forhold til a skal eleven inddrage fortegnet for a i forhold til grafens forløb. I forhold til b kan eleven indtegne tangentlinjen og sammenligne dens hældning med koefficienten b. I forhold til c skal der naturligvis siges noget om at parallelforskyde grafen langs y-aksen.

Den efterlyste symmetriegenskab bunder i at postulere eksistensen af et tal x_0 med egenskaben, at $p(x_0 - h) = p(x_0 + h)$ for alle værdier af h, idet dette grafisk svarer til at grafen for p er symmetrisk omkring den lodrette linje $x = x_0$.

Løsningen er $x_0 = -\frac{2bh}{4ah} = -\frac{b}{2a}$ (under forudsætning af at $a, h \neq 0$). Herom gælder, at

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{d}{4a}$$

hvor $d = b^2 - 4ac$ betegner polynomiet p's diskriminant.

Eleven forventes at introducere diskriminanten d. Eventuelt oprettes en selvstændig skyder for denne.

Hvad kan man spørge eleven om?

> Kan betydningen af koefficienterne begrundes? I stigende sværhedsgrad vil eleven nok starte med c, dernæst a og til slut b. Parallelforskydning af grafen for $y = ax^2$ kan indgå undervejs eller til slut.
>
> Kan toppunktet lokaliseres på anden vis? (Ja, ved at løse ligningen $f'(x) = 0$)

Har man brug for information om alle tre koefficienter a, b og c for at fastlægge monotoniforholdene?

Kan man ud fra diskriminantens fortegn sige noget om parablens udseende? (Her vil det være relevant at inddrage rødderne)

Den stærke elev forventes at kunne supplere med et matematisk argument. Det er ikke umiddelbart hensigten med spørgsmålet at se på parallelforskydninger af grafen for $y = ax^2$ men det kan indgå i dialogen. Differentialregning bør indgå for at bringe diskussionen op på højeste taksonomiske niveau, men også den mindre stærke elev kan opnå noget ved simpelthen at beskrive grafens form, beliggenhed af toppunkt ud fra fortegnskombinationer for a og b (dog næppe med præcis argumentation), og parablens skæring med y-aksen.

Som idéer til fortsat faglig dialog, når dialogen om selve spørgsmålet er afsluttet, kan nævnes:

- Toppunktsformlen kan naturligvis udledes vha. differentialregning. Vi har her foreslået en anden tilgang som vi anser for at være mindre ”analyse-tynget”. CAS kan inddrages undervejs til ligningsløsning, i stedet for tidskrævende brug af kvadratsætninger som i stedet kan indgå i efterfølgende dialog.

- Hvis emnet har været behandlet i undervisningen, kan der tales om brændpunktet, samt hvad der sker med både toppunkt og brændpunkt når grafen for $y = ax^2$ parallelforskydes.

- Hvor ligger således brændpunktet for parablen der beskrives ved $y = ax^2 + c$? Ved $y = a(x - h)^2 + k$?

Spørgsmål 16: Opsparing og vækst

Forklar grundbegreber i procentregning, og benyt regression til at begrunde kapitalfremskrivningsformlen $K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$ i tilfældet, hvor der indsættes 1000 kr på en konto med en årlig rente på 50%. Vurdér modellens gyldighed og forklar hvordan den generelle formel udledes. Redegør for opsparingsannuitet.

Hvad eleven skal tale om:

Der lægges op til at eleven kort forklarer procentregning med konkrete tal, hvorefter der argumenteres for kapitalfremskrivningsformlen og dens betydning for at regne på en simpel opsparing. Dernæst følger en overvejelse om modellens gyldighed, efterfulgt af et gennemregnet eksempel på annuitetsopsparing. Disse udregninger kan generaliseres ved passende modellering.

