LOGOS 2

Matematik - faget med den lange historie og den brede favn

- Læreplaner og fagopfattelser

af Bjørn Grøn

Jeg gik i gymnasiet i 1960'erne, den periode, hvor *New Math bevægelsen* skyllede ud over hele den vestlige verden som en særpræget reaktion på Sputnik-chokket. New Math var funderet i den såkaldte Bourbaki-tradition, der er båret af en ekstrem snæver opfattelse af matematik, og hvor man har udgrænset både den historiske dimension og de store filosofiske og erkendelsesmæssige spørgsmål. I Bourbaki-traditionen var opfattelsen, at man billedligt talt først må have styr på matematikkens atomer som logik og mængdelære, før man kan lære om de simpleste molekyler som relationer og algebraiske operationer osv. Beslægtede fagtraditioner kan findes inden for de fleste fag. Men i matematik - og også i fag som fysik - gik man nok længere ud end de fleste.

Gymnasiefaget blev udmøntet i emnebaserede fagbekendtgørelser, der lukkede sig om sig selv, og i lærebøger der var kemisk renset for enhver fortælling om matematikkens udvikling og oprindelse. Et af de fremtrædende medlemmer af Bourbaki-gruppen, Dieudonné formulerede slagordet "Euclid must go". Og de ryddede grundigt op - fx indgik begrebet *keglesnit* (der er en fælle navn for cirkler, ellipser, parabler og hyperbler) stadig i pensum, men vi så hverken kegler eller hørte noget om Apollonius eller om genopdagelsen af de antikke skrifter i renæssancen, hvor Kepler netop får sin ide om, at Marsbanen er elliptisk ved at læse Apollonius. På universitetet fremstod faget som en ren mental konstruktion. Var der historiske anmærkninger, var dette begrænset til anekdotisk bemærkninger og angivelse af årstal for de matematikere, der har lagt navn til det ene og det andet.

Matematikfaget har altid haft en række forskellige skoler, der er stærkt uenige både om videnskabsteoretiske og fagdidaktiske positioner, men sådanne temaer var helt fraværende i uddannelsen. Der findes ældre matematiklærere, der har oplevet den samme udvikling, og som kan finde på at beskrive dette som en svunden guldalder. Det er nærmest det modsatte. Alt det fantastiske ved matematikfaget, som har været et af de kulturbærende fag i over 4000 år, der rummer så mange erkendelsesmæssige udfordringer og som er det fag der anvendes oftest som redskabsfag af andre blev skåret væk som overflødigt fedt dengang.

De nye læreplaner blev udformet under stærk inspiration af den kompetencebaserede beskrivelse af matematikfaget, som blev præsenteret i den såkaldte *KOM-rapport* (Niss, 2002). Kompetencetænkningen sætter fokus på udvikling af elevens egen evne til at håndtere matematiske begreber og sammenhænge, og til at kunne anvende matematik i et fagligt samspil med andre fag. Kompetencetænkningens forestilling om eleven som *aktør*, og ikke som en der *gives* matematiske færdigheder og viden har medført, at nogle grundlæggende didaktiske holdninger til tilrettelæggelsen af undervisningen nu er skrevet ind i læreplanerne. Det betyder, at lærerne skal inddrage dette i deres planlægning af undervisningen.

Fagets to traditioner - Euklid og Archimedes

I den fagopfattelse, der ligger til grund for de nye læreplaner, er matematikfagets indhold og læringsprocessen komplementære størrelser. Man vender ikke ryggen til fagets aksiomatisk-deduktive sider, men ser elevernes tilegnelse af matematiske kompetencer som en spiral, hvor induktive og deduktive elementer bestandig afløser hinanden. Faget har flere parallelt løbende traditioner og ikke blot én. De to hovedlinjer, en der beskæftiger sig med undersøgelse/udforskning af mulige sammenhænge og en, der beskæftiger sig med forankring af de fundne sammenhæng i form af beviser, har begge deres historiske oprindelse i den græske kultur, hvorfra vi på den ene side har overleveret *Euklids* syntetiske fremstilling af *matematikkens elementer*, på den anden side en mere udforskende heuristisk analytisk tilgang eksemplificeret ved *Arkimedes' Om metoden*. Disse to traditioner har levet side om side og befrugtet hinanden gennem hele matematikhistorien, og de bør på samme måde leve side om side i de gymnasiale matematikfag.

De to traditioner og de nye værktøjer

Overvejelser om eksperimenterende tilgange til matematisk læring og matematisk problembehandling er ikke et nyt fænomen, der er opstået med it-værktøjerne. Det er indlejret i den ene af fagets to lange traditioner og er udførligt og inspirerende behandlet i Davis og Hersh's klassiske værk *The mathematical Experience* (1990). Men it-værktøjerne har løftet hele dette område op på et kvalitativt nyt niveau.

I bogen *Mathit*, der er et resultat at et større udviklingsarbejde om it-værtøjernes didaktiske potentialer, er der et særligt kapitel om universiteternes syn på anvendelsen af eksperimenterende tilgange i matematikundervisningen. På spørgsmålet: *Udvikles ræsonnementskompetencen lige så godt i en eksperimentel tilgang som i en traditionel tilgang?* svarer professor Steen Markvorsen, DTU: *Absolut, og oven i købet meget bedre, fordi vi netop med IT-redskaber har et værktøj og et fartøj, ved hjælp af hvilket vi kan manøvrere os tæt på det matematiske betydningsindhold i det, vi har gang i. Jeg kan godt lide det billede, hvor matematikken faktisk er som en ideel rand af vores totale erfaring om, hvordan ting opfører sig, både abstrakt og konkret. Og IT-værktøjet er absolut et fartøj, der kan bringe os tæt på at forstå den rand.*

Fagligt samspil

Alle fag i gymnasiet er forpligtet på fagligt samspil, og i alle fags læreplaner indgår, at dele af kernestof og supplerende stof skal vælges, så det styrker mulighederne for et sådant samspil. Det faglige samspil skal således ikke ses løsrevet fra den øvrige undervisning, men skal dels styrke elevernes forståelse af de enkelte fag, ved at se faget blive brugt i andre fag, dels styrke elevernes muligheder for at arbejde med fagoverskridende emner. Matematik skal følgelig ikke være helt det samme fag i to forskellige studieretninger, men skal tones efter hvilke fag man er i studieretning med. Det kan fx ske ved at arbejde med opgavetyper og problemer, der henter stof, terminologi og formelsprog fra andre fag. På samme måde skal et fag som oldtidskundskab forstå at tone sig efter studieretningen.

Fagligt samspil kan foregå på forskellige niveauer, der alle er relevante. Søren Harnow Klausen har givet en meget anvendelig kategorisering i følgende typer, set fra matematiks side:

a) Samspil, hvor matematik indgår som *hjælpedisciplin*, evt. blot som støttefag.
b) *Flerfaglige samspil*, hvor matematik indgår i et parallelforløb indenfor et overordnet tema/emne.

c) *Fællesfaglighed*, hvor matematik indgår i et samspil omkring en fælles problemstilling, der ikke kan afklares indenfor de enkelte fag.
d) *Fagoverskridende samspil*, hvor fagenes grænser ophæves til fordel for fx en fagoverskridende problemstilling, der kræver metoder på tværs af fagene og som styrker de helt generelle tværfaglige kompetencer. (80).

Det fagoverskridende samarbejde bør også have fokus på fælles generelle kompetencer, fx omkring ræsonnements- og argumentationskompetencen, og dermed gensidigt styrke de enkelte fags arbejde. Det kan eksempelvis være et fagligt samspil mellem oldtidskundskab og matematik om at forstå *den særlige argumentationsform, der opstod i det antikke Grækenland*, og som ikke blot fik afgørende indflydelse på matematikkens udvikling men også satte sig dybe spor i filosofiens og teologiens udvikling. Bogen *Q.E.D.* kan levere et grundlag for et sådant samspil.