Der indsættes 1000 kr. ind på en konto der giver 50% om året. Da 50% af 1000 kr er halvdelen af 1000 kr. og således 500 kr., vil der ved udgangen af det første år stå 1500 kr på kontoen. Den nye saldo kan let beregnes i ét hug ved at udregne $1000 \cdot (1+0{,}5)$, hvor faktoren ”1+0,5” ofte kaldes fremskrivningsfaktoren og ”0,5” da vækstraten.

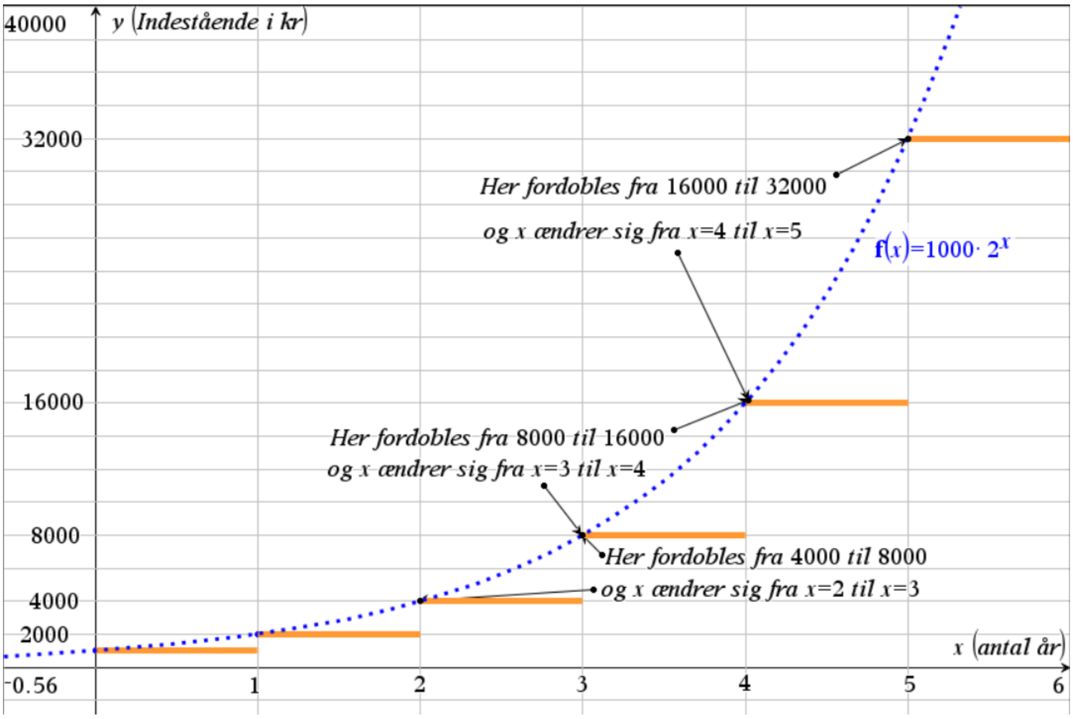
Ved udgangen af 2. år tilskrives igen 50% rente, igen beregnet som 50% af den aktuelle saldo på 1500 kr. Da 50% af 1500 kr er halvdelen, dvs. 750 kr., vil saldoen ved udgangen af 2. år således være 1500 kr. + 750 kr. = 2250 kr. Ganske som før kan dette også beregnes ved at regne $1500 \cdot (1+0{,}5) = 2250$. Det bemærkes, at den samme fremskrivningsfaktor ”1+0,5” forekommer. Men $1500 = 1000 \cdot (1+0{,}5)$, så saldoen efter to rentetilskrivninger kan beregnes ved $1000 \cdot (1+0{,}5) \cdot (1+0{,}5) = 1000 \cdot (1+0{,}5)^2$.

Eleven må forventes at se et generelt system og under alle omstændigheder at indrette et regneark til videre beregninger: Efter 3. rentetilskrivning vil saldoen være $1000 \cdot (1+0{,}5)^3$, efter 4. rentetilskrivning vil saldoen være $1000 \cdot (1+0{,}5)^4$ osv. Dette kan undersøges numerisk i et regneark.