Men mulighederne er langt større end blot dette. Når man begynder at afsøge sådanne muligheder og drøfte det kolleger imellem, er det vigtigt at begge fag er åbne. Det er jeg godt klar over af og til kan mangle hos nogle matematiklærere, men det gælder nu også den anden vej. Jeg har mødt en del oldtidskundskabslærere, der har den opfattelse, at foreligger der ikke tekster, så kan faget ikke være med. Så man kan ikke forholde sig til, hvordan de i oldtiden organiserede sig i bysamfund osv. En sådan opfattelse er både ufattelig snæver, men også ødelæggende for samarbejdet. Vi skal ikke stille absolutte vetoagtige krav op. Tværtimod er det jo utroligt spændende at bringe sit fag i spil i helt nye sammenhænge.

I stedet for at jeg remser ideer op, skal læserne nu selv gøre en lille indsats. Sammen med tre andre er jeg i færd med at skrive et nyt lærebogssystem, bl.a. for at demonstrere i praksis et matematiksyn, hvor faget lever gennem store fortællinger, anvendelser og samspil med andre fag. C-bogen er udkommet og B-bogen kommer til august. Sammen med lærebøgerne udkommer der i-bøger, der rummer alt stoffet i lærebogen, men dertil en masse andet stof i form af 5 ekstra studieretningskapitler, ca. 100 projekter og en masse kildetekster. i-bogen er åben for alle indtil sommeren. Den tilgås på adressen: web.lru.dk. Kapitel 10 i i-bogen hedder *Matematik og kultur* og man kan få et indtryk af indholdet af nogle klip fra indholdsfortegnelsen:

Indhold

I dette kapitel 10 ligger der 16 projekter, hvoraf mange kunne have interesse for oldtidskundskab. Jeg nævner blot nogle stykker, der præsenteres i i-bogen gennem disse manchetter:

Projekt 10.2 Euklidisk tankegang i europæisk kulturhistorie

Den euklidiske tankegang har påvirket hele den europæiske kulturkreds. Projektet omfatter både eksempler fra Euklids forgængere indenfor filosofi og litteratur – Aristoteles' logik og Homers Iliade – og eksempler på sådanne skelsættende værker med tydelige Euklidiske fingeraftryk som Spinozas etik, Newtons optik, Den amerikanske uafhængighedserklæring og Russels og Whiteheads *Principia Mathematica*.

Projekt 10.4 Videnskabsteori - Lakatos og Eulers polyedersætning

Den ungarske matematiker Imre Lakatos var en af de største formidlere af matematik i det 20. århundrede, og samtidig en af de store *videnskabsteoretikere*. Han var påvirket af Platons dialoger, men udvikler dem dynamisk på en måde, så han demonstrerer, hvordan gamle rammer for matematik sprænges og ny erkendelse opstår. Hans dialog om Eulers polyedersætning er en klassiker i matematikhistorien. I projektet vil du møde fyldige uddrag af bogen.

Projekt 10.11 Det udelukkedes tredjes princip

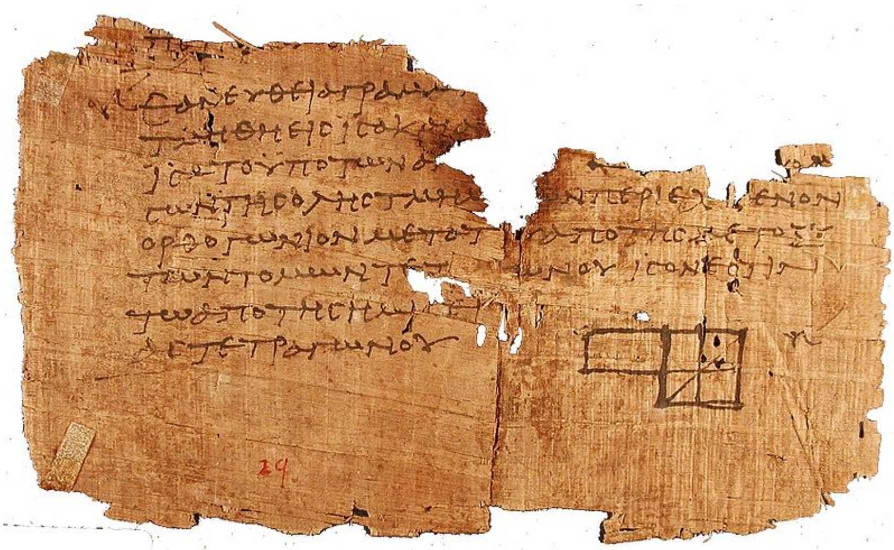
Dette princip eller aksiom siger, at for en given påstand gælder altid, at *enten er påstanden sand eller den modsatte påstand er sand*. Der er ikke en tredje mulighed. Selv om man i daglig tale har et begreb som *halvdød*, så er der ingen tilstand midt imellem. Men gælder det i alle spørgsmål?

Projekt 10.13 Serlios søjleordner og spiralkonstruktioner

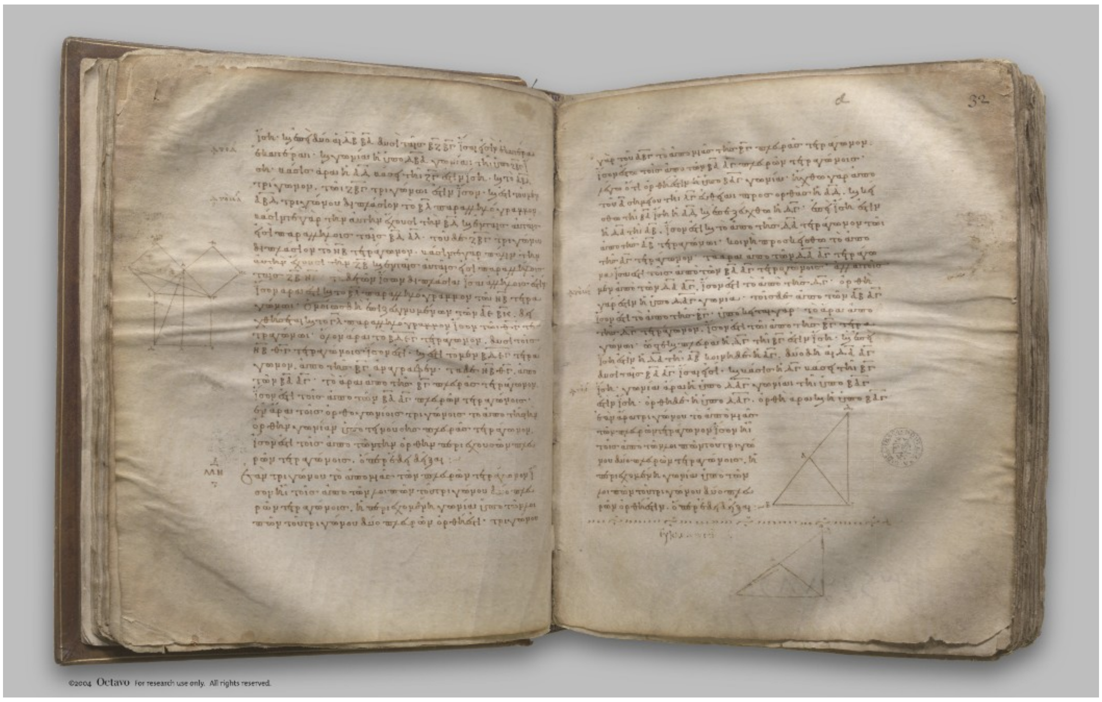
I 1500 tallet udgav den italienske arkitekt Sebastiano Serlio *De syv bøger om arkitektur*, hvor han i alle detaljer fastlagde regler for byggeri. Værket er skrevet så den kunne anvendes som en manual af samtidens håndværkere, og den er samtidig tydeligt inspireret af Euklids *Elementer*. I projektet vil vi arbejde med en af detaljerne heri, nemlig konstruktion af spiraler, der har været et mønster, menneskene har brugt til alle tider.

Men gå selv ind og undersøg det og tag din matematiklærer med ved hånden. Det er en og samme kulturkreds, der lagde jordbund til Euklids *Elementer*, Sofokles' *Ødipus*, Zenons paradokser, Myrons Diskoskaster, Archimedes' *Om metoden* og tempelingeniørernes søjlekonstruktioner. Derfor er det også, at man kan få god inspiration til at tænke over, hvad matematik er for en konstruktion, ved at læse Sofokles' *Ødipus*. Og man får bedre indsigt i, hvorfor Diskoskasteren er udført sådan, når man tænker over bevægelsens mulighed og umulighed hos Zenon. Lad os finde ind til det fælles.