Eleven skal begrunde at det er nærliggende at udføre eksponentiel regression. Resultatet er forskriften $y = 1000 \cdot 1.5^x$, hvor betydningen af x og y skal nævnes.

Formlen $K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$ kan hurtigt bevises ved induktion, men det bliver næppe gennemgået i detaljer på matematik B. Et mindre formelt ræsonnement – som eleven kan forventes at give – vil være at følge de enkelte terminer fremskrivningsfaktor for fremskrivningsfaktor $\ldots (1+r) \cdot (1+r) \cdot \ldots \cdot (1+r)$ – i alt n gange.

Senest her er det relevant at forholde sig til at modellen for rentetilskrivning – udtrykt ved $y = 1000 \cdot 1.5^x$ – ikke er en korrekt beskrivelse af saldoens udvikling på kontoen. En bedre model kunne være



Eleven skal dernæst redegøre for en annuitetsopsparing. For at blive i eksemplet fra før, forestiller man sig at der hver termin indbetales 1000 kr, og at der årligt tilskrives 50% i renter. Ved første indbetaling får man ingen renter. De tilskrives først året efter, umiddelbart inden indbetaling nr. 2 falder. Efter 2. indbetaling er der således 1000 kr + 1,5 · 1000 kr = 2500 kr på kontoen.

Efter 3. indbetaling står der $1000 + 1{,}5 \cdot 1000 + 1{,}5 \cdot (1{,}5 \cdot 1000) = 1000 \cdot (1{,}5^0 + 1{,}5^1 + 1{,}5^2)$, og dette generaliseres let til at der efter n.te indbetaling står $1000 \cdot (1{,}5^0 + 1{,}5^1 + \cdots + 1{,}5^{n-1})$. Den stærke elev kan forventes at kunne forklare dette: Der er et ræsonnement gemt i at forklare hvor den største eksponent er ”$n - 1$” og ikke ”n”.

Formlen for afsnitssummen i den geometriske række bliver da

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1{,}5^k = \frac{1{,}5^n - 1}{0{,}5}$$

hvilket i det mindste kan undersøges numerisk vha CAS. Eleven skal i så fald forklare denne summations-notation. Med en skyder for r kan eleven tilsvarende undersøge gyldigheden af den mere generelle formel.

Hvad kan man spørge eleven om:

Metode-bevidsthed: Har man faktisk bevist formlen $K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$?

Man kan spørge ind til en fortolkning af begreber såsom fremskrivningsfaktor og fordoblings-konstant i det konkrete eksempel.

Den knapt så stærke elev går muligvis i stå inden annuitet og kan da i stedet hjælpes igennem ved at spørge til gennemsnitlig månedlig rente osv. (hvis der i stedet blev tilskrevet renter hver måned)

Den dygtige elev kan blive bedt om at inddrage differentialregning i forbindelse med en fortolkning af vækstrate.

Som idéer til fortsat faglig dialog, når dialogen om selve spørgsmålet er afsluttet, kan nævnes:

- Man kunne få eleven til at undersøge (på computeren) hvad der sker hvis man sætter 1 kr. ind på en konto som på ét år giver 100 % rente, og så successivt halvere rentesatsen (to halvårlige renter á 50%, fire kvartals-tilskrivninger á 25% og så fremdeles). Det kan let laves med skydere og fører til en værdi for Eulers e. Det vil betyde en omtale af $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
- Et mere formelt ræsonnement (men stadig ikke et induktionsbevis) kunne bestå i at eksaminator på tavlen skriver

$$s = \sum_{k=0}^{n-1}(1+r)^k$$

og får eleven til at gennemføre udregningen at

$$(1+r)\cdot s = \sum_{k=1}^{n}(1+r)^k = (1+r)^n + \sum_{k=0}^{n-1}(1+r)^k - 1 = (1+r)^n + s - 1$$

hvoraf det følger at $s = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$.