Illustrationer til Bjørn Grøns artikel i Logos nr. 2



Et af de ældste bevarede fragmenter af "Euklids elementer" (Bog 2, sætning 5) fundet i Oxyrhynchus 150 km syd for Cairo og dateret til ca. 100 efter vor tidsregning.<kilde : http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/papyrus/papyrus.html>



Pythagoras sætning i den græske udgave af Euklids Elementer. Konstantinopels version af Euklids Elementer fra 888 befinder sig i dag på Bodleians bibliotek i England. Biblioteket har lagt en scanning ud på nettet, så alle med selvsyn kan gennemse ophavet til alle de udgaver af Euklids Elementer, der findes. Euklids Elementer kom i første omgang tilbage til Vesteuropa gennem den arabiske oversættelse.

kilde: *http://en.wikipedia.org/wiki/File:Woman_teaching_geometry.jpg*

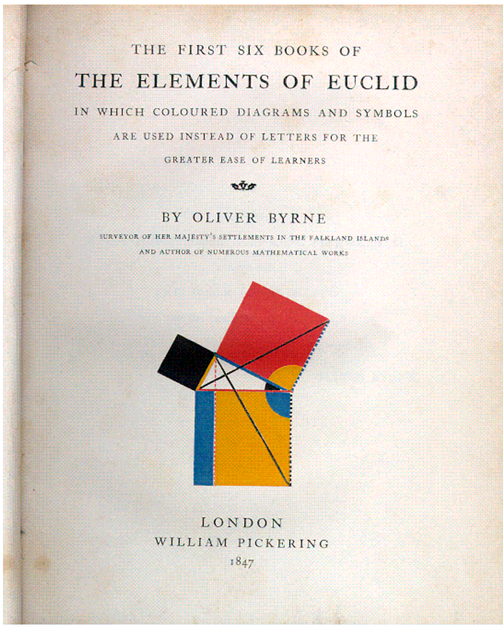
Euklid i middelalderen: Undervisning i geometri. Fra en middelalderudgave (ca. 1310) af den tidligste vesteuropæiske udgave af Euklids elementer. Oversat til Latin fra Arabisk ca. 1120 af englænderen Adelard of Bath, der stiftede bekendtskab med de arabiske oversættelser på lange rejser i bl.a. middelhavsområdet.

kilde: *http://en.wikipedia.org/wiki/File:Pacioli.jpg*

Euklid i renæssancen: Luca Pacioli med elev. Maleriet fra 1495 tilskrives traditionelt Jacopo de Barari (1440-1515), Capodimonte museet i Napoli, Italien. På billedet demonstrerer Luca Pacioli en sætning af Euklid. På bordet ses en model af et dodekaeder (regulært polyeder omkranset af 12 regulære femkanter). I luften hænger et gennemsigtigt semiregulært polyeder halvt fyldt med vand. Det vides ikke med sikkerhed hvem eleven forestiller. Luca Pacioli (1445-1514) var franciskanermunk og matematiker.

kilde:http://www.springerimages.com/Images/HumanitiesArts/1-10.1007_978-90-481-3542-4_1-0

Euklid i den tidlige oplysningstid: 'Vi har intet at frygte, for jeg ser tegn på mennesker'. Titelbladet fra skotten David Gregorys udgave fra 1703 af Euklids samlede værker (altså ikke kun elementerne – Gregorys udgave var den første samlede udgave af Euklid i den vesteuropæiske verden). Billedet gengiver en fortælling af den antikke romerske arkitekt Vitruvius, de Architectura, kap. 6.



kilde: http://www.math.ubc.ca/~cass/euclid/byrne.html

Euklid i romantikken: Oliver Byrne's farvelagte udgave fra 1847, hvor den excentriske matematiker drømte om at gøre Euklids tankegangs forståelig ved systematisk brug af farvekoder. Som pædagogisk princip fandt Byrnes ideer kun ringe opbakning. Men kunstnerisk går der klare tråde fra Byrnes pragtværk til den moderne non-figurative kunst. På nettet kan du finde Oliver Byrne's udgave *her.* <link til http://www.math.ubc.ca/~cass/euclid/byrne.html>